

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisitos: Funciones reales de una variable real. Potencias, raíces y logaritmos en $\mathbb{R}$)

Tipos de límites y notaciones

En lo que sigue consideraremos solamente funciones reales de una variable real que tengan como dominio un intervalo o una unión de intervalos sin puntos comunes, que son las más frecuentes.

Los límites de las funciones pueden ser de los siguientes tipos:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende **por la derecha** al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a , pero siendo solamente $x > a$; nunca $x = a$)

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende **por la izquierda** al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a , pero siendo solamente $x < a$; nunca $x = a$)

(Los dos anteriores se llaman límites laterales de la función en el punto a).

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a , incluyendo las posibilidades $x > a$ y $x < a$; nunca $x = a$)

(Se llama límite ordinario de la función en el punto a).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ (se elige x positivo en el dominio de f y cada vez más grande en valor absoluto)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ (se elige x negativo en el dominio de f y cada vez más grande en valor absoluto)

(Los dos últimos se llaman límites de la función en el infinito).

Requisitos mínimos del dominio de la función

Para que **tengan sentido** los límites de los tipos anteriores (todos los cuales podrán dar un resultado o no existir), el dominio de la función f debe cumplir distintos requisitos, según del tipo de límite de que se trate.

Así, para que tenga sentido $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ deberá existir algún intervalo de la forma $(a, a + \delta)$ contenido en el dominio de f , con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto a , pero siendo mayores que a), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x . En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Para que tenga sentido $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ deberá existir algún intervalo de la forma $(a - \delta, a)$ contenido en el dominio de f , con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto a , pero siendo menores que a), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x . En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Para que tenga sentido $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deberá, al menos, tener sentido uno de los límites laterales en el punto a . Así podremos tomar valores de x en el dominio de f , eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto $x = a$, por su derecha (si existe un intervalo de la forma $(a, a + \delta)$ contenido en dicho dominio), eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto $x = a$, por su izquierda (si existe un intervalo de la forma $(a - \delta, a)$ contenido en dicho dominio) o podremos tomar valores de x en el dominio de f , eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto $x = a$, tanto por su derecha como por su izquierda (si existe un intervalo de la forma $(a - \delta, a + \delta)$ contenido en el dominio de f , con la salvedad del punto $x = a$ que podrá pertenecer o no pertenecer a dicho dominio), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para todos esos valores de x . En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Para que tenga sentido $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ deberá haber algún intervalo de la forma $(b, +\infty)$ contenido en el dominio de f , con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos positivos y con valores absolutos todo lo grande que queramos), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x . En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Y para que tenga sentido $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ deberá haber algún intervalo de la forma $(-\infty, b)$ contenido en el dominio de f , con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos negativos y con valores absolutos todo lo grande que queramos), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función para esos valores de x . En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Posibles resultados de un límite

El resultado de cada límite, en uno cualquiera de los tipos mencionados en el primer apartado, depende de cómo se comporten los valores de la función f al variar x en la forma señalada para el tipo de que se trate.

Cualquiera de ellos (siempre que tenga sentido) dará solamente uno de los resultados siguientes:

a) un número real L (único) b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $\pm\infty$ e) “no existe”

En el primer caso se habla de límite finito, en cualquiera de los tres siguientes casos se habla de límites infinitos y en el último caso se habla de inexistencia de límite. Se describen estos cinco casos a continuación, con ejemplos:

Caso a): Ocurrirá que los valores de la función f tienden a estabilizarse alrededor del único número real fijo L , llegando a estar tan cerca de L como queramos (incluida la posibilidad de coincidir con L). Se escribe en este caso: $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = L$ (dejamos sin especificar a qué tiende x para cubrir todos los tipos; o sea, puede ser $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$).

NOTA IMPORTANTE: Si este límite ocurre cuando $x \rightarrow +\infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$, la gráfica de la función $f(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = L$ (entonces una misma función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, una con $x \rightarrow +\infty$ y otra con $x \rightarrow -\infty$, como le ocurre a la función arco tangente).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Ejemplo 1: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4x) = 6$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 3, sin que coincidan con 3, **tanto por su derecha como por su izquierda** (pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$), los valores de $f(x) = 2x^2 - 4x$ llegarán a estar arbitrariamente cerca del único número real 6.

Analicemos algunos valores: Si $x = 2'8$ es $f(x) = 4'48$; si $x = 2'9$ es $f(x) = 5'22$; si $x = 2'99$ es $f(x) = 5'9202$; si $x = 2'997$ es $f(x) = 5'976018$ (**tendencia de los valores de la función hacia el número 6, cuando nos acercamos a 3 por su izquierda**). Por el otro lado, si $x = 3'15$ es $f(x) = 7'245$; si $x = 3'1$ es $f(x) = 6'82$; si $x = 3'05$ es $f(x) = 6'405$; si $x = 3'001$ es $f(x) = 6'008002$ (**tendencia de los valores de la función hacia el número 6, cuando nos acercamos a 3 por su derecha**).

Ejemplo 2: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, pues al tomar valores de x negativos con valores absolutos cada vez mayores, los valores de $f(x) = 2^x$ llegarán a estar arbitrariamente cerca del único número real 0. En este caso la gráfica de la función $y = 2^x$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, que es el eje OX . (Ver la gráfica de la función en la Sección 2.2 de esta página web).

Analicemos algunos valores: Si $x = -2$ es $f(x) = 0'25$; si $x = -10$ es $f(x) = 0'000975\dots$; si $x = -20$ es $f(x) = 0'000000953\dots$ (**tendencia de los valores de la función hacia 0, cuando tomamos valores de x negativos y cada vez mayores en valor absoluto**).

Caso b): Ocurrirá que los valores de f llegan a superar a cualquier número positivo por grande que éste sea. Se escribe en este caso: $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$

NOTA IMPORTANTE: Si este límite se da cuando $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$ o $x \rightarrow a^-$, la gráfica de la función $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x = a$.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{7}{(x-5)^2} \right] = +\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 5, sin coincidir con 5, **tanto por su derecha como por su izquierda** (pues el dominio de la función $f(x) = 7/(x-5)^2$ es $\mathbb{R} - \{5\}$), los valores de esa función llegarán a ser mayores que cualquier número positivo, por grande que éste sea (cuanto menor sea el denominador, mayor será el cociente). En este caso la gráfica de $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 5$.

Analicemos algunos valores: Si $x = 4'8$ es $f(x) = 175$; si $x = 4'9$ es $f(x) = 700$; si $x = 4'995$ es $f(x) = 280000$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su izquierda**). Por el otro lado, si $x = 5'15$ se tiene $f(x) = 311'1111\dots$; si $x = 5'01$ se tiene $f(x) = 70000$; si $x = 5'0008$ se tiene $f(x) = 10937500$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su derecha**).

Caso c): Ocurrirá que los valores de f llegan a ser menores que cualquier número negativo por grande que sea su valor absoluto. Se escribe en este caso: $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$

NOTA IMPORTANTE: Si este límite se da cuando $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$ o $x \rightarrow a^-$, la gráfica de $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x = a$.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 0 por la derecha, sin coincidir con 0, los valores de $f(x) = \ln x$ llegarán a ser menores que cualquier número negativo, por grande que sea su valor absoluto. En este caso la gráfica de la función $\ln x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$, que es el eje OY. (Ver la gráfica de la función en la Sección 2.2 de esta página web).

Analicemos algunos valores: Si $x = 0.3$ tenemos $f(x) = -1.20397\dots$; si $x = 0.005$ tenemos $f(x) = -5.29831\dots$; si $x = 0.00000003$ tenemos $f(x) = -17.32206\dots$; si $x = 10^{-20}$ tenemos $f(x) = -46.05170\dots$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo negativos, cuando nos acercamos a 0 por su derecha**).

Caso d): Ocorre que los valores de f resultan cada vez más grandes en valor absoluto, pero hay siempre entre ellos positivos y negativos. Se escribe en este caso: $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \pm\infty$

NOTA IMPORTANTE: Si este límite ocurre cuando $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$ o $x \rightarrow a^-$, la gráfica de $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x = a$.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{2}{x-5}\right) = \pm\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 5, sin coincidir con 5, **tanto por su derecha como por su izquierda** (pues el dominio de la función $f(x) = 2/(x-5)$ es $\mathbb{R} - \{5\}$), los valores de dicha función llegarán a ser, en valor absoluto, mayores que cualquier número positivo, por grande que éste sea, pero dichos valores no serán todos positivos ni serán todos negativos (serán positivos cuando tomemos $x > 5$ y serán negativos cuando tomemos $x < 5$). En este caso la gráfica de $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta vertical $x = 5$.

Analicemos algunos valores: Si $x = 4.8$ es $f(x) = -10$; si $x = 4.9$ se tiene $f(x) = -20$; si $x = 4.9995$ es $f(x) = -4000$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo negativos, cuando nos acercamos a 5 por su izquierda**, como si el límite fuese $-\infty$). Y si $x = 5.25$ es $f(x) = 8$; si $x = 5.03$ se tiene $f(x) = 66.6666\dots$; si $x = 5.0007$ es $f(x) = 2857.142\dots$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su derecha**, como si el límite fuese $+\infty$). Aquí el límite por la derecha es $+\infty$ y el límite por la izquierda es $-\infty$, cosa muy frecuente (así o a la inversa). Pero hay funciones más complicadas donde la mezcla de signos aparece a cada lado del punto a al cual tiende x . También las hay con esa mezcla de signos cuando x tiende a $+\infty$ o cuando x tiende a $-\infty$.

Caso e): Ocorre cualquier otra situación, diferente de las anteriores.

Ejemplo 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$. **Este límite no existe porque**, al ser periódica, la función repite una y otra vez sus valores en el mismo orden mientras x crece, con lo cual **la función no presenta ninguna tendencia como las de los casos anteriores** (es decir, sus valores no se aproximan cada vez más a un número real fijo L , pues no paran de oscilar entre -1 y 1 ; ni sus valores absolutos llegan a ser mayores que cualquier número positivo, pues no superan al valor 1, con lo cual el límite no puede ser $+\infty$, $-\infty$ ni $\pm\infty$).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Ejemplo 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, luego tienen sentido los dos límites laterales. Para x positivo es $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, con lo cual la función toma únicamente el valor 1 cuando nos acercamos a cero por la derecha, y para x negativo es $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, con lo cual la función toma únicamente el valor -1 cuando nos acercamos a cero por la izquierda. Pero el límite ordinario cuando $x \rightarrow 0$ tendría que ser un único valor real L al cual se acerquen todos los valores de la función, cuando se tomen suficientemente cerca de cero, tanto por su derecha como por su izquierda). **Y vemos que esto no ocurre, luego este límite no existe.**

En este ejemplo el límite por la derecha en $x = 0$ existe y vale 1, Y el límite por la izquierda en el mismo punto también existe y vale -1 . **El que no existe es el límite ordinario en $x = 0$, pues hay contradicción entre las tendencias por un lado y por el otro.**

Propiedades de los límites

1) En el propio concepto de límite finito va la unicidad del límite (es decir, si existe límite finito para una función, su valor L es único).

2) Si es $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ y es H un número cualquiera menor que L , existirá un cierto intervalo $(a, a + \delta)$ contenido en el dominio de f de modo que se cumple $\boxed{f(x) > H}$ para todo x de dicho intervalo. De modo análogo, si es $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ y es $H < L$, existirá un intervalo $(a - \delta, a)$ contenido en el dominio de f de modo que $\boxed{f(x) > H}$ para todo x de dicho intervalo.

O sea, los valores que toma la función en puntos del dominio que estén suficientemente cerca de a , sin coincidir con este valor, llegan a superar a cualquier número menor que su límite.

En particular: Si L es positivo, habrá un intervalo donde todos los valores de la función serán positivos, salvo $f(a)$ que puede incluso no existir. En efecto, podemos tomar $H = 0$ y aplicar la propiedad anterior.

Nota: Cuando se trate de un límite con $x \rightarrow +\infty$ o con $x \rightarrow -\infty$, los intervalos que se nombran en esta propiedad, deberán cambiarse por $(b, +\infty)$ si $x \rightarrow +\infty$ y por $(-\infty, b)$ si $x \rightarrow -\infty$.

3) Si es $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ y es K un número cualquiera mayor que L , existirá un cierto intervalo $(a, a + \delta)$ de modo que se cumple $\boxed{f(x) < K}$ para todo x de dicho intervalo. Y, análogamente, si es $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ y es $K > L$, existirá un intervalo $(a - \delta, a)$ contenido en el dominio de f de modo que $\boxed{f(x) < K}$ para todo x de dicho intervalo.

O sea, los valores que toma la función en puntos del dominio que estén suficientemente cerca de a , sin coincidir con este valor, llegan a ser inferiores a cualquier número mayor que su límite.

En particular: Si L es negativo, habrá un intervalo donde todos los valores de la función serán negativos, salvo $f(a)$ que puede incluso no existir. En efecto, podemos tomar $K = 0$ y aplicar la propiedad anterior.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Nota: Vale la misma observación hecha en la nota de la propiedad anterior.

4) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L_2$ y es $\boxed{L_1 < L_2}$, existirá algún intervalo $(a, a + \delta)$ donde se cumple $\boxed{f(x) < g(x)}$ para todo x de dicho intervalo que esté en los dominios de las dos funciones f y g . O sea, al límite mayor le corresponde la función con valores mayores y al límite menor le corresponde la función con valores menores (cumpliéndose esto suficientemente cerca del punto a , pero no en dicho punto; los valores $f(a)$ y $g(a)$ podrían incluso no existir).

Nota: Esta propiedad sigue cumpliéndose cuando, en vez de $x \rightarrow a^+$ en ambos límites, ocurra también en ambos límites que $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Bastará entonces cambiar el intervalo donde varíe x y adaptarlo a cada caso (cuando sea $x \rightarrow a^-$, el intervalo será de la forma $(a - \delta, a)$; cuando sea $x \rightarrow +\infty$, el intervalo será de la forma $(b, +\infty)$, y cuando sea $x \rightarrow -\infty$, el intervalo será de la forma $(-\infty, b)$).

5) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L_2$ y se cumple $\boxed{f(x) < g(x)}$ en un cierto $(a, a + \delta)$, será $\boxed{L_1 \leq L_2}$. O sea, a la función con menores valores cerca de a , corresponde el límite menor o igual (no necesariamente menor estricto). Análogamente, para $x \rightarrow a^-$ en ambos límites, siendo el intervalo $(a - \delta, a)$; también para $x \rightarrow +\infty$ en ambos límites, siendo el intervalo $(b, +\infty)$, y también para $x \rightarrow -\infty$ en ambos límites, siendo el intervalo $(-\infty, b)$.

Ejemplos de esta propiedad 5) donde los límites L_1 y L_2 resultan iguales:

1) Sean $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+x}$ y $g(x) = \frac{2x-4}{x^2}$. Para x positivo, es $f(x) < g(x)$, porque es $x^2 + x > x^2$ y los numeradores son iguales. Por tanto, será $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ si tomamos por ejemplo $\delta = 2$ (porque así ese intervalo es $(0, 4)$ y los valores de x serán positivos). Sin embargo, el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2$ no es menor que el límite de $g(x)$ cuando $x \rightarrow 2$ (ambos límites son cero, ya que ambos numeradores tienden a cero, mientras que el primer denominador tiende a 6 y el segundo tiende a 4). (Estamos anticipando la conocida propiedad, que veremos más adelante, de que el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, si ambos son finitos y la función del denominador no tiene límite cero).

2) Para $x \geq 1$ será x positivo, luego se cumplirá $x^2 > x$ (resultado de multiplicar por x los dos miembros de la desigualdad anterior). Entonces será $\frac{3}{x^2} < \frac{3}{x}$ cuando sea $x \geq 1$. Consideremos ahora las funciones $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2} = 2 + \frac{3}{x^2}$ y $g(x) = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$, para las cuales se cumple $f(x) < g(x)$ cuando tomemos x en el intervalo $(1, +\infty)$. Así podría pensarse que los límites de ambas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ estarán en la misma relación que las dos funciones (o sea, que sería $L_1 < L_2$), pero no es así: **Ambos límites tienen valor 2**, pues $3/x^2$ y $3/x$ tienen límite cero. O sea, de la relación $L_1 \leq L_2$ que menciona esta última propiedad, se cumple en este caso $L_1 = L_2$. (Aquí estamos anticipando también la conocida propiedad, que así mismo veremos más adelante, de que el límite de un cociente de dos funciones es cero si la función del numerador tiende a un número L y la función del denominador tiende a infinito).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Otras propiedades importantes (relaciones entre distintos límites)

1) Si coinciden los límites laterales en un punto, el límite ordinario en ese punto existe y coincidirá con ambos laterales. Hay 3 variantes de esto:

1.1) $\boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L}$ (ejemplo 1 del caso a) en las págs. 2 y 3)

1.2) $\boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty}$ (ejemplo del caso b) en la pág. 3)

1.3) $\boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty}$ (ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{7}{x^2}\right) = -\infty$)

2) Inversamente, si existe el límite ordinario en un punto $x = a$, siendo un número real, siendo $+\infty$ o siendo $-\infty$ y tienen sentido ambos límites laterales en dicho punto, estos últimos existirán y coincidirán con el límite ordinario.

3) Si uno de los límites laterales en un punto es $+\infty$ y el otro límite lateral es $-\infty$, el límite ordinario en ese mismo punto es $\pm\infty$. (ejemplo del caso d) en la pág. 4).

4) Si los límites laterales en un punto existen pero son diferentes, salvo que uno sea $+\infty$ y el otro sea $-\infty$, el límite ordinario en dicho punto no existe. (Ver ejemplo 2 del caso e) en la pág. 4, donde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe porque el límite por la derecha es 1 y el límite por la izquierda es -1).

5) Si en un punto no tiene sentido hablar de **ambos** límites laterales sino solamente de uno de ellos, el límite ordinario en dicho punto coincidirá con el límite lateral que tenga sentido, si este existe. (Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} (\arccos x) = 0$, donde no tiene sentido el límite por la derecha puesto que el dominio de la función es $[-1, 1]$, pero sí tiene sentido el límite por la izquierda y vale cero).

MUY IMPORTANTE: Nunca debe confundirse un límite (lateral u ordinario) en un punto a , con el valor $f(a)$ de la función en dicho punto. Pues ambos valores coinciden en muchas ocasiones, pero en otras muchas ocasiones no coinciden. Es más, puede existir el límite y no haber el valor $f(a)$, o puede haber el valor $f(a)$ y no existir el límite.

Límites de las funciones básicas

Recordamos que las “funciones básicas” son las más sencillas (constantes, identidad, potenciales de exponente entero positivo, radicales, exponenciales de base positiva diferente de 1, logarítmicas, seno, coseno, tangente, arco seno, arco coseno, arco tangente y valor absoluto).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

TEOREMA: Si $f(x)$ es una función básica cualquiera y si $x = a$ es uno cualquiera de los puntos de su dominio, se tiene siempre $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Nota importante: Entonces, como consecuencia de la propiedad 2 de la página anterior, para todos los puntos $x = a$ que sean interiores de los intervalos que formen el dominio de la función f , existirán ambos límites laterales y tendrán el mismo valor $f(a)$. Sin embargo, en los puntos $x = a$ que sean extremos pertenecientes de los intervalos que formen el dominio de f , solamente existirá uno de los límites laterales y tendrá el valor $f(a)$.

(En la Sección 2.5 se complementa la información anterior, incluyendo los límites en el infinito de todas las funciones básicas, así como sus límites en los extremos no pertenecientes a los intervalos que definen sus dominios).

De momento damos tres ejemplos de funciones básicas y uno de función definida a trozos:

Ejemplo1: Para la función básica $f(x) = \arcsen x$, cuyo dominio es el intervalo $[-1, 1]$, podemos decir varias cosas:

a) No tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, ni $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, luego no tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. En efecto, no es posible elegir x cerca de 2 (tan cerca como queramos) y a la vez x en el dominio de la función, pues 2 está separado del intervalo $[-1, 1]$. Más general: Tampoco tiene sentido el límite de $f(x)$ con $x \rightarrow a$, siendo a cualquier valor mayor que 1, ni tiene sentido el límite cuando $x \rightarrow +\infty$.

b) No tiene sentido $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$, ni $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$, luego tampoco $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$. En efecto, no es posible elegir x cerca de -3 (tan cerca como queramos) y a la vez x en el dominio de la función. Más general: Tampoco tiene sentido el límite de $f(x)$, con $x \rightarrow a$, siendo a cualquier valor menor que -1, ni tiene sentido el límite cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) No tiene sentido $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, pero sí tiene sentido $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Luego, tiene sentido $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ y coincide con el último límite lateral. (Además, el teorema anterior establece que el resultado de dicho límite es $f(-1) = -\pi/2$, por ser $f(x)$ una de las funciones básicas y estar -1 en su dominio).

d) Tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, pero sí tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Luego, también tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y coincide con el primer límite lateral. (Además, el teorema anterior establece que el resultado de dicho límite es $f(1) = \pi/2$, por ser $f(x)$ una de las funciones básicas y estar 1 en su dominio).

e) Por último, para cualquier a intermedio entre -1 y 1, tiene sentido $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y tiene sentido $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, luego tiene sentido $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y coincide con los dos anteriores. (Además, el teorema anterior establece que su resultado es $f(a) = \arcsen a$, por ser $f(x)$ una de las funciones básicas y ser a un punto de su dominio).

(Recordar la gráfica de $y = \arcsen x$ en la Sección 2.2).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Ejemplo 2: Para la función básica $g(x) = \ln x$, cuyo dominio es el intervalo $(0, +\infty)$, tiene sentido $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ y no tiene sentido $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. El resultado del primer límite es $+\infty$, pues al tomar x suficientemente grande, su logaritmo llegará a ser tan grande como queramos. Además, si $x = a$ es un punto cualquiera de $(0, +\infty)$, se tiene $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ (existen y coinciden ambos límites laterales en ese punto $x = a$). Por último, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (el eje OY es asíntota vertical), como vimos al comienzo de la pág. 4.

(Recordar la gráfica de $y = \ln x$ en la Sección 2.2).

Ejemplo 3: Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$, que tiene dominio $\mathbb{R}$, pero no es básica ni siquiera elemental (pues es una “función definida a trozos”), se tiene:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} x^2 = (-3)^2 = 9$ (por ser x^2 una función básica y estar -3 en su dominio)

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2 = (-3)^2 = 9$ (por la misma razón anterior).

Por tanto, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 9}$ (y de un modo análogo para todo $a < 0$ es $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2}$)

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0$ (por ser x^2 una función básica y estar 0 en su dominio)

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (dicho en el ejemplo anterior)

Por tanto, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}}$

(si f fuese básica, este límite tendría que existir según el Teorema de la pág. 8, pues 0 es punto de su dominio)

e) $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \ln x = \ln e = 1$ (por ser $\ln x$ una función básica y estar e en su dominio)

f) $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \ln x = \ln e = 1$ (por la misma razón anterior)

Por tanto, $\boxed{\lim_{x \rightarrow e} f(x) = 1}$ (y de un modo análogo para todo $a > 0$ es $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ln a}$)

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ (si x es negativo y grande en valor absoluto, x^2 será positivo y aún mayor en valor absoluto, luego llegará a superar a cualquier número positivo que demos)

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (dicho en el ejemplo 2 anterior)

Álgebra de límites

Veamos ahora cómo son los límites de sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones, suponiendo conocidos los límites de las funciones con las que operamos en cada caso. Estas propiedades, que resumimos en tres teoremas, se suelen agrupar como “Álgebra de límites”.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Supondremos que las dos funciones nombradas en los tres teoremas tienen dominios con intersección no vacía (para que puedan existir las funciones suma, diferencias, producto y cocientes de ambas), de forma que dicha intersección contenga algún intervalo de la forma $(a, a + \delta)$ donde no se anule la función del denominador que aparezca en los casos de los cocientes, o bien que contenga algún intervalo de la forma $(a - \delta, a)$ con la misma propiedad del denominador que aparezca en cada cociente. Esto es para que en los tres teoremas tengan sentido los límites ordinarios de f , de g , de $f + g$, de $f - g$, de $f \cdot g$, de f/g y de g/f .

En un primer teorema supondremos que las dos funciones tienen límites finitos cuando $x \rightarrow a$ y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y cociente de ambas.

TEOREMA 1: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ (siendo A y B números reales), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= A \pm B & \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= A \cdot B \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \begin{cases} A/B, & \text{si } B \neq 0 \\ \infty, & \text{si } A \neq 0 \text{ y } B = 0 \\ \text{INDETERMINADO}, & \text{si } A = B = 0 \end{cases} & \text{(signo de } \infty \text{ por regla de signos)} \end{aligned}$$

El límite indeterminado anterior se conoce como “indeterminación $0/0$ ”. En todos los casos de indeterminación se dan efectos contrarios. Aquí, al decrecer el numerador, el cociente tendería a decrecer, y al decrecer el denominador, el cociente tendería a crecer. ¿Qué ocurrirá? Pues depende de cuáles sean las funciones f y g que intervengan.

En un segundo teorema supondremos que una función tiene límite finito y la otra función tiene límite infinito (ambas cuando $x \rightarrow a$) y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y los dos cocientes de ambas:

TEOREMA 2: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (número real) y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (no especificamos si es $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= \infty \quad \text{(signo de este límite, por regla de signos)} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \begin{cases} \infty, & \text{si } A \neq 0 \\ \text{INDETERMINADO}, & \text{si } A = 0 \end{cases} \quad \text{(signo de } \infty, \text{ por regla de signos)} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} &= \infty \quad \text{(signo de este límite, por regla de signos)} \end{aligned}$$

El límite indeterminado anterior se conoce como “indeterminación $0 \cdot \infty$ ”. Como en el caso de la anterior indeterminación $0/0$, hay otra vez efectos contrarios: Al decrecer el primer factor, el producto tendería a decrecer, y al crecer el segundo factor, el producto tendería a crecer. ¿Qué ocurrirá? Otra vez depende de cuáles sean las funciones f y g que intervengan.

Y en un tercer teorema supondremos que las dos funciones tienen límites infinitos cuando $x \rightarrow a$ y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y cociente de ambas:

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

TEOREMA 3: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (no especificamos signos), se tiene:

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \text{INDETERMINADO}$ (“indeterminación $\infty \pm \infty$ ”)

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$ (signo de este límite, por regla de signos)

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{INDETERMINADO}$ (“indeterminación ∞/∞ ”)

La indeterminación $\infty \pm \infty$ lo es al no haberse especificado en las hipótesis del teorema los signos de los límites infinitos de las dos funciones. Pero si especificamos los signos, hay casos en que la indeterminación no existe y otros casos en que ésta es muy cierta. Es cierta en los casos que podemos representar por $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$ y $(-\infty) - (-\infty)$, ya que en todos ellos se dan efectos contrarios. En cambio, no existe indeterminación en los casos que representamos por $(+\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (-\infty)$ y $(-\infty) - (+\infty)$, pues en estos no hay efectos contrarios sino efectos concordantes. Estos últimos casos dan, respectivamente, los resultados $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$ y $-\infty$.

Y en el caso del límite indeterminado ∞/∞ también hay efectos contrarios, pues al crecer el numerador, el cociente tendería a crecer, y al crecer también el denominador, el cociente tendería a decrecer. Otra vez lo que ocurra dependerá de cuáles sean las dos funciones que intervengan.

Notas importantes:

1) Los tres teoremas anteriores valen poniendo en todos los límites $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ o bien $x \rightarrow -\infty$ (en vez de $x \rightarrow a$), para lo cual basta suponer que la intersección de los dominios de f y g contenga solamente un intervalo de la forma $(a, a + \delta)$ en el primer caso; contenga solamente un intervalo de la forma $(a - \delta, a)$ en el segundo caso; contenga un intervalo de la forma $(b, +\infty)$ en el tercer caso, o contenga un intervalo de la forma $(-\infty, b)$ en el último caso.

2) Cuando ponemos un resultado como INDETERMINADO, queremos indicar que dicho resultado es impredecible sin conocer las funciones que intervienen (o sea, que dicho resultado, según sean las funciones f y g , podrá ser un número L , podrá ser $+\infty$, $-\infty$, $\pm\infty$ o bien podrá no existir). Pero en la práctica, cuando tengamos que calcular un límite de estos tipos, se conocerán las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que intervienen, con lo cual se llegará a saber lo que ocurre realmente. Y el límite no estará totalmente resuelto hasta que lleguemos a la conclusión final (decir “indeterminado” no es dar su resultado; al contrario, hay que seguir trabajando para resolverlo).

Pues bien, el proceso para averiguar dicho resultado final consiste normalmente en transformar por operatoria el límite dado en otro límite equivalente, donde podamos aplicar ya alguno de los teoremas anteriores sin caer de nuevo en un caso de indeterminación, con lo cual podremos finalmente averiguar qué ocurre (es lo que comúnmente se denomina “resolver la indeterminación”). A veces este proceso es largo y conduce a otras indeterminaciones, cada vez más sencillas de resolver, hasta que se llega a la conclusión final. Por lo general, las indeterminaciones más fáciles de resolver son las que tienen forma de cociente ($0/0$ e ∞/∞), por lo cual en la práctica se intenta convertir las otras indeterminaciones en éstas.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Al respecto, se pueden usar ciertas identidades, aunque a veces la transformación del límite indeterminado consiste en multiplicar y dividir por una expresión llamada “conjugada” o solamente efectuar operaciones y simplificar. Las identidades son:

$$u \pm v \equiv \frac{\frac{1}{v} \pm \frac{1}{u}}{\frac{1}{u \cdot v}} \quad (\text{para transformar la indeterminación } \infty \pm \infty \text{ en la } 0/0)$$

$$u \cdot v \equiv \frac{u}{1/v} \quad (\text{para transformar la indeterminación } 0 \cdot \infty \text{ en la } 0/0, \text{ pues será } v \neq 0)$$

$$u \cdot v \equiv \frac{v}{1/u} \quad (\text{para transformar la indeterminación } \infty \cdot 0 \text{ en la } 0/0, \text{ pues será } u \neq 0)$$

A veces, conviene usar alguna de estas dos últimas identidades para transformar una indeterminación en forma de producto en la indeterminación ∞/∞ . Por ejemplo, si u tiene límite ∞ y v tiene límite 0 (como hemos supuesto en el tercer caso), pero solamente si v se mantiene diferente de cero, podría ponerse $u \cdot v \equiv \frac{u}{1/v}$, quedando así la indeterminación ∞/∞ .

A su vez, las indeterminaciones en forma de cociente pueden resolverse por simplificaciones (principalmente, factorizar numerador y denominador para luego simplificar la fracción, así como dividir numerador y denominador por una cierta potencia de la variable independiente). Más adelante se verán dos procedimientos muy importantes para resolver indeterminaciones en forma de cociente: La Regla de L'Hôpital (Sección 3.3) y la sustitución de “infinitésimos equivalentes” (Sección 3.4).

Ejemplos:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 27} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+1)}{(x-3) \cdot (x^2 + 3x + 9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{4}{27}$$

Aquí se resolvió la indeterminación $0/0$ factorizando el numerador, factorizando el denominador, y simplificando el factor $(x - 3)$ que es diferente de cero (pues al ser $x \rightarrow 3$, será $x \neq 3$). Finalmente, aplicamos los apartados a), b) y c) del Teorema 1.

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x^2 + 2x - 15) \cdot \frac{2}{x-3} \right] = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \cdot (x^2 + 2x - 15)}{x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \cdot (x+5) \cdot (x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} [2 \cdot (x+5)] = 16$$

Inicialmente, el límite de $2/(x - 3)$ es ∞ por el apartado c) del Teorema 1. Luego, al operar, pasamos de la indeterminación $0 \cdot \infty$ a la indeterminación $0/0$. Posteriormente factorizamos el polinomio $x^2 + 2x - 15$ y simplificamos el factor $(x - 3)$ que es diferente de cero. Finalmente, aplicamos los apartados a) y b) del Teorema 1.

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 2}) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 5x) - (x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - 2}} = \\ = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - 2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}} = \frac{5}{2}$$

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Aquí se pasó de la indeterminación $\infty - \infty$ a la indeterminación ∞/∞ multiplicando numerador y denominador por la “expresión conjugada del denominador” y luego simplificando. Después, para resolver la indeterminación ∞/∞ , se dividió numerador y denominador por x (porque el grado del numerador es 1; si dicho grado fuese 2, dividiríamos numerador y denominador por x^2 , y de modo análogo en otros casos) y después se efectuaron operaciones. Finalmente, se aplicó varias veces el apartado c) del Teorema 2, el apartado a) del Teorema 1 y el apartado c) del Teorema 1. También intervienen en el proceso estos cálculos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} = 1$$

Donde hemos aplicado, en cada uno de estos límites, un cambio de variable apropiado y nos hemos apoyando además en que $y = \sqrt{x}$ es una función básica, con lo cual $\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} = \sqrt{1} = 1$; pero además $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty$ porque si tomamos t es suficientemente grande, el valor de $\sqrt{t}$ llegará a superar a cualquier número positivo dado, por grande que éste sea.

Nota importante: Si el límite anterior fuese con $x \rightarrow -\infty$, al entrar x dividiendo en las dos raíces cuadradas del denominador (que entraría como x^2 , para luego dividir a ambos radicandos), ten- dríamos que cambiar el signo de ambas raíces, con lo cual el resultado final sería $-5/2$. Esto ocurre porque x será negativo, con lo cual $x = -\sqrt{x^2}$ (y no $x = \sqrt{x^2} = +\sqrt{x^2}$, como ocurre cuando x es positivo).

$$\text{Es decir, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+5x+\sqrt{x^2-2}}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+5x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x+2}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+5x}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}} = \frac{5}{-\sqrt{1}-\sqrt{1}} = -\frac{5}{2}$$

donde hemos abreviado el cálculo final, poniendo directamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{x} = 5$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x}{x^2} = 1$ y también $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2}{x^2} = 1$, porque ya lo habíamos realizado anteriormente (cuando x tendía a $+\infty$) y ahora es igual.

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt[3]{5x-6}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(3x+2)^3}}{\sqrt[6]{(5x-6)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(3x+2)^3}}{\sqrt[6]{(5x-6)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{27x^3+\dots}}{\sqrt[6]{25x^2-\dots}} = +\infty$$

donde el numerador de la última fracción (dentro de la raíz sexta) representa el desarrollo de la potencia $(3x+2)^3$, ordenada de mayor a menor exponentes, y el denominador de esa misma fracción representa el desarrollo de la potencia $(5x-6)^2$, también ordenada de mayor a menor exponentes. Finalmente, como en esa última fracción el polinomio del numerador es de mayor grado que el polinomio del denominador, ese numerador crecerá más rápidamente que ese denominador (siendo el límite de ambos $+\infty$), con lo cual los cocientes de ambos serán cada vez más grandes, y su límite resultará $+\infty$. Entonces, el último límite puede considerarse $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{t} = +\infty$ (si el radicando crece sin parar, la raíz sexta crecerá también sin parar, de modo que si t se toma suficientemente grande, $\sqrt[6]{t}$ llegará a superar a cualquier número positivo que queramos dar).

Límites en el infinito de las funciones racionales

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Recordemos que “función racional” de una variable es cualquiera que sea de la forma (o pueda llevarse a la forma):

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \text{ donde } P_m(x) \text{ y } Q_n(x) \text{ son polinomios de coeficientes reales}$$

(los subíndices m y n representan los grados respectivos de ambos polinomios).

Damos a continuación un conocido teorema sobre los posibles límites de una función del tipo anterior cuando $x \rightarrow +\infty$.

TEOREMA: Si el coeficiente de x^m en $P_m(x)$ es el número a y el coeficiente de x^n en $Q_n(x)$ es el número b , tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{a}{b}, \text{ si es } m = n & 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \infty, \text{ si es } m > n \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= 0, \text{ si es } m < n \end{aligned}$$

Nota 1: El Teorema anterior es válido también si es $x \rightarrow -\infty$ en todos los apartados.

Nota 2: El resultado del apartado 2) del Teorema será $+\infty$ o bien $-\infty$ según los casos. Habrá que aplicar regla de signos, teniendo en cuenta los de ax^m y bx^n , según que $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. En efecto, el signo del polinomio $P_m(x)$ lo determina el signo de ax^m para valores absolutos de x suficientemente grandes, e igualmente el signo de $Q_n(x)$ lo determina el signo de bx^n .

Ejemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 8x + 5}{-2x^3 + 3} = -\frac{3}{2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 8}{5x^2 + 9} = 0 \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 5x - 1}{3x + 12} = +\infty$$

(en el último ejemplo, además de que es $m > n$, el signo que corresponde a $-2x^2$ es negativo y el signo que corresponde a $3x$ también es negativo, pues los valores de x son negativos; por eso el límite es $+\infty$).

Funciones que son potencias

Las funciones de la forma $y = [f(x)]^k$, con k real fijo diferente de cero y diferente de 1, se llaman “funciones potenciales”.

Las más sencillas funciones potenciales son las básicas $y = x^n$ (n entero positivo mayor que 1).

Pero también son funciones potenciales $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ (n entero positivo), así como $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ o $y = x^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ (n entero positivo mayor que 1). Desde luego, también son funciones potenciales $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ e $y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ (m y n enteros positivos, siendo n mayor que 1) e incluso $y = x^\alpha$, con α número irracional, positivo o negativo.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Las funciones de la forma $y = k^{f(x)}$ (k real fijo positivo, distinto de 1) se llaman “funciones exponenciales”. Las más sencillas son las básicas $y = a^x$ (con $a > 1$ o con $0 < a < 1$).

Pero también hay funciones que son potencias del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$, donde ni la base ni el exponentes son constantes, las cuales se llaman “funciones potenciales-exponenciales”. La más sencilla es $y = x^x$, que no es básica (pero sí es elemental, porque $x^x \equiv e^{x \cdot \ln x}$, con lo cual tenemos una compuesta del producto $x \cdot \ln x$ con la función exponencial e^x).

Límites de funciones que son potencias

1) El límite de una función potencial $[f(x)]^k$ se reduce normalmente a estudiar el límite de la función que aparece en su base. Luego se usa el cambio de variable $f(x) = t$ y se calcula el límite de la potencial t^k cuando t tienda al límite de $f(x)$ (si éste es un número real, es $+\infty$ o es $-\infty$). Ahora bien, si el límite de $f(x)$ no existiese, el límite de la potencial tampoco existirá. Y si el límite de $f(x)$ fuese $\pm\infty$, habrá que ver separadamente el límite de t^k cuando t tienda a $+\infty$ y el límite de t^k cuando t tienda a $-\infty$ (si ambos coinciden, la potencial $[f(x)]^k$ tendrá el mismo límite y en caso contrario su límite no existirá).

2) El límite de una función exponencial $k^{f(x)}$ (k positivo diferente de 1) se reduce normalmente a estudiar el límite de la función que aparece en su exponente: Luego se usa el cambio de variable $f(x) = t$ y se calcula el límite de la exponencial k^t cuando t tienda al límite de $f(x)$ (si éste es un número real, es $+\infty$ o es $-\infty$). Ahora bien, si el límite de $f(x)$ no existiese, el de la exponencial tampoco existirá. Y si el límite de $f(x)$ fuese $\pm\infty$, tampoco existirá el límite de la exponencial, pues el comportamiento de k^t es radicalmente diferente según t tienda a $+\infty$ o t tienda a $-\infty$: En efecto, si fuese $k > 1$, la exponencial k^t tenderá a $+\infty$ en el primer caso y tenderá a cero en el segundo caso, y si fuese $0 < k < 1$, la exponencial k^t tenderá a cero en el primer caso y tenderá a $+\infty$ en el segundo caso.

3) Para calcular límites de funciones que son potenciales-exponenciales, se usa la identidad:

$$(1) \quad [f(x)]^{g(x)} \equiv e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$$

con lo cual basta saber el límite de la exponencial de base e del lado derecho de la identidad. Pero entonces, como dijimos anteriormente, el cálculo se reduce a determinar el límite del exponente del número e (si es un número real, es $+\infty$ o es $-\infty$).

Por tanto, las posibilidades finales se reducen a los tres casos siguientes:

- a) Si el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ es un número L , el límite de la potencial-exponencial será e^L .
- b) Si el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ es $+\infty$, el límite de la potencial-exponencial será $+\infty$.
- c) Si el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ es $-\infty$, el límite de la potencial-exponencial será cero.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Nota: Si el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ fuese $\pm\infty$, el resultado para el límite de $[f(x)]^{g(x)}$ será “no existe”, como dijimos en la página anterior para las funciones exponenciales. Y si el límite del exponente de e no existiese, tampoco existirá el límite de la potencial-exponencial dada.

Ejemplos:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{4x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{2x \cdot \ln\left(\frac{x+2}{4x}\right)} = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)} = e^{\ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ (este caso es muy simple y podía verse directamente, porque la base dada tiende a $3/4$ y el exponente dado tiende a 2)

2) Pero este es menos simple: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)}$ (la base dada tiende a cero y el exponente tiende a $+\infty$; luego hemos usado la identidad (1) de la pág. anterior). Así tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2+5} = 0 \text{ (teorema de la pág. 14) , siendo } \frac{3x-1}{x^2+5} \text{ positivo}$$

$$\text{con lo cual: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty \text{ (aplicado el cambio de variable } \frac{3x-1}{x^2+5} = t)$$

$$\text{pero entonces: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right) \right] = -\infty \text{ (por apartado b) del Teorema 3 de la pág. 11)}$$

En conclusión, el resultado final es cero: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)^x = 0$ (posibilidad c) anterior)

Indeterminaciones en forma de potencia

Trabajando del modo explicado anteriormente, se llega a la conclusión de que hay tres tipos de límites indeterminados en forma de potencia, que son:

$$\text{a) } 1^\infty \quad , \quad \text{b) } (+\infty)^0 \quad \text{y} \quad \text{c) } 0^0$$

los cuales corresponden a las tres situaciones siguientes:

- a) La base es función que tiende a 1 y el exponente es función que tiende a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$.
- b) La base es función que tiende a $+\infty$ y el exponente es función que tiende a 0 (siendo positiva o negativa).
- c) La base es función que tiende a 0 (siendo positiva) y el exponente es función que tiende también a 0 (siendo positiva o negativa).

Estos límites indeterminados se resuelven aplicando la identidad (1) mencionada en la página anterior y luego calculando el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ (que será siempre indeterminado del tipo $0 \cdot \infty$ o bien $\infty \cdot 0$). Y para ello, después de convertir el producto indeterminado en cociente indeterminado como dijimos en la Pág. 12, se suele terminar aplicando la Regla de L'Hôpital (Sección 3.3) o la sustitución de infinitésimos equivalentes (Sección 3.4). Sin embargo, hay algunos casos sencillos que podremos ver aquí.

Ejemplos sencillos de límites indeterminados en forma de potencia:

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{\frac{3}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e)^{\frac{3}{\ln x} \cdot \ln x} = e^3$ (caso del tipo $(+\infty)^0$, donde se ha utilizado la identidad (1) y luego se simplifica el exponente).

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{-2}{\ln x+5}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e)^{\frac{-2}{\ln x+5} \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e)^{\frac{-2 \ln x}{\ln x+5}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e)^{\frac{-2t}{t+5}} = e^{-2}$ (caso del tipo 0^0 , donde se ha utilizado la identidad (1), luego se hizo el cambio de variable $\ln x = t$ y se aplicó en el exponente de e el teorema sobre límites de funciones racionales de la pág. 14).

NOTA IMPORTANTE: En los límites indeterminados del tipo 1^∞ (y solamente en ellos) puede hacerse la sustitución de $\ln[f(x)]$ por $[f(x) - 1]$ cuando vayamos a calcular el límite de $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ (se explica en la Sección 3.4 que esto no altera dicho límite, pues ambas funciones son “infinitésimos equivalentes” cuando $f(x)$ tiende a 1).

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x+1}{10-x} \right)^{\frac{1}{x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} (e)^{\frac{1}{x-3} \cdot \ln \left(\frac{2x+1}{10-x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 3} (e)^{\frac{1}{x-3} \cdot \left(\frac{2x+1}{10-x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 3} (e)^{\left(\frac{1}{x-3} \cdot \frac{3x-9}{10-x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (e)^{\frac{3 \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (10-x)}} = \lim_{x \rightarrow 3} (e)^{\frac{3}{10-x}} = e^{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

(caso del tipo 1^∞ , donde se simplificó al final el factor $(x - 3)$ que aparece en numerador y denominador del exponente, por ser distinto de cero).

Continuidad

La función $f(x)$ se llama “continua en el punto $x = a$ ”, cuando se cumpla la condición:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Nota 1: De la definición anterior se deduce que si $f(x)$ es continua en $x = a$, el punto a pertenecerá al dominio de f , ya que se habla del valor $f(a)$.

Nota 2: Si el punto $x = a$ fuese un punto del dominio de la función f que no tenga otros puntos de dicho dominio arbitrariamente cerca por su derecha ni por su izquierda, no tendrá sentido el límite ordinario de la función cuando x tiende al punto a . En ese caso el punto $x = a$ se llama “punto aislado del dominio” y la función se considera continua en éste, sin más requisitos. (Habíamos supuesto inicialmente en esta Sección que las funciones que manejaríamos estarían siempre definidas en intervalos o uniones de intervalos sin puntos comunes; pero uno de esos intervalos podría ser $[a, a] = \{a\}$ y los otros intervalos podrían quedar separados de este, con lo cual el punto $x = a$ sería “punto aislado del dominio”).

Ejemplo: La función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ tiene como dominio el conjunto solución de la inecuación racional $\frac{x^2}{x-1} \geq 0$, que es $\{0\} \cup (1, +\infty)$. (Ver Sección 1.3 de esta página web). Vemos que en este caso el dominio tiene un punto aislado que es cero, luego esta función es automáticamente continua en dicho punto.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Se dice que una función f es “continua en un conjunto A de números reales” cuando lo sea en cada punto de dicho conjunto. Así, “continua en el dominio de f ” significa continua en cada punto de dicho dominio.

La función $f(x)$ se llama “continua por la derecha en el punto $x = a$ ”, cuando se cumpla la condición $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Análogamente, $f(x)$ se llama “continua por la izquierda en el punto $x = a$ ”, cuando se cumpla $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

NOTA IMPORTANTE: Si un punto $x = a$ está en el dominio de una función, siendo punto interior de alguno de los intervalos que lo forman, la continuidad de la función en $x = a$ equivale a la continuidad por la derecha y también la continuidad por la izquierda de la función en ese punto. En cambio, si el punto $x = a$ está en el dominio pero es extremo izquierdo de uno de los intervalos que lo forman (intervalo que no se reduzca a un solo punto), la continuidad en el punto $x = a$ equivale solamente a la continuidad por la derecha en el mismo (porque el límite ordinario en este caso se reduce al límite lateral derecho). Y si el punto $x = a$ está en el dominio de la función pero es extremo derecho de uno de los intervalos que lo forman (que no se reduzca a un solo punto), la continuidad en el punto $x = a$ equivale solamente a la continuidad por la izquierda en dicho punto (porque el límite ordinario en este caso se reduce al límite lateral izquierdo).

Ejemplo: La función $f(x) = \arcsen x$ tiene dominio $[-1, 1]$ y, por ser función básica, su límite ordinario en $x = -1$ será el valor $\arcsen(-1) = -\pi/2$ (Teorema dado en la pág.8), pero ese límite ordinario se reduce al límite lateral por la derecha en $x = -1$ (ya que a su izquierda no hay dominio de la función). Y de modo análogo, esta misma función tiene límite ordinario en $x = 1$, que será el valor $\arcsen(1) = \pi/2$, reduciéndose ese límite ordinario al límite lateral por la izquierda en el mismo punto (pues no hay dominio de la función a su derecha).

Continuidad en intervalos:

- 1) “ $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ ” significa que f es continua en todos sus puntos interiores, continua por la derecha en $x = a$ y continua por la izquierda en $x = b$ (no importando qué ocurra a la izquierda de a ni lo que ocurra a la derecha de b).
- 2) De manera análoga, “ $f(x)$ continua en un intervalo $[a, b)$ o en un intervalo $[a, +\infty)$ ” significa que f es continua en todos los puntos interiores de esos intervalos y además es continua por la derecha en $x = a$. Y también “continua en un intervalo $(a, b]$ o en un intervalo $(-\infty, b]$ ” significa que la función es continua en todos los puntos interiores de esos intervalos y además es continua por la izquierda en $x = b$.
- 3) Finalmente, “continua en un intervalo (a, b) , en un intervalo $(a, +\infty)$, en un intervalo $(-\infty, b)$ o en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ ” significa que la función es continua en todos los puntos interiores del intervalo correspondiente.

Ejemplos:

- 1) La funciones $\arcsen x$ y $\arccos x$ son continuas en $[-1, 1]$.
- 2) Pero si $f(x)$ es una función definida a trozos en todo $\mathbb{R}$ del modo siguiente: $f(x) = \arcsen x$ si $x \in [-1, 1]$; $f(x) = e^x$ si $x \in (-\infty, -1)$, y $f(x) = \ln x$ si $x \in (1, +\infty)$, esta función tam-

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

bién es continua en el intervalo $[-1, 1]$, a pesar de que no es continua en $x = -1$ ni en $x = 1$ (pero sí es continua por la derecha en $x = -1$ y también es continua por la izquierda en $x = 1$, que es lo que exige la definición dada). Y hemos dicho que $f(x)$ no es continua en $x = -1$ porque su límite por izquierda en ese punto es $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x = e^{-1}$ (distinto al límite por la derecha en ese mismo punto que es $-\pi/2$), con lo cual el límite ordinario en $x = -1$ no existe. Análogamente, el límite por la derecha de esta función en $x = 1$ será $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$ (distinto del límite por la izquierda en ese mismo punto que es $\pi/2$), con lo cual el límite ordinario en $x = 1$ no existe.

Tenemos ahora tres teoremas importantes sobre continuidad:

TEOREMA 1: Todas las “funciones básicas” son continuas en sus respectivos dominios.

(Esto es otro modo de decir lo establecido en el Teorema de la pág. 8).

TEOREMA 2 (Álgebra de funciones continuas): Si f y g son continuas en un mismo punto a , las funciones $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$ también serán continuas en ese punto. Además, la función f/g será continua en a , si se cumple $g(a) \neq 0$. Y la función g/f será continua en a , si se cumple $f(a) \neq 0$.

(Es una consecuencia de las operaciones entre funciones y del Teorema 1 de la pág. 10).

TEOREMA 3: Si $f(x)$ es continua en el punto a y $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$, la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ es continua en el punto a .

Ejemplo: La función $f(x) = \arcsen x$ es continua en $x = 1/2$ (por ser función básica de dominio el intervalo $[-1, 1]$) y además tenemos $f(1/2) = \arcsen(1/2) = \pi/6$. Por otro lado, la función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ es continua en $x = \pi/6$ (por ser también función básica de dominio el intervalo $[0, +\infty)$). Por lo tanto, la función compuesta

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\arcsen x) = \sqrt[4]{\arcsen x}$$

será continua en el punto $x = 1/2$.

Uno de los teoremas más útiles sobre continuidad, que generaliza lo establecido en el Teorema 1 anterior, es el siguiente:

TEOREMA 4: Todas las “funciones elementales” son continuas en sus respectivos dominios.

Recordamos que las “funciones elementales” (que son las más usadas) se caracterizan por estar definidas explícitamente por una sola ecuación, la cual resulta de operar con “funciones básicas” (las más sencillas de todas). Las operaciones entre funciones a que nos referimos son todas las posibles: sumar, restar, multiplicar, dividir y componer. Por tanto, este Teorema 4 es una consecuencia de los Teoremas 1, 2 y 3 anteriores.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

El Teorema 4 tiene enorme importancia práctica: Basta que sepamos obtener el dominio de una función elemental para que conozcamos, sin necesidad de calcularlos, todos los límites de dicha función cuando $x \rightarrow a$, siendo a cualquier punto de dicho dominio (salvo que sea un “punto aislado”, en cuyo caso dicho límite no tendrá sentido).

Ejemplo: El dominio de la función elemental $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x+2) \cdot (x-3)}}$ es el conjunto solución de la inecuación racional $\frac{(x-1)^2}{(x+2) \cdot (x-3)} \geq 0$, que es $(-\infty, -2) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$; pues bien, no tiene sentido $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Sin embargo, al ser $x = 1$ “punto aislado” del dominio, la función f es continua en dicho punto, sin más requisitos (recuérdese lo dicho en la Nota 2 de la pág. 17). En cambio, tiene perfecto sentido el límite ordinario de esta función cuando $x \rightarrow a$, siendo a cualquier punto del intervalo $(-\infty, -2)$ o cualquier punto del intervalo $(3, +\infty)$. Y el valor de dicho límite será siempre el valor $f(a)$ de la función en el punto a que consideremos, por ser f continua en a (en virtud del Teorema 4). Por ejemplo, el límite de f en el punto $x = -3$ será $f(-3) = 2\sqrt{6}/3$ (no hace falta calcularlo), y el límite de f en el punto $x = 5$ será $f(5) = 2\sqrt{14}/7$ (tampoco hace falta calcularlo).

Otros ejemplos:

1) La función $y = 3x^3 - 5x + \pi$ (polinomio de grado 3) es elemental, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Por tanto, puede decirse inmediatamente que $\lim_{x \rightarrow a} (3x^3 - 5x + \pi) = 3a^3 - 5a + \pi$, siendo a cualquier número real.

2) La función $y = \sqrt{\ln x}$ es elemental, cuyo dominio es $[1, +\infty)$. Por tanto, puede decirse inmediatamente que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln a}$, para cualquier número real a mayor o igual que 1.

Consecuencia de lo anterior es que si las funciones que intervienen como base y como exponente de una potencial-exponencial $f(x)^{g(x)}$ son elementales, podemos decir que esta función es continua para todos los x donde exista $g(x)$ y a la vez se cumpla $f(x) > 0$.

En efecto, para dichos valores de x podemos aplicar la identidad (1) de la pág 15:

$$[f(x)]^{g(x)} \equiv e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$$

con lo cual la función resulta de hacer operaciones con funciones elementales (compuesta de $f(x)$ con $\ln x$, que nos da $\ln[f(x)]$; luego producto de ésta por $g(x)$, y otra vez compuesta de dicho producto con e^x , que nos da el segundo miembro de la identidad). Y operaciones con funciones elementales dan siempre nuevas funciones elementales (salvo que resulten vacíos sus dominios).

Por tanto, la función $[f(x)]^{g(x)}$ será siempre función elemental si lo son su base y su exponente, de modo que **será continua en su dominio** (por el Teorema 4), el cual estará formado por los puntos donde exista g (dominio de esta función) y a la vez donde f exista y tenga valores positivos, para que exista su logaritmo neperiano (lo cual será parte del dominio de f).

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Nota: Si llamamos D_g al dominio de g y llamamos D_f^+ a la parte del dominio de f donde esta función tenga valores positivos, el dominio de la potencial-exponencial será $D_g \cap D_f^+$ (supuesto no vacío).

Consecuencia 1: En el caso de una función potencial $[f(x)]^k$ (k real cualquiera distinto de 1 y de 0), con f elemental, la misma será continua en su dominio, el cual será **como mínimo** la parte del dominio de f donde esta función tenga valores positivos (ya que la función g del exponente es la constante k de dominio todo $\mathbb{R}$, con lo cual la intersección anterior resulta D_f^+). Sin embargo, hay casos particulares en que el dominio de $[f(x)]^k$ es todo el dominio de la función f , porque la potencia existe aunque la base sea negativa o cero (en estos casos no se aplica la identidad (1) mencionada). Así esto último ocurre si k es un número entero o si es un número fraccionario de denominador impar (en su fracción irreducible). En cambio, si k es irracional o es racional fraccionario con de-nominador par en su fracción irreducible, se tiene que exigir que los valores de f sean positivos para la existencia de la potencia como número real. (Ver Sección 1.2 para aclarar ideas).

Ejemplos: 1) La función $[\ln x]^3$ tiene dominio $(0, +\infty)$, que es todo el dominio del logaritmo, en vez de ser $(1, +\infty)$ que es la parte donde el logaritmo es positivo. 2) La función $(2x - 3)^{\frac{1}{3}}$ tiene dominio todo $\mathbb{R}$ y no el intervalo $(3/2, +\infty)$ donde la base es positiva. 3) Pero la función $(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$ no tiene dominio $\mathbb{R}$ (que es el dominio de $x^2 - 1$), sino tiene como dominio la unión de intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, donde se cumple la inecuación $x^2 - 1 > 0$.

Consecuencia 2: En el caso de una función exponencial $k^{g(x)}$ (k positivo diferente de 1), con g elemental, la misma será continua en su dominio, que coincidirá con el dominio de g . Ya que la función f de la base es la constante positiva k de dominio $\mathbb{R}$ y entonces ese mismo es el conjunto D_f^+ , con lo cual la intersección mencionada al principio de esta página resulta D_g .

Teoremas importantes sobre funciones continuas en intervalos

Para terminar, daremos tres teoremas muy famosos sobre funciones continuas, de gran importancia teórica y práctica:

TEOREMA DE BOLZANO: Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y además toma valores de signos contrarios en los extremos de dicho intervalo, existe al menos un punto $x = c$ en el intervalo (a, b) donde la función f se anula, o sea que $f(c) = 0$.

Puede ser $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ o bien $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Además, puede haber varios puntos intermedios del intervalo $[a, b]$ donde la función valga cero, pero el Teorema asegura que habrá al menos uno, con seguridad.

Nota 1: Bernard Bolzano fue un matemático checo que vivió entre los siglos XVIII y XIX.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Nota 2: Este Teorema es muy útil en la búsqueda de alguna de las posibles soluciones de una ecuación de la forma $\boxed{f(x) = 0}$. Pues si $f(x)$ es continua en un cierto intervalo cerrado donde se cumpla el cambio de signo, sabemos que existe al menos una solución de esa ecuación en el interior de dicho intervalo. Además, por subdivisiones sucesivas de ese intervalo se obtienen “aproximaciones por defecto” y “aproximaciones por exceso”, cada vez mejores, de esa solución. (Ver al respecto el Método de Bisección en la Sección 4.4 de esta página web).

Ejemplo: La ecuación $\boxed{\cos x = x}$ es equivalente a $\boxed{x - \cos x = 0}$, que es de la forma $\boxed{f(x) = 0}$, siendo la función $f(x) = x - \cos x$, continua en todo $\mathbb{R}$ (por ser elemental de dominio $\mathbb{R}$). Además observamos que en el intervalo $[0, \pi/2]$, donde la función es continua, se tiene $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ y se tiene $f(\pi/2) = (\pi/2) - \cos(\pi/2) = \pi/2 > 0$. Por tanto, el Teorema de Bolzano nos asegura que la ecuación dada inicialmente tiene al menos una solución c comprendida entre 0 y $\pi/2$. Para hallar algún valor numérico aproximado de esa solución c , habría que aplicar el mencionado Método de Bisección a este caso (con dicho método se pueden lograr tantas cifras decimales exactas de la solución c como queramos).

Si dibujamos las gráficas de las funciones básicas $y = \cos x$ e $y = x$, vemos que se cortan una sola vez en un punto P del plano cuya abscisa x es el valor c intermedio entre 0 y $\pi/2$ mencionado anteriormente, con lo cual vemos gráficamente que esa será la única solución de la ecuación $\cos x = x$ dada. (En efecto, los posibles puntos de corte de dos gráficas se obtienen analíticamente resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas definido por las ecuaciones de ambas gráficas; lo cual conduce en este caso, por igualación, a resolver la ecuación $\cos x = x$ dada inicialmente, para obtener los valores de x de esos puntos de corte).

Observación importante sobre el Teorema de Bolzano: Las condiciones de continuidad en $[a, b]$ y de signos diferentes en los extremos del intervalo **no son necesarias** para la existencia de algún punto c en (a, b) donde la función se anule, pues hay ejemplos donde falla una de esas condiciones o incluso ambas y sin embargo existe uno o existen varios puntos interiores del intervalo donde la función vale cero (por motivos distintos del Teorema de Bolzano). Por tanto, **ambas condiciones de la hipótesis del teorema solamente son condiciones suficientes** (nos garantizan que se cumplirá con seguridad la tesis del mismo). (Ver al respecto la Sección 10.2 de esta página web)

Ejemplo 1: La función $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 3)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, luego lo será en el intervalo $[0, 4]$, pero **no cambia de signo en sus extremos** pues $f(0) = 3$ y $f(4) = 3$. Y sin embargo, la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ **tiene dos soluciones interiores al intervalo $[0, 4]$:** $\boxed{c_1 = 1}$ y $\boxed{c_2 = 3}$.

Ejemplo 2: Sea la función $f(x)$ definida a trozos en todo $\mathbb{R}$ así: $f(x) = x^2$ si $x \in (-\infty, -\pi/2)$; $f(x) = \sin x$ si $x \in [-\pi/2, 3\pi/2]$; $f(x) = x$ si $x \in (3\pi/2, +\infty)$. Pues bien, **esta función no es continua en el intervalo $[-2, 5]$** , pues en dicho intervalo están los puntos $-\pi/2 \cong -1.57$ y $3\pi/2 \cong 4.71$ donde **la función dada no es continua al tener límites laterales diferentes** (ver nota a continuación), y sin embargo **la función se anula en dos puntos interiores del intervalo:** $\boxed{c_1 = 0}$, pues $f(0) = \sin 0 = 0$, y también $\boxed{c_2 = \pi}$, pues $f(\pi) = \sin \pi = 0$.

Nota: En el punto $-\pi/2$ se tiene

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^-} x^2 = \frac{\pi^2}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$$

Y en el punto $3\pi/2$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow (3\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow (3\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3\pi/2)^+} x = \frac{3\pi}{2}$$

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS: Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, dicha función alcanza en el intervalo todos los valores reales intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$, supuestos diferentes. Es decir, que si m es un valor real cualquiera que cumpla $f(a) < m < f(b)$ o bien $f(b) < m < f(a)$, existe al menos un punto $x = c$ en el interior del intervalo $[a, b]$ que cumple $f(c) = m$.

Es una consecuencia matemática del Teorema de Bolzano.

Este teorema también suele expresarse para un intervalo cualquiera I , diciendo que “si una función es continua en I , entre dos de sus valores alcanza siempre todos los intermedios”.

Y lo anterior implica otro resultado muy importante: “La imagen de un intervalo I , producida por una función continua en dicho intervalo, es siempre otro intervalo”, pues los intervalos son los únicos conjuntos de números reales que incluyen todos los valores intermedios entre dos cualesquiera de ellos.

Nota: Lo anterior incluye todo tipo de intervalos. Así, para la función $y = x^2$ continua en $\mathbb{R}$, la imagen del intervalo $[-3, 1]$ es el intervalo $[0, 9]$, la imagen de $(-\infty, +\infty)$ es $[0, +\infty)$ y la imagen de $(-4, -2]$ es $[4, 16)$. Para la función $y = 2^x$ continua en $\mathbb{R}$, la imagen de $(-\infty, 0]$ es $(0, 1]$ y la imagen de $[0, 3)$ es $[1, 8)$. Y para la función $y = \operatorname{tag} x$ continua en $(-\pi/2, \pi/2)$, la imagen de ese intervalo es $(-\infty, +\infty)$ y la imagen del intervalo $[\pi/6, \pi/3]$ es $[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, hay algún punto x_1 del intervalo donde la función toma su valor más pequeño m y hay algún punto x_2 del intervalo donde la función toma su valor más grande M . O sea, se cumple la relación $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, para todo x del intervalo $[a, b]$.

Nota 1: Habíamos dicho anteriormente que “la imagen de un intervalo I producida por una función continua en dicho intervalo, es siempre otro intervalo”; pues bien, este último teorema establece que “si I es cerrado y acotado, $f(I)$ también será un intervalo cerrado y acotado”, pues cuando es $I = [a, b]$ se tiene $f(I) = [m, M]$. Así, en los ejemplos de la nota anterior, la imagen por $f(x) = x^2$ de $[-3, 1]$ es $[0, 9]$ y la imagen por $g(x) = \operatorname{tag} x$ de $[\pi/6, \pi/3]$ es $[1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Nota 2: En el caso de que la función $f(x)$ sea constante sobre el intervalo $[a, b]$, los valores m y M coincidirán (con lo cual, tanto x_1 como x_2 serán cualquier punto del intervalo).

Nota 3: Karl Weierstrass fue un famoso matemático alemán del siglo XIX.

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

La definición ε, δ del concepto de límite finito (solamente para los que la necesiten)

La definición matemática rigurosa de que “el número real L es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende al punto a ” (escrito como sabemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$), es la siguiente:

“Para todo real positivo ε dado, existe algún número real positivo δ , de forma que si x es un valor perteneciente al dominio de f que cumpla $0 < |x - a| < \delta$, se cumplirá $|f(x) - L| < \varepsilon$ ”.

O en versión formalizada:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \text{Dom}(f) \text{ y } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

la cual se ve con frecuencia en los textos de Matemáticas, sin distinguir si el lector es estudiante de un Grado en Matemáticas o es un estudiante de otro grado universitario que requiera solamente cierta formación matemática como base para sus estudios.

Como el autor de los contenidos de esta página web explicó en sus objetivos iniciales, los mismos están orientados a este último grupo de alumnos universitarios. Por tanto, ha desechado en esta Sección el utilizar desde un comienzo las definiciones matemáticas formales de los distintos tipos de límites (ahora hemos dado solamente una, correspondiente al “límite finito en un punto”), estando seguro de que todo lo tratado se podrá entender más fácilmente de este modo (a pesar de la dificultad intrínseca del tema).

Ejemplo: Comprobar que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 9) = -5$, utilizando la definición $\varepsilon - \delta$.

Dado un ε positivo cualquiera, habrá que llegar a

$$|f(x) - L| = |(x^2 - 9) - (-5)| = |x^2 - 4| < \varepsilon$$

cuando tomemos $|x - 2|$ menor que un cierto δ positivo (dependiente de ε) sin que sea $x = 2$ (en este caso el dominio de la función $f(x) = x^2 - 9$ es todo $\mathbb{R}$, luego podemos despreocuparnos del mismo).

O sea, debemos tomar x en la unión de intervalos $(2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$, que es lo que significa $0 < |x - 2| < \delta$, con un δ suficientemente pequeño, para lograr que $|x^2 - 4|$ sea menor que el ε dado.

Pero $|x^2 - 4| = |(x - 2) \cdot (x + 2)| = |x + 2| \cdot |x - 2|$ y si tomamos inicialmente $\delta = 1$, será x mayor que 1 y menor que 3, pues el intervalo $(2 - \delta, 2)$ será el $(1, 2)$ y el intervalo $(2, 2 + \delta)$ será el $(2, 3)$. Por tanto, $x + 2$ será mayor que 3 y menor que 5 (suponemos $x \neq 2$), con lo cual tendremos $|x + 2| < 5$. O sea, ya hemos logrado $|x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2| < 5 \cdot |x - 2|$.

Basta finalmente tomar $0 < |x - 2| < \varepsilon/5$ para que resulte $|x^2 - 4| < \varepsilon$, como queríamos. Es decir, deberemos tomar un δ positivo menor o igual a $\varepsilon/5$, además de tomarlo menor o igual a 1 para que se cumpla también la desigualdad anterior. Por tanto, δ tendrá que ser menor o igual que el mínimo de 1 y $\varepsilon/5$.

Conclusión: Para todo ε positivo dado (por pequeño que sea), existe algún δ positivo (basta tomar δ menor que el menor de los dos valores 1 y $\varepsilon/5$), para que se cumpla $|(x^2 - 9) - (-5)| < \varepsilon$.