TIPOS DE DISCONTINUIDADES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisito: Límites y continuidad de funciones de una variable)

Las funciones reales de una variable real pueden tener puntos donde sean discontinuas, lo cual ocurre por motivos muy diferentes, en función de cómo sean los límites laterales de la función en el punto de que se trate. Según sea el motivo, las discontinuidades reciben distintos nombres que veremos a continuación.

Consideraremos siempre que el dominio de la función $f(x)$ es un intervalo o una unión de intervalos sin puntos comunes.

Para que la función $f(x)$ pueda ser continua en un punto $x = a$, dicho punto tiene que pertenecer al dominio de f . Pero esto no basta, pues en muchos casos la función resulta discontinua en puntos que pertenecen a su dominio (desde luego, esto no ocurre con las funciones básicas ni con las funciones elementales, las cuales siempre son continuas en sus respectivos dominios; pero sí le podrá ocurrir a funciones definidas a trozos, de uso muy frecuente; ver más adelante ejemplos 1, 2 y 4 de funciones definidas a trozos con discontinuidades en algunos puntos de su dominio).

Distinguimos cuatro tipos de puntos a considerar, con una posible discontinuidad de la función en cada uno de ellos (apartados A, B, C y D, donde en este último no hay discontinuidad):

A) Puntos $x = a$ interiores (o intermedios) de alguno de los intervalos del dominio de f, donde tienen sentido ambos límites laterales y hay valor de la función. Aquí tenemos seis casos (uno de continuidad y **cinco de discontinuidades diferentes**):

1) Cuando existan ambos límites laterales y sus valores coinciden con $f(a)$, la función será **continua** en $x = a$.

2) Cuando ambos límites laterales existan, **sean finitos y coincidan, pero no coincidan con el valor $f(a)$**, habrá una **"discontinuidad evitable"** en $x = a$.

3) Cuando ambos límites laterales existan y **sean finitos, pero sean diferentes**, habrá una "**discontinuidad de salto finito**" en $x = a$.

4) Cuando ambos límites laterales existan y **sean diferentes, pero alguno de ellos sea infinito o lo sean ambos**, habrá una "**discontinuidad infinita de salto**" en $x = a$ (habrá asíntota vertical de ecuación $x = a$).

5) Cuando ambos límites laterales existan y **coincidan, pero ambos sean infinitos**, habrá una "**discontinuidad infinita pero no de salto**" en $x = a$ (habrá asíntota vertical de ecuación $x = a$).

6) Finalmente, **cuando alguno de los límites laterales no exista por el comportamiento de la función f cerca del punto**, habrá una "**discontinuidad de segunda especie**" en $x = a$. (Ver NOTA FINAL en la pág. 4).

B) Puntos $x = a$ que no pertenecen al dominio de la función $f(x)$, pero que son el extremo derecho de uno de los intervalos del dominio y también el extremo izquierdo de otro de los intervalos del dominio.

Entonces la función no podrá ser continua en ese punto al no existir $f(a)$, pero tienen sentido ambos límites laterales de la función en dicho punto. Por tanto, en un punto de este tipo podremos tener alguno de **los mismos cinco tipos de discontinuidades que fueron descritas en el apartado A**). Por ejemplo, si el dominio de la función fuese $[0\,,3) \cup (3\,,5)$, el punto $x = 3$ sería de este tipo. No existe $f(3)$, pero tiene sentido considerar

$\lim_{x\to 3^-} f(x)$ y también lo tiene considerar $\lim_{x\to 3^+} f(x)$. Entonces, según sean estos límites laterales, la discontinuidad tendrá un nombre u otro de los cinco indicados en el apartado A): "Discontinuidad evitable" (donde la no coincidencia de los límites laterales con $f(a)$ será en este caso porque este valor no existe), "discontinuidad de salto finito", "discontinuidad infinita de salto" (con asíntota vertical $x = a$), "discontinuidad infinita pero no de salto" (con asíntota vertical $x = a$) y "discontinuidad de segunda especie".

C) Puntos $x = a$ que sean extremo de uno solo de los intervalos del dominio (el cual no se reduzca a un solo punto).

En estos puntos solamente tendrá sentido uno de los límites laterales de la función, el cual será el límite ordinario. Hay cuatro casos (uno de continuidad y **tres de discontinuidades diferentes**):

1) Cuando dicho límite lateral **exista y coincida con $f(a)$**, la función será **continua** en el punto $x = a$.

2) Cuando dicho límite lateral exista, **sea finito y diferente a $f(a)$ o bien este valor no exista**, habrá una "**discontinuidad evitable**" en el punto $x = a$.

3) Cuando dicho límite lateral **exista y sea infinito**, habrá una "**discontinuidad infinita**" en $x = a$ (habrá asíntota vertical en ese punto).

4) Finalmente, cuando dicho límite lateral **no exista por el comportamiento de la función cerca del punto**, habrá una "**discontinuidad de segunda especie**" en $x = a$.

D) Puntos $x = a$ "aislados" del dominio (que constituyen por sí solos intervalos del dominio del tipo $[a\,,a] = \{a\}$, los cuales se reducen a ese único punto y estarán separados de los demás intervalos).

Para estos puntos no tiene sentido el límite de la función por su derecha ni el límite de la función por su izquierda, luego tampoco tiene sentido el límite ordinario. Solamente por existir el valor $f(a)$, **la función es continua** (ver Sección 2.4 de esta página web, donde se estableció así), luego **aquí no hay casos de discontinuidad**.

Ejemplo 1: La función no elemental $y = \begin{cases} e^x, & si\ \ x < 0 \\ sen\,x, & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$ posee una "discontinuidad de salto finito" en el punto $x = 0$ (punto interior del dominio, que es $\mathbb{R}$, luego corresponde al caso A).

En efecto, $\underset{x\to 0^-}{lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{lím}\, e^x = e^0 = 1$ y $\underset{x\to 0^+}{lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{lím}\, sen\,x = sen\,0 = 0$

Aquí $f(0) = sen\,0 = 0$. Por tanto, la función es solamente "continua por la derecha" en $x = 0$. Pero si hubiésemos dado el valor de la función en $x = 0$ aparte, sin coincidir con el que da $sen\,x$, podría no haber sido continua por la derecha ni continua por la izquierda, o solamente haber sido "continua por la izquierda" si damos $f(0) = e^0 = 1$).

Ejemplo 2: La función no elemental $y = \begin{cases} cos\,x\,, & si\ \ 0 < x \leq \pi \\ ln(x-\pi)\,, & si\ \pi < x \leq 5 \end{cases}$ posee una "discontinuidad infinita de salto" en el punto $x = \pi$ (punto interior del dominio que es $(0\,,5]$, luego corresponde también al caso A).

En efecto, $\underset{x\to \pi^-}{lím} f(x) = \underset{x\to \pi^-}{lím}\, cos\,x = cos\,\pi = -1$ y $\underset{x\to \pi^+}{lím} f(x) = \underset{x\to \pi^+}{lím}\, ln(x-\pi) = -\infty$

Aquí $f(\pi) = \cos\pi = -1$. Luego la función es solamente "continua por la izquierda" en $x = \pi$. Además, la gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = \pi$.

Ejemplo 3: La función elemental $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ posee una "discontinuidad infinita pero no de salto" en el punto $x = 2$ (punto que no pertenece al dominio, pero es extremo derecho de un intervalo del dominio y también extremo izquierdo de otro intervalo del dominio, el cual es $(-\infty\,, 2) \cup (2\,, +\infty)$, luego corresponde al caso B).

En efecto, $$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Aquí no hay continuidad por la derecha ni por la izquierda. La gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = 2$.

Ejemplo 4: La función no elemental $y = -\frac{2}{(x+3)^4}$ (si $x \neq -3$) y $f(-3) = 2$ (no es elemental porque se ha dado el valor $f(-3)$ aparte, con lo cual la función no viene dada por una sola ecuación), posee una "discontinuidad infinita pero no de salto" en el punto $x = -3$ (punto interior del dominio que es $\mathbb{R}$, luego corresponde al caso A).

En efecto, $$\lim_{x\to -3^-} \left[-\frac{2}{(x+3)^4}\right] = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^+} \left[-\frac{2}{(x+3)^4}\right] = -\infty$$

Aquí no hay continuidad por la derecha ni por la izquierda. La gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = -3$.

Ejemplo 5: La función elemental $y = \frac{x}{(x-4)^3}$ posee una "discontinuidad infinita de salto" en $x = 4$ (punto que no pertenece al dominio, que es $(-\infty\,, 4) \cup (4\,, +\infty)$, luego corresponde nuevamente al caso B).

En efecto, $$\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{(x-4)^3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{x}{(x-4)^3} = +\infty$$

La gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = 4$.

Ejemplo 6: La función elemental $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ posee una "discontinuidad evitable" en el punto $x = 1$ (que no pertenece al dominio, el cual es $(-\infty\,, -1) \cup (-1\,, 1) \cup (1\,, +\infty)$) y posee una "discontinuidad infinita de salto" en el punto $x = -1$ (que tampoco pertenece al dominio). Ambos puntos, $x = -1$ y $x = 1$, están en el caso B).

En efecto, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$, lo cual vale para ambos límites laterales, que son entonces coincidentes; pero no existe $f(1)$, luego hay "discontinuidad evitable" en $x = 1$.

Tenemos además, $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = +\infty$ (pues el numerador tiende a 6 y el denominador tiende a cero siendo positivo, ya que al ser $x < -1$ será $|x| > 1$ y entonces $x^2 > 1$). Y tenemos por otro lado, $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = -\infty$ (pues el numerador tiende a 6 y el denominador tiende a cero siendo negativo, ya que al ser $x > -1$, podremos suponer que sea también $x < 0$, con lo cual $|x| < 1$ y entonces $x^2 < 1$). Por tanto, en $x = -1$ los límites laterales son infinitos diferentes, luego hay "discontinuidad infinita de salto". Por tanto, la gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = -1$.

Nota: Obsérvese que podríamos haber definido la función anterior añadiendo aparte valores en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ (con lo cual dejaría de ser elemental). Por ejemplo, podríamos decir que $f(1) = A$ y $f(-1) = B$, con lo cual el dominio de la función sería todo $\mathbb{R}$. Ahora bien, si eligiésemos $A = -1/2$, la función pasaría a ser continua en $x = 1$ (por ello, la discontinuidad que teníamos antes se llama "evitable"), y si diésemos otro valor a A, seguiría habiendo una "discontinuidad evitable" en el punto $x = 1$. En cambio, la función seguirá teniendo una "discontinuidad infinita de salto" en el punto $x = -1$, independientemente del valor que le demos a B (por ello esta discontinuidad se suele llamar "esencial", pues no hay forma de cambiarla dando algún valor a la función en el punto donde se presenta). Todas las discontinuidades, salvo las "evitables", se pueden llamar "esenciales" por este mismo motivo.

Ejemplo 7: Sea la función elemental $y = ln\, x$ de dominio el intervalo $(0\,, 3)$. Esta función posee una "discontinuidad infinita" en $x = 0$ y una "discontinuidad evitable" en $x = 3$. Ambos puntos, 0 y 3, están en el caso C visto al principio, o sea, son extremos de un intervalo del dominio (en este caso, extremos no pertenecientes del único intervalo del dominio).

En efecto, se tiene $\lim_{x \to 0^+} ln\, x = -\infty$ y $\lim_{x \to 3^-} ln\, x = ln\, 3$

Aquí los valores $f(0)$ y $f(3)$ no existen, pero si agregásemos el valor $f(3) = ln\, 3$, tomando como dominio el intervalo $(0\,, 3]$, la función sería continua en $x = 3$. (El valor $f(0)$ no podría agregarse tomando solamente como dominio el intervalo $[0\,, 3]$ y dejando la misma expresión $y = ln\, x$, pues $ln(0)$ no existe; habría que dar aparte el valor $f(0) = A$, con lo cual la función dejaría de ser elemental, pero seguiría teniendo una "discontinuidad infinita" en $x = 0$, independientemente del valor de A).
En todo caso, la gráfica posee asíntota vertical de ecuación $x = 0$ (el eje OY).

NOTA FINAL: Hemos dicho repetidamente que un límite lateral puede no existir, teniendo sentido, según cómo se comporten los valores de la función en un intervalo arbitrariamente pequeño correspondiente a dicho límite (o sea, de la forma $(a\,, a + \delta)$ para un límite por la derecha en el punto $x = a$, o bien de la forma $(a - \delta\,, a)$ para un límite por la izquierda en $x = a$).

Pongamos un solo ejemplo en que esto ocurre (y como éste, hay muchos más):

Sea la función $f(x) = sen(1/x)$ con dominio reducido al intervalo $(0\,, 1)$, donde $1/x$ existe siempre y donde la función compuesta $sen(1/x)$ también existe siempre.
Al ser f una función elemental, será continua en su dominio, luego será continua en todos los puntos del intervalo $(0\,, 1)$.
Veamos qué ocurre con el límite por la derecha de esta función en el punto $x = 0$, el cual tiene perfecto sentido pues existe un intervalo de la forma $(0\,, \delta)$ contenido en el dominio de f (como se estableció en la Sección 2.4 sobre "Límites y continuidad de funciones de una variable" para que tuviese sentido ese límite lateral). En este caso, ese intervalo es cualquiera de la forma anterior con $0 < \delta \leq 1$.

Pero **¿cómo se comportan los valores de la función a medida que se tome x en $(0\,,1)$ y cada vez más cerca de cero?**
Pues observamos que $1/x$ crecerá cada vez más **tendiendo a** $+\infty$, con lo cual los valores de la función, al ser $f(x) = sen(1/x)$, oscilarán infinitas veces entre -1 y 1, pasando por cero infinitas veces (cada vez que $1/x$ alcance un valor que sea múltiplo entero positivo de π, o sea, π, 2π, 3π, etc…); llegando a 1 infinitas veces (cada vez que $1/x$ alcance algún valor de la forma $\pi/2 + 2k\pi$, con k entero positivo o cero), y llegando a -1 infinitas veces (cada vez que $1/x$ alcance algún valor de la forma $3\pi/2 + 2k\pi$, con k entero positivo o cero).
Y lo que ocurre en $(0\,,1)$ seguirá ocurriendo en cualquier intervalo $(0\,,\delta)$ por pequeño que éste sea (quedando excluidos, entonces, muchos de los valores iniciales de $1/x$ mencionados anteriormente para que $sen(1/x)$ valga 0, valga 1 o valga -1; pero seguirá habiendo infinitos valores de $1/x$ que darán esos valores a la función y todos los valores intermedios).
De este modo vemos que, cuando $x \to 0^+$, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número L (pues tendrían que estabilizarse alrededor de L, siendo cada vez más próximos a dicho número, y esto no lo hacen por seguir oscilando siempre del mismo modo) y tampoco tendrán un límite infinito (pues los valores absolutos de la función no superan el valor 1).

Conclusión: **El límite por la derecha de la función dada en $x = 0$ no existe, como consecuencia del comportamiento de los valores de la función en cualquier intervalo de la forma $(0\,,\delta)$, por pequeño que sea**.
