# DERIVADAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisitos: Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad de funciones de una variable)

## Introducción

El concepto de "derivada de una función" es de los más importantes de las Matemáticas. Hay que distinguir entre "derivada de una función en un punto", que es un número real (basado a su vez en el concepto de "límite de una función"), y "función derivada de una función dada", que es otra función asociada a la misma.
Son fundamentales las funciones derivadas de las "funciones básicas" y las reglas para obtener derivadas de funciones que sean sumas, diferencias, productos, cocientes o compuestas de otras funciones. Con lo cual se sabrá calcular la "función derivada" de cualquier "función elemental", de las "funciones definidas a trozos" más utilizadas en la práctica y de cualquier "función definida implícitamente".
Ayuda mucho en esta Sección ver las gráficas de las funciones mencionadas en la cercanía de los puntos de que se trate (utilizar calculadoras con capacidad gráfica o bien ordenadores con un programa para graficar como GeoGebra).

## Puntos interiores de un conjunto de números reales

Si A es un conjunto de números reales, a todos los elementos del conjunto A que estén completamente rodeados por otros elementos de A se les llama "puntos interiores" de dicho conjunto A. Dicho de un modo más preciso, si $x$ es uno de esos puntos interiores, habrá necesariamente algún intervalo abierto de la forma $(x-\delta\ ,\ x+\delta)$ completamente contenido en A (con $\delta$ positivo, lo pequeño que sea necesario para cada punto interior $x$). Por tanto "pertenecer a A" no es lo mismo que "ser interior de A" (ver ejemplo siguiente).

Ejemplo: Si A es un intervalo cerrado $[a\ ,\ b]$, serán puntos interiores de A todos los del intervalo salvo los dos extremos $a$ y $b$ (los extremos pertenecen al conjunto, pero no son interiores del mismo). Pues, para el extremo izquierdo $a$, cualquier intervalo de la forma $(a-\delta\ , a+\delta)$ tendrá siempre su mitad izquierda fuera de A. Y para el extremo derecho $b$, cualquier intervalo de la forma $(b-\delta\ , b+\delta)$ tendrá siempre su mitad derecha fuera de A. Sin embargo, para cualquier punto $x$ intermedio de A, que será punto del intervalo abierto $(a\ , b)$, habrá siempre algún intervalo $(x-\delta\ , x+\delta)$, con $\delta$ conveniente, el cual quedará completamente contenido en A. Se aconseja dibujar un cierto intervalo cerrado A = $[a\ , b]$ sobre la recta numérica y visualizar, para muchos puntos $x$ intermedios de A, varios posibles intervalos de la forma $(x-\delta\ , x+\delta)$ que queden contenidos en A; se observará que si $x$ se toma muy cerca de alguno de los extremos de A, habrá que tomar $\delta$ muy pequeño.

---

Análogamente, si A es un intervalo cerrado $[a\ ,+\infty)$, serán puntos interiores de A todos los del intervalo salvo el extremo $a$. Si A es un intervalo cerrado $(-\infty\ ,\ b]$, serán puntos interiores de A todos los del intervalo salvo el extremo $b$. Si A es un intervalo no cerrado ni abierto $[a\ ,\ b)$ o bien $(a\ ,\ b]$, serán puntos interiores de A todos los del intervalo salvo el extremo perteneciente al mismo. Y si A es un intervalo abierto que puede ser $(a\ ,\ b)$, $(a\ ,+\infty)$, $(-\infty\ ,\ b)$ o bien $(-\infty\ ,+\infty)$, serán puntos interiores de A todos los del intervalo.

Cuando A sea una unión de varios intervalos que no tengan puntos comunes, serán puntos interiores de A los puntos que pertenezcan a cada uno de los intervalos de la unión, salvo sus extremos. En el caso de que la unión incluya algún "punto aislado", éste no será punto interior de A; pues si lo llamamos $a$, será extremo de un intervalo cerrado de la forma $[a\ , a]=\{a\}$ , el cual quedará separado de los otros intervalos de la unión; por tanto, cualquier intervalo de la forma $(a - \delta \,, a + \delta)$ incluirá siempre puntos que no pertenecen a A.

### El cociente incremental en un punto interior

Si $y = f(x)$ es una función real de una variable real y $x = a$ es un "punto interior" de su dominio, se llama "cociente incremental" (o "cociente de Newton") de esa función en dicho punto, al cociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

donde $h$ representa un valor real no nulo cualquiera, con la única condición de que el punto $a + h$ pertenezca al dominio de $f(x)$. Como hemos supuesto que el punto $x = a$ es punto interior del dominio de $f$, los valores de $h$ podrán ser positivos y también podrán ser negativos, ya que $x = a$ tiene puntos del dominio a su derecha y a su izquierda; pero en muchas ocasiones el valor absoluto de $h$ tendrá que mantenerse suficientemente pequeño, pues en caso contrario el punto $a + h$ podría estar ya fuera del dominio de la función.

Obsérvese que el cociente incremental es entonces una nueva función real de la única variable real $h$ (la cual no está definida para $h = 0$, pero sí para valores positivos y negativos de $h$, con valores absolutos suficientemente pequeños en muchos casos). Por lo tanto, tiene sentido hablar del límite del citado cociente incremental cuando $h$ tiende a cero por la derecha y también cuando $h$ tiende a cero por la izquierda. (Ver Sección 2.4).

Obsérvese también que el numerador del "cociente incremental", $f(a + h) - f(a)$, representa el incremento de la función $f$ (o de su variable dependiente "$y$") cuando la variable independiente $x$ pasa del valor $a$ al valor $a + h$ ($h$ representa por tanto un incremento de la variable independiente $x$). Se puede escribir: $h = \Delta x$ ($\Delta x$ se lee "incremento de la variable $x$"). Y también se puede escribir: $f(a + h) - f(a) = \Delta f$ ($\Delta f$ se lee "incremento de la función $f$"), o bien podemos escribir que $f(a + h) - f(a) = \Delta y$ ($\Delta y$ se lee "incremento de la variable dependiente $y$"). Con lo cual resulta ser:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(éste es el motivo del nombre "cociente incremental" o "cociente de incrementos" para esta función).

Nota: La palabra "incremento" debe tomarse como "variación", que puede ser aumento o disminución (en el lenguaje común "incremento" se entiende casi siempre como "aumento", pero en Matemáticas no es así: "aumento" es "incremento positivo" y "disminución" es "incremento negativo").

### La derivada en un punto

Se llama "derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$" (siendo éste un "punto interior" del dominio de la función), al valor del límite ordinario del cociente incremental de la función $f$ en ese punto $a$, cuando el incremento $h$ de la variable independiente tiende a cero, **suponiendo que dicho límite exista como número real**.
En ese caso, se dice que "la función $f(x)$ **es derivable** en el punto $x = a$" y su derivada se representa por $f'(a)$.
Por tanto, se tiene: $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Estamos suponiendo que este límite ordinario es finito (o sea es un número real), lo cual implica que ambos límites laterales del cociente incremental existirán y coincidirán con ese valor.

Si es $y = f(x)$, también puede escribirse: $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ , pues $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$

También, si fuese $u = f(x)$, se escribiría $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}$ donde $\boxed{\Delta u = f(a + \Delta x) - f(a)}$ . Y si fuese $u = f(t)$, siendo $t_0$ un punto interior del dominio de $f$, se escribirá $\boxed{f'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}}$ donde $\boxed{\Delta u = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}$ .

MUY IMPORTANTE: Cuando el límite mencionado en la definición de derivada **no exista o resulte infinito**, se dice que "la función $f$ **no es derivable** en el punto $x = a$" (y entonces no hablaremos de la derivada $f'(a)$, o diremos que $f'(a)$ no existe).

---

Ejemplos:

1) Consideremos la función $f(x) = x^3$ (de dominio todo $\mathbb{R}$) y el punto $x = 2$ (interior del dominio). El cociente incremental de esa función en el punto dado es:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12 + 6h + h^2 \text{ (pues } h \neq 0)$$

(obsérvese cómo el cociente incremental es una función de $h$, donde se supone $h \neq 0$).
Y vemos que en este caso el límite ordinario de dicho cociente incremental, cuando $h$ tiende a cero, es 12.
Por tanto, "la función $f(x) = x^3$ **es derivable** en el punto $x = 2$", siendo $\boxed{f'(2) = 12}$ .

2) Consideremos la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (de dominio todo $\mathbb{R}$) y el punto $x = 0$ (interior del dominio). El cociente incremental de la función en ese punto es ahora:

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} = h^{\frac{1}{3}-1} = h^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \quad \text{(otra vez función de } h \text{ y } h \neq 0)$$

En este caso el límite ordinario del cociente incremental, cuando $h$ tiende a cero, es $+\infty$ (obsérvese que ambos límites laterales dan $+\infty$, pues $h^2$ es siempre positivo).
Por tanto, "la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ **no es derivable** en el punto $x = 0$". O bien, decimos que $g'(0)$ no existe.

3) Consideremos la función $m(x) = |x|$ (de dominio todo $\mathbb{R}$) y el punto $x = 0$ (interior del dominio). El cociente incremental de la función en ese punto es en este caso:

$$\frac{m(0+h)-m(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \text{(función de } h\text{, como siempre, con } h \neq 0)$$

Pero, si tomamos un $h$ positivo, el cociente incremental obtenido es $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$.
Y si tomamos un $h$ negativo, el cociente incremental obtenido nos da $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$.
Es decir, que la función cociente incremental es en realidad: $c(h) = \begin{cases} 1, & si\ h > 0 \\ -1, & si\ h < 0 \end{cases}$
Con lo cual, el límite ordinario del cociente incremental, cuando $h$ tiende a cero, no existe, ya que el límite por la izquierda es $-1$ y el límite por la derecha es 1 (distintos).
Por tanto, "la función $m(x) = |x|$ **no es derivable** en el punto $x = 0$". O bien, decimos que $m'(0)$ no existe.

**Interpretación geométrica de la derivada en un punto**

La derivada de una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$, cuando existe, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P $(a , f(a))$, la cual entonces no será vertical.

Por tanto, al existir $f'(a)$, la ecuación de esa recta tangente será:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$$

Nota: La recta tangente a la gráfica en el punto P $(a, f(a))$ es la que, pasando por dicho punto, **se parece más a la parte de la gráfica de $f$ que está muy próxima a dicho punto**, de modo que recta y gráfica son casi coincidentes en las cercanías del punto P. (Dicha recta tangente en P puede además cortar o no cortar a la gráfica de la función en otros puntos distintos del P).

Y la ecuación de la "recta normal" a la gráfica en el mismo punto P (recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la recta tangente) será entonces:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)} \quad , \quad \text{si } f'(a) \neq 0$$

(Recuérdese que las pendientes $m_1$ y $m_2$ de dos rectas perpendiculares han de cumplir la condición $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$, o bien, $\boxed{m_2 = -1/m_1}$ , si $m_1 \neq 0$).

Caso especial: Cuando sea $f'(a) = 0$ no podrá aplicarse la ecuación anterior para la recta normal, pero en ese caso la recta tangente será **horizontal** (pendiente cero) y por tanto su ecuación será $\boxed{y = f(a)}$ . Con lo cual la recta normal será **vertical**, de ecuación $\boxed{x = a}$ .

Ejemplos:

1) La recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en su punto P (2 , 8) tendrá ecuación $\boxed{y - 8 = 12(x - 2)}$ , puesto que habíamos demostrado anteriormente que $f'(2) = 12$. Y la ecuación de la correspondiente recta normal es $\boxed{y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)}$ .

2) La derivada de la función $g(x) = (x - 1)^2 + 3$ en el punto $x = 1$ es cero (puede obtenerse fácilmente hallando el límite del cociente incremental en el punto mencionado). Por tanto, la recta tangente a la gráfica en el punto P (1 , 3) será $\boxed{y = 3}$ y la recta normal en ese mismo punto será $\boxed{x = 1}$ .

---

MUY IMPORTANTE: Cuando la función $f(x)$ no sea derivable en el punto $x = a$, puede ocurrir alguna de las situaciones siguientes:

1) Que la función **no sea continua en el punto $x = a$** (se verá en el apartado siguiente que "derivable implica continua", luego "no continua implicará no derivable").
2) Que la función **sea continua en $x = a$ , pero su gráfica no posea recta tangente en el punto P $(a , f(a))$**. En este caso, lo más frecuente es que la gráfica cambie bruscamente de dirección al pasar por dicho punto y el punto se llama "**punto anguloso**" (en este caso los límites laterales del cociente incremental son dos números distintos o uno de ellos es un número y el otro es infinito) o se llama "**punto de retroceso**" (cuando ambos límites laterales del cociente incremental son infinitos de diferentes signos).
3) Que la función **sea continua en $x = a$ y posea recta tangente en P $(a , f(a))$, pero dicha recta tangente sea vertical** (con lo cual no tendrá pendiente y entonces la derivada no existirá en ese punto). En este caso los límites laterales del cociente incremental serán infinitos de igual signo.

Ejemplos:

1) Vimos en la pág. 3 que la función $|x|$ es no derivable en $x = 0$. Pues bien, le ocurre lo dicho en el apartado 2 anterior: La función es continua en $x = 0$, pero el punto $(0\,,0)$ correspondiente de su gráfica es un "punto anguloso" (vimos que los límites laterales del cociente incremental eran $-1$ y $+1$) y entonces no hay recta tangente a la gráfica en el origen. (Ver su gráfica en la Sección 2.2).

2) Vimos también en la pág. 3 que la función $\sqrt[3]{x}$ es no derivable en $x = 0$. Aquí ocurre lo dicho en el apartado 3 anterior: La función es continua en $x = 0$ y tiene recta tangente en el origen, pero dicha recta es vertical (es el eje OY). (Ver su gráfica en la Sección 2.2).

3) La función $\sqrt[3]{x^2}$ es también continua en $x = 0$, pero no es derivable en dicho punto, como puede comprobarse calculando los límites laterales del cociente incremental en ese punto, que es $1/\sqrt[3]{h}$ : El límite por la izquierda es $-\infty$ y el límite por la derecha es $+\infty$, con lo cual la función tiene en el punto (0 , 0) un "punto de retroceso" y no hay recta tangente a la gráfica en el origen (ocurre lo dicho en el apartado 2 anterior). (Ver su gráfica alrededor del origen con una calculadora gráfica o con un ordenador utilizando algún programa para graficar como GeoGebra).

---

Ver la Sección 3.2 de esta página web, donde se explica **la importante interpretación de la derivada en un punto como "razón de cambio" o "velocidad de variación" de la función en dicho punto**. Entre esas razones de cambio está la velocidad instantánea de un móvil en Física.

---

**Relación entre continuidad y derivabilidad**

TEOREMA: Si la función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$, entonces la función es continua en dicho punto.

O sea: Derivable implica continua. También suele decirse que la continuidad es condición necesaria para la derivabilidad (o sea, que si una función no es continua en un punto, dicha función no será derivable en dicho punto).

Pero continua no implica derivable: Es decir, hay muchas funciones que son continuas en algún punto, sin ser derivables en ese punto (ya hemos visto tres, en los ejemplos anteriores).

**Función derivada**

Hasta ahora hemos hablado solamente de la derivada en un punto de una función dada (que es un número real, cuando existe, el cual depende de la función considerada y del punto elegido). La representamos por $f'(a)$, siendo $f$ la función y $a$ el punto.

Pero si en el cálculo de $f'(a)$ (mediante el límite del cociente incremental) no se especifica el punto, poniendo simplemente $x$ en lugar de $a$ (aunque supondremos que ese $x$ es algún punto interior del dominio de $f$), se obtiene una nueva función de $x$ llamada "función derivada de $f(x)$" y representada por $f'(x)$.

Entonces, la función $f'(x)$ tendrá como dominio aquellos puntos interiores del dominio de $f(x)$ donde ésta sea derivable. De modo que si $x = a$ es uno de ellos, la función derivada $f'(x)$ dará directamente el valor $f'(a)$, (sin necesidad de calcular el límite del cociente incremental de $f(x)$ en ese punto $a$, sino solamente sustituyendo el valor $a$ en lugar de $x$ en la expresión de $f'(x)$, pues ésta ya representa el límite del cociente incremental en $x$).

Nota: La variable dependiente de la función $f'(x)$ se representa por $y'$, con lo cual se escribe $y' = f'(x)$.

Ejemplo 1: Para la función $y = x^3$, de dominio $\mathbb{R}$, podemos escribir el cociente incremental en un punto cualquiera así:

$$c(x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

y después de sacar $h$ factor común en el numerador y simplificar (porque es $h \neq 0$), queda:

$$c(x,h) = 3x^2 + 3xh + h^2 .$$

Entonces, el límite de este cociente incremental, cuando $h \to 0$, resulta $3x^2$, luego podemos escribir $\boxed{f'(x) = 3x^2}$, o bien $\boxed{y' = 3x^2}$ , para todo $x$ real.

En el ejemplo 1 de la pág. 3 hicimos este mismo cálculo poniendo el número 2 en lugar de $x$ (porque queríamos la derivada en el punto $x = 2$). Pero ahora lo hemos hecho sin especificar el valor de $x$, con lo cual tendremos $f'(x)$ en vez de $f'(2)$, para todo $x$ real. De modo que el valor de la derivada en el punto $x = 2$ se puede obtener directamente, sustituyendo en $f'(x) = 3x^2$ la variable $x$ por 2, para obtener $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

La ventaja de tener la función derivada $f'(x)$ es que conocemos fácilmente el valor de la derivada de $f(x)$ en cualquier punto donde exista, sin necesidad de tener que calcularla por límite del correspondiente cociente incremental.

Además, viendo la expresión de la función derivada, se sabrá dónde es derivable la función $f(x)$: Lo será en todos aquellos puntos interiores de su dominio donde exista valor numérico (real) para la expresión de $f'(x)$.

Así, para la función $y = x^3$ de dominio $\mathbb{R}$ (donde todos sus puntos son interiores), hemos obtenido antes $y' = 3x^2$, función que existe (o sea, tiene valor numérico) para todo $x$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, aquí el dominio de la función derivada coincide con el dominio de la función dada.

Pero no siempre es así. En efecto, si consideramos la restricción de la función anterior al intervalo $[-1\ ,\ 1]$, obtendremos $y' = 3x^2$ para todo $x$ del intervalo $(-1\ ,\ 1)$ (formado por los puntos interiores del dominio anterior). Con lo cual, en este caso el dominio de la derivada es menor que el dominio de la función dada.

Ejemplo 2: Para la función $y = \sqrt[3]{x}$, de dominio $\mathbb{R}$, podemos escribir el cociente incremental en un punto cualquiera así:

$$c(x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\cdot\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

(hemos multiplicado numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador) y efectuando operaciones en el numerador queda solamente $h$ (comprobarlo; pero siempre se tendrá $\left(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A \cdot B} + \sqrt[3]{B^2}\right) = A - B$). Por lo tanto, después de simplificar $h$ (ya que $h \neq 0$), podemos escribir:

$$c(x,h) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

Con lo cual, el límite de este cociente incremental cuando $h \to 0$ nos da $\boxed{f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}$ .

Entonces vemos que la derivada existe cuando $x$ es diferente de cero y no existe en el punto $x = 0$ (esto último ya lo sabíamos, pues hicimos el cálculo específico para $x = 0$ en la página 3). Otra vez el dominio de la función derivada, que es $\mathbb{R} - \{0\}$, es menor que el dominio de la función.

Ejemplo 3: Se demuestra que la derivada de la función $y = ln\, x$ es $y' = 1/x$ en todo el dominio de la función logarítmica, que es $(0 , +\infty)$, luego aquí coinciden nuevamente el dominio de la función y el de su derivada.
Sin embargo, la función $1/x$ existe en $\mathbb{R} - \{0\}$, con lo cual parece que el dominio de la derivada es mayor que el dominio de la función (¡grave error!). Lo que ocurre es que la función $1/x$ solamente puede llamarse "derivada de la función $ln\, x$" en el dominio de $ln\, x$ que es $(0 , +\infty)$ y no en el intervalo $(-\infty , 0)$, donde $1/x$ existe como función, pero no puede considerarse la derivada de $ln\, x$, pues esta última función ni siquiera existe en ese intervalo.

---

VEMOS ENTONCES LA IMPORTANCIA DE SABER HALLAR EN LA PRÁCTICA LAS "FUNCIONES DERIVADAS" DE TODAS LAS FUNCIONES CON LAS QUE TRABAJEMOS.

ELLO IMPLICA CONOCER LAS "FUNCIONES DERIVADAS" DE TODAS LAS FUNCIONES BÁSICAS Y SABER APLICAR CON SOLTURA LAS REGLAS PARA OBTENER A SU VEZ LAS DERIVADAS DE SUMAS, DIFERENCIAS, PRODUCTOS, COCIENTES Y COMPUESTAS DE FUNCIONES.

**Derivadas de las funciones básicas**

Se demuestran matemáticamente todas las derivadas de las funciones básicas, las cuales damos a continuación:

$y = k$ ($k$ real fijo) $\Rightarrow$ $y' = 0$ , en todo $\mathbb{R}$

$y = x$ $\Rightarrow$ $y' = 1$ , en todo $\mathbb{R}$

$y = x^n$ ($n$ entero positivo mayor que 1) $\Rightarrow$ $y' = n \cdot x^{n-1}$ , en todo $\mathbb{R}$

$y = \sqrt[n]{x}$ ($n$ entero positivo par) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ , en el intervalo $(0 , +\infty)$

$y = \sqrt[n]{x}$ ($n$ entero positivo impar mayor que 1) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ , en $\mathbb{R} - \{0\}$

$y = a^x$ ($a$ positivo distinto de 1) $\Rightarrow$ $y' = a^x \cdot ln\, a$ , en todo $\mathbb{R}$
(con lo cual la derivada de $y = e^x$ será $y' = e^x$)

$y = log_a\, x$ ($a$ positivo distinto de 1) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{x} \cdot log_a\, e$ , en el intervalo $(0 , +\infty)$
(con lo cual la derivada de $y = ln\, x$ será $y' = 1/x$)

$y = sen\, x$ ($x$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = cos\, x$ , en todo $\mathbb{R}$

$y = cos\, x$ ($x$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = -\, sen\, x$ , en todo $\mathbb{R}$

$y = tan\, x$ ($x$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{cos^2\, x} = 1 + tan^2\, x$ , para todo $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

$y = arc\ senx$ ($y$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , en el intervalo (-1 , 1)

$y = arc\cos x$ ($y$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , en el intervalo (-1 , 1)

$y = arc\tan x$ ($y$ en radianes) $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{x^2+1}$ , en todo $\mathbb{R}$

**Derivadas de sumas, diferencias, productos y cocientes**

Se demuestran igualmente las conocidas reglas para obtener las derivadas de funciones que sean sumas, diferencias, productos o cocientes de otras funciones:

$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$ $\qquad$ $y = u - v \Rightarrow y' = u' - v'$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\qquad$ $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

(aquí suponemos que $u$ y $v$ son funciones de una sola variable independiente común)

**Derivada de una función compuesta**

Se demuestra también que para obtener la derivada de una función compuesta, se aplica la conocida Regla de la Cadena:

$$\boxed{y = f[g(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)}$$

En forma práctica: Se deriva inicialmente la "función externa", que es $f(x)$, sustituyendo en su derivada $f'(x)$ la "función interna" $g(x)$. Así obtenemos la compuesta $f'[g(x)]$. Finalmente, se multiplica esta función por la derivada de la "función interna".

Ejemplo: La derivada de $y = cos^3 x = (\cos x)^3$ es

$$\boxed{y' = 3 \cdot cos^2 x \cdot (-\,sen\,x) = -3\,cos^2 x \cdot\ sen\,x}$$

pues la función dada es la compuesta de $\cos x$ con $x^3$ , luego la "función externa" (que es la última en actuar en la composición) es $x^3$ y su derivada es $3x^2$. Entonces sustituimos en esta derivada "la función interna" (que es $\cos x$), obteniendo la nueva función compuesta $3 \cdot cos^2 x$ . Finalmente se ha multiplicado esta última función por la derivada de la "función interna", que es $-\,sen\,x$.

**Derivadas de las funciones elementales**

Puesto que cualquier "función elemental" viene definida explícitamente por una sola expresión, la cual es el resultado de operar con funciones básicas, puede hallarse su función derivada aplicando directamente lo dado en los tres apartados anteriores.

Ejemplo: Para la función elemental definida como $f(x) = \frac{sen^2(3x-1) - log(x^2+4)}{\sqrt{5x+2} \cdot 3^{5-x}}$, donde hay que interpretar $log(x^2+4)$ como $log_{10}(x^2+4)$ y cuyo dominio es el intervalo (-2/5 , +∞) (ver Nota a continuación), se tiene:

$$f'(x) = \frac{\left[6 \cdot sen(3x-1) \cdot cos(3x-1) - \frac{2x}{x^2+4} \cdot log\,e\right] \cdot \sqrt{5x+2} \cdot 3^{5-x}}{(5x+2) \cdot 3^{10-2x}} -$$

$$-\frac{[sen^2(3x-1)-log(x^2+4)]\cdot\left[\frac{5}{2\cdot\sqrt{5x+2}}\cdot 3^{5-x}-\sqrt{5x+2}\cdot 3^{5-x}\cdot ln3\right]}{(5x+2)\cdot 3^{10-2x}}$$

definida también es el intervalo (-2/5 , +∞). Por tanto, diremos que en este caso la función dada es derivable en todo su dominio (lo cual no siempre ocurre como sabemos).

Nota: Vemos que en $f(x)$ las funciones compuestas $sen^2(3x-1)$, $log(x^2+4)$ y $3^{5-x}$ tienen dominio ℝ (pues $x^2+4$ es siempre positiva) y la función compuesta $\sqrt{5x+2}$ tiene dominio $[-2/5\,,+\infty)$; por tanto, este último dominio es la intersección de los cuatro. Por otro lado, el denominador de $f(x)$ se hace cero solamente en el punto $x=-2/5$, con lo cual el dominio de esta función $f(x)$ es el intervalo $(-2/5\,,+\infty)$, cuyos puntos son todos interiores.
Y vemos que en ese mismo intervalo existen los valores de la función $f'(x)$ que hemos obtenido aplicando las reglas de derivación, ya que en su expresión intervienen las mismas funciones que aparecían en $f(x)$ y algunas nuevas como $sen(3x-1)$, $cos(3x-1)$, $2x$, $(x^2+4)$ y $(5x+2)$, las cuales siempre están definidas, ocurriendo además que los nuevos denominadores obtenidos son $(x^2+4)$, $(5x+2)$ y $3^{10-2x}$, los cuales permanecen diferentes de cero en $(-2/5\,,+\infty)$.

En general, para saber dónde es derivable una función elemental $f(x)$ cualquiera, tenemos que:

1) Obtener su dominio A, que debe ser un intervalo o una unión de intervalos sin puntos comunes (Ver Sección 2.1).
2) Eliminar los extremos de los intervalos que definen A, con lo cual tendremos un conjunto B formado por los puntos interiores del dominio de $f$.
3) Hallar la expresión de la función derivada $f'(x)$, mediante el uso de las derivadas de las funciones básicas que intervengan en la expresión de $f(x)$, así como aplicando las reglas para derivar funciones que sean sumas, diferencias, productos, cocientes o compuestas (las operaciones que intervengan en dicha expresión).
4) Eliminar los puntos de B donde no estén definidas las nuevas funciones que hayan aparecido en la expresión de $f'(x)$ y eliminar también los puntos donde se hagan cero los nuevos denominadores que se hayan obtenido en dicha expresión. Con lo cual queda un conjunto final D (contenido o igual a B, el cual era a su vez contenido o igual a A).

El conjunto D así obtenido, formado por los puntos interiores del dominio de $f(x)$ donde la expresión de $f'(x)$ tenga valores numéricos (reales), es el conjunto donde $f(x)$ es derivable (se le llama muchas veces "dominio de derivabilidad de $f$").

**Derivadas de funciones definidas a trozos**

Como sabemos, las funciones "definidas a trozos" son también funciones dadas explícitamente, pero utilizan más de una expresión para dar todos sus valores (en algunos casos utilizan una sola expresión para dar la mayoría de sus valores, pero la misma va acompañada de uno o varios valores dados aparte).

Para estudiar la derivabilidad de las funciones definidas a trozos es muy útil el siguiente resultado teórico:

TEOREMA: Supongamos que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x=a$ (el cual es interior de su dominio). Supongamos también que su función derivada $f'(x)$ exista a la derecha del punto $a$, en algún intervalo de la forma $(a\,,\ a+\delta_1)$, y que $f'(x)$ también exista a la izquierda del mismo punto $a$, en algún intervalo de la forma $(a-\delta_2\,,\ a)$. Y, finalmente, supongamos que existan ambos límites laterales de $f'(x)$ en el punto $x=a$ (cada uno puede dar un número real, dar $+\infty$ o dar $-\infty$). Entonces

a) Si los dos límites laterales de $f'(x)$ en el punto $x = a$ dan el mismo número real $L$, **la función $f(x)$ es derivable en dicho punto, siendo $f'(a) = L$**.
b) En cualquier otro caso, **la función $f(x)$ no es derivable en el punto $x = a$**.

---

Nota: En el caso de que los límites laterales de $f'(x)$ en el punto $x = a$ sean finitos pero diferentes, **el punto $P(a, f(a))$ es "anguloso"**. Si uno de los límites laterales es finito y el otro es infinito, **también $P$ es punto "anguloso"**. Si ambos límites laterales son infinitos de signos contrarios, **el punto $P$ mencionado es "de retroceso"**. Y si los dos límites laterales de la derivada son infinitos del mismo signo, **el punto $P$ es "de tangente vertical"** (de ecuación $x = a$). (Ver todos estos casos en la pág. 4).

---

Ejemplo 1: Una función definida a trozos sencilla es:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & si\ -2 \le x \le 0 \\ 1 + sen\,x, & si\ 0 < x < \pi \\ ln(x - \pi + 1), & si\ \pi \le x \le 5 \end{cases} \qquad \text{(el dominio de } f(x) \text{ es } [-2, 5])$$

Queremos saber dónde es derivable esta función y además queremos conocer la función $f'(x)$.

Primero vemos que la función dada se apoya en tres funciones elementales restringidas: $e^x$ restringida al intervalo $[-2, 0]$; $1 + sen\,x$ restringida al intervalo $(0, \pi)$, y $ln(x - \pi + 1)$ restringida al intervalo $[\pi, 5]$.

Tenemos que la función básica $e^x$ tiene derivada $e^x$ en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$; luego su restricción al intervalo $[-2, 0]$ será derivable en $(-2, 0)$, siendo dicha derivada $e^x$ (la restricción tiene la misma derivada en los puntos interiores, pero no es derivable en los extremos del intervalo que le corresponde, por no ser puntos interiores de su dominio). Por tanto, ya podemos decir que $f(x)$ es derivable en el intervalo $(-2, 0)$ y que $f'(x) = e^x$ en dicho intervalo (puesto que $f(x)$ coincide en $[-2, 0]$ con la restricción de $e^x$).

Tenemos también que la función elemental $1 + sen\,x$ tiene derivada $cos\,x$ en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$; luego su restricción al intervalo $(0, \pi)$ será derivable también en ese mismo intervalo, siendo dicha derivada la misma. Por tanto, ya podemos decir también que $f(x)$ es derivable en el intervalo $(0, \pi)$ y que $f'(x) = cos\,x$ en dicho intervalo.

Tenemos finalmente que la función elemental $ln(x - \pi + 1)$ tiene derivada $\frac{1}{x-\pi+1}$ en todo su dominio, que es el intervalo $(\pi - 1, +\infty)$; luego su restricción al intervalo $(\pi, 5)$ será derivable también en este intervalo, pues está contenido en el anterior, siendo su derivada en todos sus puntos la misma. Por tanto, podemos decir también que $f(x)$ es derivable en el intervalo $(\pi, 5)$ y que $f'(x) = 1/(x - \pi + 1)$ en dicho intervalo.

Entonces ya sabemos que $f(x)$ es derivable, al menos, en $(-2, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 5)$, siendo:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & si\ -2 < x < 0 \\ cos\,x, & si\ 0 < x < \pi \\ 1/(x - \pi + 1), & si\ \pi < x < 5 \end{cases}$$

Falta saber si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y en el punto $x = \pi$, pues estos dos puntos son interiores del dominio de esta función, que era el intervalo $[-2, 5]$. (En los puntos $x = -2$ y $x = 5$ la función $f$ dada no es derivable, pues esos puntos no son interiores de su dominio).

Estudio de la derivabilidad en el punto $x = 0$:

Habrá que saber primero si la función es continua en ese punto. Como $f(0) = e^0 = 1$, el límite por la derecha de la función es $\lim_{x \to 0^+} (1 + sen\, x) = 1 + sen\, 0 = 1$ y el límite por la izquierda de la función es $\lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$, la función es continua en $x = 0$, y entonces podría ser derivable. Ahora hallamos los límites laterales de la función derivada en ese mismo punto. Se tiene que el límite por la derecha de la derivada es $\lim_{x \to 0^+} cos\, x = cos\, 0 = 1$ y el límite por la izquierda de la derivada es $\lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$. Como ambos dan el mismo número, concluimos que la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$, siendo además $f'(0) = 1$, en virtud del Teorema dado en la página anterior.

Estudio de la derivabilidad en el punto $x = \pi$:
Habrá que saber primero si la función es continua en ese punto. Como $f(\pi) = ln\, 1 = 0$, el límite por la derecha de la función es $\lim_{x \to \pi^+} ln(x - \pi + 1) = ln\, 1 = 0$ y el límite por la izquierda de la función es $\lim_{x \to \pi^-} (1 + sen\, x) = 1 + sen\, \pi = 1$, la función no es continua en $x = \pi$. Por tanto, la función no podrá ser derivable en dicho punto (relación entre continuidad y derivabilidad).

Conclusión: La función $f(x)$ dada es derivable en $(-2\,,5) - \{\pi\}$, teniendo $f'(x)$ la expresión dada anteriormente a trozos, pero incluyendo en la primera línea o en la segunda el punto $x = 0$ (por ejemplo, basta poner en la primera línea $-2 < x \leq 0$ en lugar de $-2 < x < 0$).

---

Ejemplo 2: Veamos la derivada de la función $f(x) = ln|x|$ (que se usará mucho para resolver integrales).

Podemos definir a trozos esta función sin utilizar el valor absoluto, obteniéndose:

$$f(x) = \begin{cases} ln\, x\,, & si\ \ x > 0 \\ ln(-x)\,, & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, $f'(x)$ coincidirá en el intervalo $(0\,,+\infty)$ con la derivada de $ln\, x$ , que es $1/x$ . Y $f'(x)$ coincidirá en el intervalo $(-\infty\,,0)$ con la derivada de $ln(-x)$ , que es función compuesta y debemos aplicarle la Regla de la Cadena: Por tanto, es $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = 1/x$ en $(-\infty\,,0)$.
Conclusión: Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es $f'(x) = 1/x$ .

---

Ejemplo 3: Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\, x}{x}\,, & si\, x \neq 0 \\ 1\,, & si\, x = 0 \end{cases}$ , cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.
La función $g(x) = \frac{sen\, x}{x}$, por ser función elemental, es continua en su dominio, que es $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty\,,0) \cup (0\,,+\infty)$. Y todos los puntos de su dominio son interiores (pues los intervalos no incluyen sus extremos), luego $g(x)$ podría ser derivable en todo su dominio. Tenemos ahora que $\boxed{g'(x) = \frac{x \cdot cos\, x - sen\, x}{x^2}}$ , expresión que tiene valores numéricos (o está definida) en todo el dominio de $g$; por tanto, $g(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es la anterior.
Ahora, como $f(x)$ coincide con $g(x)$ en $\mathbb{R} - \{0\}$, podemos decir lo mismo de $f(x)$, siendo $\boxed{f'(x) = g'(x)}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$.
Falta saber qué le ocurre a $f(x)$ en el punto $x = 0$ (que es punto interior de su dominio), pero donde su valor viene dado aparte. Primero veremos si es continua: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ y $f(0) = 1$, luego $f$ es continua en $x = 0$ (el límite anterior es una indeterminación del tipo $0/0$ y se resuelve por la Regla de L'Hôpital, que se verá en la Sección 3.3, pero que muchos alumnos de Bachillerato conocen). Entonces, podemos pensar que la función dada $f(x)$ sea quizás derivable también en $x = 0$, para lo cual falta conocer los límites laterales de $f'(x)$ en ese punto. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cdot \operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

donde hemos aplicado otra vez la Regla de L'Hôpital, por tratarse de otro límite indeterminado del tipo $0/0$. Entonces, si el límite ordinario en $x = 0$ es cero, ambos límites laterales de la derivada en el punto $x = 0$ serán cero. Con lo cual, por el Teorema dado anteriormente, concluimos que $\boxed{f'(0) = 0}$ .

En resumen:
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\ , & si\ x \neq 0 \\ 0\ , & si\ x = 0 \end{cases}$$

---

De un modo análogo puede hacerse el estudio de la derivabilidad de otras funciones definidas a trozos.

**Derivadas de funciones implícitas**

Hay muchas funciones que vienen dadas por ecuaciones del tipo $E(x, y) = 0$, donde el primer miembro es una cierta expresión que combina ambas variables ($x$ independiente e $y$ dependiente), no pudiéndose despejar la variable dependiente $y$ de la ecuación dada. En estos casos, a cualquier función definida de este modo se le llama "función implícita". (Ver Sección 2.1).

Por ejemplo, se sabe que la ecuación $y^3 + 3xy + 4x^2 = 0$ "define implícitamente" a una función $f$ en un cierto intervalo de la forma $(1-\delta\,, 1+\delta)$, de forma que $f(1) = -1$ (obsérvese que el punto $(1\,, -1)$ de su gráfica es una de las soluciones de la ecuación dada). Y como la anterior ecuación no permite despejar la variable dependiente $y$, esa función $f$ es una "función implícita". (Hay un teorema que veremos en la Sección 6.6 que nos garantiza lo dicho y agrega que la función $f$ es derivable en el intervalo $(1-\delta\,, 1+\delta)$).

---

Nota 1: Igualmente, una ecuación del tipo $E(x, y) = 0$ puede definir a la variable $x$ como función de la variable $y$, donde los papales de "variable independiente" y "variable dependiente" estarían invertidos. Y, en ese caso, si la variable $x$ no puede despejarse, la función $x = f(y)$ que quede definida por la ecuación anterior será otra "función implícita".

---

Hay otros casos en que una ecuación del tipo $E(x, y) = 0$, permite despejar la variable dependiente $y$, dando una o varias expresiones explícitas de la forma $y = E_i(x)$ ($i$ =1, 2, 3,…), siendo $E_i(x)$ siempre la expresión resultante de operar con varias funciones básicas. Entonces, diremos que $E(x, y) = 0$ "define implícitamente" a una o a varias "funciones elementales", las cuales vendrían dadas explícitamente por las expresiones $y = E_i(x)$.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ "define implícitamente" a dos "funciones elementales", que son $y = +\sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ (expresiones resultantes de despejar la variable dependiente $y$ en la ecuación dada).

---

Nota 2: En muchas ocasiones, la ecuación que "define implícitamente" a $y$ como función de $x$ es de la forma $E_1(x, y) = E_2(x, y)$, donde ambos miembros son expresiones que en general combinan las dos variables (al menos una de las expresiones las tiene que combinar). Pero una ecuación como la anterior puede escribirse $E_1(x, y) - E_2(x, y) = 0$, con lo cual ya la tendremos en la forma $E(x, y) = 0$.

---

Nota 3: No siempre una ecuación del tipo $E(x, y) = 0$ "define implícitamente" alguna función real de variable real, en la que $x$ sea la variable independiente e $y$ sea la variable dependiente. Y a veces, la misma ecuación dada "define implícitamente" varias funciones (siempre nos referimos a "funciones reales de una variable real $y = f(x)$"). Desde luego, si existe alguna función $y = f(x)$ "definida implícitamente" por $E(x, y) = 0$, cualquier punto de su gráfica deberá verificar la ecuación dada, luego una condición mínima para la existencia de $y = f(x)$ es que la ecuación $E(x, y) = 0$ sea verificada por puntos de coordenadas reales (queremos que la gráfica incluya más de un punto, para que la función sea útil).

Por ejemplo, la ecuación $x^2y^6 + y^2 + 1 = 0$ no "define implícitamente" alguna función real de variable real, pues no puede ser verificada por ningún punto de coordenadas reales; en efecto, si consideramos un punto $(a\,, b)$, tendría que cumplirse $a^2b^6 + b^2 = -1$ (lo cual es imposible, pues todos los exponentes de las potencias son pares).

En cambio, la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ "define implícitamente" alguna función real de variable real, pues los infinitos puntos de la circunferencia de centro el origen y radio 2 cumplen la ecuación anterior (en este caso, como sabemos, las funciones definidas son dos "funciones analíticas", pero en otros casos podría quedar definida alguna función "verdaderamente implícita" por la ecuación dada).

---

Nota 4: Cuando la ecuación $E(x, y) = 0$ defina implícitamente varias funciones reales de una variable real, todas las gráficas de esas funciones cumplirán la ecuación dada y la unión de todas ellas formarán una curva más o menos complicada del plano (cuya ecuación es precisamente $E(x, y) = 0$). Entonces, dado uno de los puntos que cumplan la ecuación puede suceder que pertenezca a la gráfica de una sola de las funciones definidas (descartando restricciones de las misma) o puede que sea punto común de las gráficas de dos de las funciones definidas.

Por ejemplo, consideremos nuevamente la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$, verificada por todos los puntos del plano que están en la circunferencia de centro el origen y radio 2. Como hemos visto, la ecuación anterior "define implícitamente" a las dos funciones elementales, $y = +\sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Dado ahora el punto $\left(-\sqrt{2}\,, \sqrt{2}\right)$ de la circunferencia, dicho punto está solamente en la gráfica de la primera función, que es la mitad superior de esa circunferencia (nótese que el punto tiene ordenada positiva). Pero si damos el punto $\left(1\,, -\sqrt{3}\right)$ de la circunferencia, ese punto está solamente en la gráfica de la segunda función, que es la mitad inferior de la misma circunferencia (el punto tiene ordenada negativa). Pero si damos el punto $(-2\,, 0)$ o el punto $(2\,, 0)$ (cortes de la circunferencia con el eje OX), estos puntos son comunes a las dos gráficas anteriores. Obsérvese finalmente que la unión de las gráficas de las dos funciones definidas por la ecuación inicial (mitades superior e inferior de la circunferencia) es toda la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$. (Y esto también ocurre cuando las funciones definidas son "implícitas", por no poderse despejar la variable dependiente $y$).

En otros casos más complicados, la ecuación $E(x, y) = 0$ puede corresponder a una cierta curva del plano, de modo que diferentes rectas verticales corten en varios puntos a dicha curva, lo cual demostraría que la curva contiene las gráficas de varias funciones, la unión de las cuales sería toda la curva (en el caso de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$, las rectas verticales de ecuaciones $x = a$, con $a$ en el intervalo $(-2\,, 2)$, cortan dos veces a la curva, lo cual indica la presencia de las gráficas de dos funciones, que son las "definidas implícitamente" por la ecuación anterior).

---

Nota 5: Como ya dijimos al comienzo de este apartado, hay un importante teorema (considerado en la Sección 6.6 de esta página web) que da unas condiciones que garantizan la existencia de una función $f$, "definida implícitamente" por una ecuación de la forma $E(x, y) = 0$, cuya gráfica incluya a un cierto punto $(a\,, b)$ dado (el cual tiene que cumplir la ecuación dada), asegurando además la derivabilidad de $f$ en un cierto intervalo de la forma $(a-\delta\,,a+\delta)$ y dando una expresión de la derivada $f'$.

En el ejemplo anterior, la ecuación $x^2+y^2-4=0$ y el punto $\left(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\right)$ cumplen esas condiciones del teorema mencionado (como se verá), por lo cual dicho teorema nos asegura que existe una función $f$ "definida implícitamente" por esa ecuación, cuya gráfica incluye al punto dado, siendo esa función derivable en un cierto intervalo $(-\sqrt{2}-\delta\,,-\sqrt{2}+\delta)$. Y sabemos que esto es cierto, pues en este caso tenemos definición explícita de dicha función $f$, que es $y=\sqrt{4-x^2}$, de la cual se obtiene $y'=-x/\sqrt{4-x^2}$, definida en el intervalo $(-2\,,2)$ (el cual incluye muchos intervalos de la forma $\left(-\sqrt{2}-\delta\,,-\sqrt{2}+\delta\right)$, pues $-\sqrt{2}$ es uno de sus puntos interiores).

Pero en otros casos no podrá despejarse la variable dependiente de la ecuación dada y sólo podremos hallar la derivada de la función "implícita" $f$ por aplicación del mencionado teorema de la Sección 6.6 o bien **por el procedimiento que vamos a explicar a continuación**.

---

Lo primero que podemos decir de la derivada de una función "implícita" $y=f(x)$ (definida por una ecuación $E(x,y)=0$), es que, al no existir una forma explícita de esa función, parece que no podría hallarse su derivada. Pero esto es falso.

Como veremos a continuación, puede obtenerse $y'$ logrando en cualquier caso una forma explícita de esta derivada, la cual quedará expresada a través de ambas variables $x$ e $y$ (pero $y$ depende de $x$, con lo cual $y'$ dependerá solamente de $x$ a través de $y$; pero como no es posible expresar explícitamente $y$ en función de $x$, tampoco existirá versión explícita de $y'$ en función solamente de $x$). Así la derivada quedará despejada como $\boxed{y'=A(x,y)/B(x,y)}$ , siendo numerador y denominador nuevas expresiones que, en general, combinan las dos variables; de forma que si nos dan un punto $P(a\,,b)$ que cumpla la ecuación $E(x,y)=0$, la derivada en dicho punto será

$$\boxed{y'(P)=A(a,b)/B(a,b)}\ \text{, siempre que } B(a,b)\neq 0.$$

(cuando ocurra que $B(a,b)=0$, la función $f$ no será derivable en el punto $P$ dado).

**¿Cómo se obtiene en la práctica la expresión anterior de $y'$?** Pues muy fácil: Derivando los dos miembros de la ecuación $E(x,y)=0$, o bien los de la ecuación $E_1(x,y)=E_2(x,y)$, e igualando resultados, de modo que donde aparezca la variable $y$ debemos considerar que está la función implícita $f(x)$ (ya que ésta debe cumplir la ecuación que la define), luego escribiremos $y'$ si $f(x)$ aparece sola (o bien sumando, restando, multiplicando o dividiendo) en algún término de cada miembro de la ecuación, o bien aplicaremos la Regla de la Cadena si $f(x)$ aparece compuesta con otra función en algún término. Así, normalmente aparecerá $y'$ varias veces al derivar cada miembro de la ecuación, resultando (al igualar esas derivadas) una nueva ecuación con las variables $x$, $y$ e $y'$. Sin embargo, dicha ecuación será siempre (como veremos) de primer grado en $y'$, con lo cual se podrá despejar esa variable en función de $x$ e $y$.

Lo bueno es que este procedimiento se puede aplicar a toda función que venga "definida implícitamente" a través de $E(x,y)=0$ o bien $E_1(x,y)=E_2(x,y)$, tanto si la función es "elemental" (porque $y$ sea despejable) como si la función es "implícita" (porque no se puede despejar $y$). Así, aplicando el procedimiento del párrafo anterior a $x^2+y^2=4$ resultará $2x+2yy'=0$ de donde se obtiene $\boxed{y'=-x/y}$ . Entonces para el punto $P\left(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\right)$ resulta $y'(P)=1$. Y si utilizamos la definición explícita de la función $f$ correspondiente a ese punto, la cual es $y=\sqrt{4-x^2}$, resulta $y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, obteniéndose $y'(P)=f'\left(-\sqrt{2}\right)=1$. (Obsérvese que $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{y}$ ).

---

Ejemplo más complicado con una función "verdaderamente implícita":

Se sabe, que la ecuación $\boxed{x^2y^3 - \frac{2x}{y} + arc\,tan(xy) = 1 - \frac{\pi}{4}}$ , "define implícitamente" alguna función $f$, en cuya gráfica está el punto $P(1, -1)$. En efecto, se comprueba inmediatamente que el punto $P$ cumple la ecuación dada (lo cual nos está diciendo que la imagen por la función $f$ del valor $x = 1$ es el valor $y = -1$). Pero no podemos despejar la variable dependiente en la ecuación dada (puesto que dicha variable aparece tres veces en la ecuación, una vez elevada al cubo y multiplicando a $x^2$, otra vez dividiendo a $2x$ y la tercera vez multiplicando a $x$ y ese producto compuesto con la función arco tangente). Por tanto, **en este caso la función $f(x)$ definida por la ecuación dada y el punto dado no es una función elemental, sino es una función verdaderamente implícita**. Y se tendrá que dicha función implícita tiene que cumplir la ecuación que la define, o sea que será

$$x^2 \cdot [f(x)]^3 - \frac{2x}{f(x)} + arc\,sen[x \cdot f(x)] \equiv 1 - \frac{\pi}{4}$$

para todo $x$ del dominio de $f$ (esto es siempre así: si la ecuación dada define a la función, ésta tiene que cumplir dicha ecuación).

Entonces, para hallar la derivada $y'$, derivamos en primer lugar ambos miembros de la ecuación dada e igualamos los resultados, teniendo en cuenta que donde aparezca la variable $y$ debemos pensar que está $f(x)$. (En efecto, si los dos miembros de la identidad anterior son funciones que coinciden, sus derivadas también tendrán que coincidir).

Se tiene:

a) El término $x^2y^3$ del primer miembro de la ecuación dada hay que interpretarlo como la función $u = x^2 \cdot [f(x)]^3$, con lo cual su derivada será $u' = 2x \cdot [f(x)]^3 + x^2 \cdot 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot f'(x)$ ; o bien, escrito todo más brevemente, $\boxed{u' = 2xy^3 + 3x^2y^2 \cdot y'}$ (en efecto, la función implícita $f(x)$ aparece compuesta con la función $x^3$, luego hemos aplicado la Regla de la Cadena y por eso la derivada de $y^3$ es $3y^2y'$). Si en otro caso, por ejemplo, hubiese aparecido $sen\,y$ la derivada sería $(cos\,y) \cdot y'$ ; si hubiese aparecido $ln\,y$ la derivada sería $(1/y) \cdot y'$ ; etc…

b) El término $-\frac{2x}{y}$ del primer miembro de la ecuación dada hay que interpretarlo como la función $v = -\frac{2x}{f(x)}$, con lo cual su derivada será $v' = -\frac{2 \cdot f(x) - 2x \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$ ; o bien, escrito todo más brevemente, $v' = -\frac{2y - 2xy'}{y^2}$ que también es $\boxed{v' = \frac{2xy' - 2y}{y^2}}$ (aquí no hemos aplicado la Regla de la Cadena, pues $f(x)$ no aparece compuesta con otra función).

c) El término $arc\,tan(xy)$ del primer miembro de la ecuación dada hay que interpretarlo como la función $w = arc\,tan[\,x \cdot f(x)]$ , con lo cual será $w' = \frac{1}{1+[x \cdot f(x)]^2} \cdot [1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)]$ ; o bien, escrito todo más brevemente, $\boxed{w' = \frac{y + xy'}{1 + x^2y^2}}$ (otra vez hemos aplicado la regla de la Cadena, pues $f(x)$ aparece multiplicada por $x$ y este producto está compuesto con la función $arc\,tan\,x$).

d) Y la derivada del segundo miembro de la ecuación dada es cero (derivada de una constante).

Por tanto, el resultado de haber derivado miembro a miembro la ecuación dada es:

$$u' + v' + w' = 0 \;\text{, o sea}\; \boxed{2xy^3 + 3x^2y^2y' + \frac{2xy' - 2y}{y^2} + \frac{y + xy'}{1 + x^2y^2} = 0}$$

Ahora falta despejar $y'$: Para lo cual descomponemos cada fracción en dos (de modo que en una quedará $y'$ y en la otra no), luego pasamos todos los términos que no lleven $y'$ al segundo miembro y sacamos $y'$ factor común en el primer miembro. Así queda:

$$y' \cdot \left(3x^2y^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}\right) = -2xy^3 + \frac{2}{y} - \frac{y}{1+x^2y^2}$$

de donde

$\boxed{y' = \dfrac{-2xy^3 + \frac{2}{y} - \frac{y}{1+x^2y^2}}{3x^2y^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}}}$ (este numerador es $A(x,y)$ y este denominador es $B(x.y)$)

Entonces, la derivada en el punto $P(1,-1)$ será el valor de la expresión anterior cuando sustituyamos $x$ por 1 e $y$ por $-1$:

$$\boxed{y'(1,-1) = \frac{2-2+\frac{1}{2}}{3+2+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{1}{11}}$$

(si el denominador diese cero, la derivada en el punto $(1\,,-1)$ no existiría).

Así, por ejemplo, la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $P$ será $y+1 = \frac{1}{11}(x-1)$ y la ecuación de la recta normal a la gráfica en ese mismo punto será $y+1 = -11(x-1)$.

**Notación de la derivada como cociente de diferenciales**

Si la función $y = f(x)$ es derivable en un punto $x = a$ (interior de su dominio), se puede definir otra función, llamada "diferencial de $f$ en el punto $a$": $\boxed{df(a) = f'(a) \cdot h}$
De modo que esta función es de primer grado en la variable $h$ (es de la forma $k \cdot h$), pudiendo tomar la nueva variable independiente $h$ cualquier valor real y siendo la constante $k$ es el valor de la derivada de $f$ en $x = a$.

Ejemplo: Para la función $y = x^3$, derivable en el punto $x = -1$, la diferencial en dicho punto será $df(-1) = f'(-1) \cdot h = 3h$, ya que $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$. La diferencial en el punto $x = 5$ será $df(5) = 75h$. Y la diferencial en el punto $x = 0$ es $df(0) = 0h = 0$.

---

Cuando no se especifica el punto $x = a$, se escribe simplemente: $\boxed{df = f'(x) \cdot h}$ . O más brevemente, si es $y = f(x)$ , podemos escribir $\boxed{dy = y' \cdot h}$ . Así, para la función $y = x^3$, tendríamos la expresión $\boxed{dy = 3x^2 \cdot h}$ .

Pero si le aplicamos lo anterior a la función $y = x$ (la llamada "función identidad"), resulta $dy = h$ (porque $y' = 1$). Ahora bien, como en este caso es $y = x$, se escribe también $\boxed{dx = h}$ .

Entonces, en la práctica (y por convenio), se pone siempre $dx$ en lugar de $h$ en cualquier diferencial, entendiendo que $dx$ se refiere a la diferencial de la función $y = x$, la cual es $h$. Por tanto, para una función cualquiera $y = f(x)$ que sea derivable, se usa la expresión:

$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$ (donde $dy$ es lo mismo que $df$ y $dx$ es lo mismo que $h$)

De la anterior expresión de la diferencial, resulta a su vez la conocida expresión de la derivada como un cociente de diferenciales (la expresión más usada en Ciencias e Ingenierías):

$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$ ( $\frac{dy}{dx}$ es la "notación de Leibniz" de la derivada)

Nota 1: Gottfried Leibniz fue un gran matemático y filósofo alemán, contemporáneo en el siglo XVII del físico y matemático inglés Isaac Newton (se les considera a ambos los fundadores del Cálculo Diferencial e Integral).

Nota 2: Cuando una función de una variable sea "derivable en un punto" se dice también que es "diferenciable en ese punto", pues existe su correspondiente diferencial.
Por ello, la parte de las Matemáticas en que se estudian las derivadas se llama "Cálculo diferencial" y las ecuaciones donde intervienen derivadas se llaman "ecuaciones diferenciales".

Nota 3: Inversamente, si una función es "diferenciable en un punto", también será "derivable en dicho punto". Pero adelantemos que esto, para funciones reales de varias variables reales, no es así: "Derivable no implica siempre diferenciable", aunque "diferenciable siempre implica derivable". (Se verá en la Sección 6.3).

**Derivadas y diferenciales de órdenes superiores**

Hemos visto que la derivada de una función es otra función que posee la misma variable independiente. Pero esa función derivada puede ser nuevamente derivable, apareciendo la llamada "derivada segunda" de la función inicial. A su vez, esa derivada segunda puede ser nuevamente derivable, apareciendo la llamada "derivada tercera" de la función inicial. Etcétera…

La derivada segunda (o de orden 2) se representa por $\boxed{y'' = f''(x)}$ . La derivada tercera (o de orden 3) por $\boxed{y''' = f'''(x)}$ . Pero ya la derivada cuarta (o de orden 4) se escribe $\boxed{y^{(4} = f^{(4}(x)}$ . Y la derivada quinta (o de orden 5) se escribe $\boxed{y^{(5} = f^{(5}(x)}$ . Etc… Todas se llaman "derivadas de órdenes superiores" de la función inicial.

Obsérvese que, cuando usamos las notaciones anteriores, al orden de la derivada, escrito en la forma común (con numeración arábiga), hay que anteponerle un paréntesis para que no se confunda con un exponente; así $y^{(8}$ significa "derivada octava de $y$" e $y^8$ significa "potencia de base $y$ con exponente 8". (A veces se usa la numeración latina para el orden de las derivadas desde la cuarta en adelante, con lo cual no hay confusión con los exponentes: Se escribe $y^{(4} = y^{iv}$, $y^{(5} = y^{v}$, $y^{(6} = y^{vi}$, $y^{(7} = y^{vii}$, etc…).

Pero también pueden escribirse las "derivadas de órdenes superiores" usando las siguientes notaciones de Leibniz:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = y''} \qquad \boxed{\frac{d^3y}{dx^3} = y'''} \qquad \boxed{\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4}} \qquad \boxed{\frac{d^5y}{dx^5} = y^{(5}} \qquad \text{etc…}$$

(de hecho, en los libros de Ciencias y de Ingenierías estas notaciones se usan mucho).

Pues bien, los numeradores de las anteriores expresiones se llaman "las diferenciales de órdenes superiores" de la función inicial. Entonces, si las despejamos resulta:

$$\boxed{d^2y = y'' \cdot dx^2 = y'' \cdot (dx)^2} \quad \text{(diferencial de orden 2 de la función)}$$

$$\boxed{d^3y = y''' \cdot dx^3 = y''' \cdot (dx)^3} \quad \text{(diferencial de orden 3 de la función)}$$

$$\boxed{d^4y = y^{(4} \cdot dx^4 = y^{(4} \cdot (dx)^4} \quad \text{(diferencial de orden 4 de la función)}$$

Etcétera… En general: $\boxed{d^ny = y^{(n} \cdot dx^n = y^{(n} \cdot (dx)^n}$ (diferencial de orden $n$ de la función)

**Aplicaciones principales de las derivadas**

Hay aplicaciones de las derivadas muy conocidas y sumamente importantes en Ciencias y en Ingenierías. Algunas aparecen en otras secciones de esta página web y las más básicas han sido vistas en las Matemáticas del Bachillerato. A saber:

# DERIVADAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1) Interpretación de las derivadas como "razones de cambio" o "velocidades de variación", que tienen aplicaciones en Física y en otras muchas disciplinas (tratado en la Sección 3.2).

2) Ecuaciones de las rectas tangente y recta normal a la gráfica de una función de una variable (tratadas en este documento), que tienen aplicaciones en Geometría y en Física.

3) Resolución de ciertos límites indeterminados por la Regla de L'Hôpital (Sección 3.3).

4) Estudio del crecimiento y decrecimiento de funciones de una variable (Secciones 3.2 y 3.5).

5) Determinación de máximos y mínimos de funciones de una variable (Sección 3.5).

6) Estudio de la concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de una función de una variable (Sección 3.5).

7) Resolución de problemas de optimización (Sección 3.6).

8) Obtención de desarrollos de Taylor y de Maclaurin (de enormes aplicaciones a su vez) para funciones de una variable que tengan derivadas sucesivas en un punto (Sección 3.7).

9) Método de Newton-Raphson para obtener solución aproximada de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ , en un cierto intervalo. (Sección 4.4).

10) Cálculo de integrales indefinidas (Sección 4.1) y de integrales definidas de funciones de una variable (Sección 4.2), con importantes aplicaciones a su vez (Sección 4.3).

11) Cálculo de derivadas parciales y derivadas direccionales, para las funciones reales de varias variables reales (Secciones 6.1 y 6.5).

12) Cálculo de integrales dobles (Sección 7.1) y de integrales triples (Sección 7.2).

13) Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (Secciones 7.3, 7.4 y 7.5).

**Teoremas importantes sobre funciones derivables**

Se les llama teoremas de los valores intermedios y tienen gran importancia teórica (y también práctica). Los tres principales son los siguientes:

TEOREMA DE ROLLE: Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a\,,b]$, la cual es derivable en todos los puntos interiores de dicho intervalo, siendo además $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto intermedio $c$ del intervalo donde se cumple $\boxed{f'(c) = 0}$ .

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL: Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a\,,b]$, la cual es derivable en todos los puntos interiores de dicho intervalo, existe al menos un punto intermedio $c$ del intervalo donde se cumple

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$$

Nota 1: Vemos que el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (también llamado **Teorema de Lagrange**). Pues si se cumple la condición

$f(a) = f(b)$ en este último, será $0 = f'(c) \cdot (b - a)$, y como $b - a \neq 0$ se tendrá $f'(c) = 0$. Sin embargo, en Análisis Matemático, primero se demuestra el T. de Rolle y luego se demuestra el T. de Lagrange.

Nota 2: Michel Rolle fue un matemático francés que vivió entre los siglos XVII y XVIII. Y Joseph Louis Lagrange fue un eminente matemático italiano que vivió en Italia, en Alemania y en Francia entre los siglos XVIII y XIX.

---

El último teorema que veremos es una generalización del anterior Teorema de Lagrange:

TEOREMA DE CAUCHY: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un intervalo $[a\,, b]$. Y supongamos además que ambas funciones sean derivables en todos los puntos interiores del citado intervalo, siendo $g'(x)$ sea diferente de cero en todos los puntos del intervalo $(a\,, b)$. Entonces existe al menos un punto intermedio $c$ del intervalo donde se cumple

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Nota 3: Si tomamos la función particular $g(x) = x$ se cumplen ya las tres condiciones pedidas a esa función en este Teorema (continuidad en $[a\,, b]$, derivabilidad en $(a\,, b)$ y derivada diferente de cero en ese intervalo). Y, entonces, si suponemos únicamente que la función $f(x)$ es continua en $[a\,, b]$ y derivable en $(a\,, b)$, existirá por este Teorema algún $c$ donde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ , con lo cual $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$, que es lo establecido por el Teorema de Lagrange.

Nota 4: Augustin Louis Cauchy fue uno de los más grandes matemáticos franceses del siglo XIX. El anterior Teorema es el fundamento teórico de la conocida Regla de L'Hôpital, utilizada para resolver límites indeterminados de los tipos $0/0$ e $\infty/\infty$ (ver Sección 3.3).

---