

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

(Prerrequisitos: Funciones básicas. Límites y continuidad de funciones de una variable)

Las funciones básicas son las más sencillas: Funciones constantes ($y = k$, con k cualquier número real); función identidad ($y = x$); funciones potenciales más sencillas ($y = x^n$, con n entero mayor que 1); funciones radicales ($y = \sqrt[n]{x}$, con n entero mayor que 1); funciones exponenciales más sencillas ($y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$); funciones logarítmicas ($y = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$); funciones seno, coseno y tangente (donde la variable independiente representa un ángulo en radianes); funciones inversas de las tres anteriores ($y = \arcsen x$, $y = \arccos x$ e $y = \arctan x$, donde la variable dependiente representa un ángulo en radianes), y la función valor absoluto ($y = |x|$).

Límites en puntos del dominio

Todas las funciones básicas son continuas en sus respectivos dominios. Por tanto, si $f(x)$ es una cualquiera de ellas y a es un punto cualquiera del dominio de f , se tendrá:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Cuando f posea un dominio que sea un intervalo y a sea un extremo del mismo, perteneciendo a ese dominio, el límite ordinario de $f(x)$ en dicho punto se reducirá al único límite lateral que tenga sentido, siendo $f(a)$ el valor de dicho límite.

Hay tres casos de la anterior situación entre las funciones básicas:

Caso 1 (múltiple): Es el de las funciones radicales de índice par, cuyo dominio común es el intervalo $[0, +\infty)$. Pues bien, el límite ordinario de cualquiera de esas funciones en el punto $x = 0$ se reduce al límite por la derecha de la misma función en ese punto, que será $\sqrt[n]{0} = 0$.

Casos 2 y 3: Son las funciones arco seno y arco coseno, cuyo dominio común es $[-1, 1]$, de forma que el límite ordinario en $x = -1$ para ambas funciones se reducirá al límite por la derecha correspondiente a cada una (con resultados sus valores respectivos en ese punto), y el límite ordinario en $x = 1$ para ambas funciones se reducirá al límite por la izquierda correspondiente a cada una (con resultados sus valores respectivos en ese punto).

Límites en puntos que son extremos no pertenecientes de intervalos del dominio

Aquí hay sólo dos casos entre las funciones básicas:

Caso 1 (múltiple): Es el de las funciones logarítmicas, cuyo dominio común es $(0, +\infty)$. El punto $x = 0$ no pertenece al dominio, pero cualquier intervalo de la forma $(0, \delta)$ queda contenido en el mismo. Por tanto, tiene sentido el límite lateral por la derecha de $x = 0$ y se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \text{ si } a > 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \text{ si } 0 < a < 1$$

Por tanto, la recta $x = 0$ (el eje OY) es siempre asíntota vertical de estas funciones.

Caso 2: Es la función tangente, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los infinitos múltiplos impares de $\pi/2$. Así, los puntos $a = (2k + 1) \cdot (\pi/2)$, con k entero, son los que no pertenecen al dominio.

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

Pero cualquiera de los mismos tiene infinitos puntos del dominio tan cerca como queramos, tanto por su derecha como por su izquierda, luego tienen sentido ambos límites laterales en cada uno de dichos puntos y se tiene:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \pm \infty}, \text{ siendo } \boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} \tan x = +\infty} \text{ y } \boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} \tan x = -\infty}$$

para todo a que sea múltiplo impar de $\pi/2$.

Por tanto, las infinitas rectas de ecuaciones $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, \text{ etc...}$ así como las de ecuaciones $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{3\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{2}, \text{ etc...}$ son asíntotas verticales.

Límites en el infinito

Tenemos los siguientes casos que corresponden a todas las funciones básicas:

- 1) Funciones constantes: $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$ (para cualquier k real)
- 2) Función identidad: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- 3) Funciones potenciales pares: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ (n entero positivo par)
- 4) Funciones potenciales impares: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ (n entero positivo impar)
- 5) Funciones radicales de índice par: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x}$ no tiene sentido (n par)
- 6) Funciones radicales de índice impar: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ (n impar)
- 7) Funciones exponenciales crecientes (base $a > 1$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
Por lo tanto, estas funciones tienen la asíntota horizontal $y = 0$, que es el eje OX.
- 8) Funciones exponenciales decrecientes (base $0 < a < 1$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
Por lo tanto, estas funciones tienen la asíntota horizontal $y = 0$, que es el eje OX.
- 9) Funciones logarítmicas crecientes (base $a > 1$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x$ no tiene sentido

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

10) Funciones logarítmicas decrecientes (base $0 < a < 1$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x$ no tiene sentido

11) Función seno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ no existe y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ no existe

12) Función coseno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ no existe y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ no existe

13) Función tangente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x$ no existe y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x$ no existe

14) Función arco seno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin x$ no tiene sentido y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin x$ no tiene sentido

15) Función arco coseno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos x$ no tiene sentido y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos x$ no tiene sentido

16) Función arco tangente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi/2$

Por tanto, esta función tiene dos asíntotas horizontales: $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$.

17) Función valor absoluto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$

Notas:

- 1) Los límites cuando $x \rightarrow -\infty$ de las funciones radicales de índice par no tienen sentido, porque no hay valores negativos en el dominio de esas funciones, ya que el dominio de todas es $[0, +\infty)$.
 - 2) Los límites cuando $x \rightarrow -\infty$ de las funciones logarítmicas no tienen sentido, porque no hay valores negativos en el dominio de esas funciones, ya que el dominio de todas es el intervalo $(0, +\infty)$.
 - 3) Los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las tres funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) no existen aunque tienen sentido, porque los valores de las tres se repiten en forma periódica (el seno y el coseno oscilan entre -1 y $+1$, con periodo 2π ; la tangente oscila entre $-\infty$ y $+\infty$, con periodo π).
 - 4) Los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las funciones arco seno y arco coseno no tienen sentido, porque no hay valores del dominio de ambas funciones superiores a 1 ni inferiores a -1 . En ambos casos el dominio es $[-1, 1]$.
-