SUCESIONES NUMÉRICAS

(Prerrequisitos: Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad de funciones de una variable. Regla de L'Hôpital. Infinitésimos)

Introducción

La idea de "sucesión" en la vida real es la de un conjunto de objetos, situados uno tras otro en un cierto orden, con lo cual dichos objetos de la "sucesión" ocuparán ciertas posiciones en la misma (habrá un objeto que ocupe la primera posición, otro objeto que ocupe la segunda posición, etc…). Así, lo que llamamos "una cola de personas" es una "sucesión de personas" y "una cola de automóviles" es una "sucesión de automóviles". Las "sucesiones" de la vida real son necesariamente de un número finito de objetos, siendo siempre esos objetos distintos entre sí.

En cambio, una "sucesión numérica" tiene siempre **infinitas posiciones** ocupadas por números, **permitiéndose que esos números puedan ser diferentes o iguales** (es decir, un mismo número puede aparecer en una "sucesión numérica" en diferentes posiciones, como si una misma persona pudiese aparecer varias veces en una misma cola). Por tanto, en una "sucesión numérica" no sólo importan los números que aparezcan, sino también las posiciones que ocupen.

Por ejemplo, una "sucesión numérica" puede ser 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1,….. (y así sucesivamente, o sea que las posiciones impares están ocupadas por los números naturales 1, 2, 3, 4,…. y las posiciones pares están ocupadas únicamente por el número 1, que es el único en este caso que se repite infinitas veces). Y otra "sucesión numérica" puede ser 5, 5, 5, 5, …. , donde todos las posiciones están ocupados por el único número 5.

Atención: En el lenguaje común utilizamos muchas veces la palabra "serie" como sinónimo de "sucesión". Así hablamos de "una cola de personas" como "una serie de personas" en vez de "una sucesión de personas". Pero en Matemáticas, la idea de "serie" es diferente a la de "sucesión" (**"serie numérica" significa la suma indicada de los elementos de una "sucesión numérica"**). Así, "la sucesión" de los números enteros positivos es: 1, 2, 3, 4, 5,…. y "la serie" de los números enteros positivos es la expresión: 1+2+3+4+5+…. (Las "series numéricas" serán tratadas en la Sección 4.9).

Conceptos básicos

Matemáticamente, se llama "sucesión de números reales" a **una función cualquiera del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales** (o sea, el dominio de la función será siempre $\mathbb{N}$ y el recorrido o imagen de esa función será siempre una parte del conjunto de los números reales). Así, en una determinada sucesión, la imagen del número natural 1 será el primer número de esa sucesión (llamado su "primer término"), la imagen del número natural 2 será el segundo número de esa sucesión (llamado su "segundo término"), etc…

Si la función fuese del conjunto $\mathbb{N}$ en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, resultaría una "sucesión de números complejos". (Aquí trabajaremos sólo con "sucesiones de números reales", así que al decir "sucesión numérica" deberá entenderse "sucesión de números reales"; no "sucesión de números complejos").

SUCESIONES NUMÉRICAS

Nota: Muchas veces la función que define una "sucesión de números reales" puede interpretarse como una restricción a $\mathbb{N}$ de una cierta función real de una variable real cuyo dominio sea un intervalo de $\mathbb{R}$ que contenga a todos los números naturales, como puede ser el intervalo $[1\,,+\infty)$ u otro mayor. Por ejemplo, la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, … , n^2, … es la restricción a $\mathbb{N}$ de la función real de variable real $f(x) = x^2$ con dominio el intervalo $(-\infty\,,+\infty)$.

En una sucesión cualquiera la imagen del 1 se representa con una letra acompañada del subíndice 1 (como a_1 o b_1) y se llama "primer término de la sucesión", la imagen del 2 se representará entonces por a_2 (o b_2) y se llama "segundo término de la sucesión", etc… Y la imagen de un número natural indeterminado n se representará por a_n (o b_n) y se llama "término general de la sucesión", porque representa a uno cualquiera al darle valores a la variable n.

Y la definición del término general puede darse "en forma explícita" (similar a la de muchas funciones de variable real x, pero ahora con variable n) o "en forma recurrente" (que significa apoyándose en otros términos anteriores o apoyándose en los términos de otras sucesiones).

Por ejemplo, en la sucesión de cuadrados de los números naturales dada anteriormente es $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, …. , es $\boxed{a_n = n^2}$ para todo n (luego está definida "en forma explícita"). Pero la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …. , es $\boxed{a_n = a_{n-2} + a_{n-1}}$ para $n > 2$, siendo $\boxed{a_1 = 1}$ y $\boxed{a_2 = 1}$, luego está definida "en forma recurrente" (se llama sucesión de Fibonacci y es famosa en Matemáticas). Obsérvese que empieza 1, 1, pero el tercer término es la suma de los dos primeros, el cuarto término es la suma del segundo y el tercero, etc…

Nota: Si la función que define a una sucesión es inyectiva sobre el conjunto $\mathbb{N}$, todos sus términos tendrán valores numéricos diferentes. Pero si no es inyectiva, habrá términos diferentes que tendrán el mismo valor numérico (o sea, tendremos números reales que aparecen varias veces o infinitas veces en la sucesión como términos diferentes). El caso extremo de no inyectividad corresponde a las sucesiones constantes, donde todos sus términos coinciden en valor numérico.

Por ejemplo, la sucesión dada anteriormente está definida por la función real de variable real x^2 que no es inyectiva en todo el dominio $(-\infty\,,+\infty)$, pero que si lo es en el intervalo $[0\,,+\infty)$, con lo cual lo será en el conjunto $\mathbb{N}$ y por ello tiene todos sus términos diferentes. En cambio, la primera sucesión que pusimos como ejemplo (ver Introducción en la página anterior) está definida por una función no inyectiva sobre $\mathbb{N}$, pues las imágenes de los números naturales 1 y 2 (que son sus dos primeros términos) coinciden en valor numérico, además de coincidir con las imágenes de todos los números naturales pares.

Cualquier sucesión se representa así: $a_1\,, a_2\,, a_3\,, \ldots, a_n\,, \ldots$ o en forma abreviada como sucesión $\{a_n\}$. Y otra sucesión se representaría por ejemplo: $b_1\,, b_2\,, b_3\,, \ldots, b_n\,, \ldots$ o sucesión $\{b_n\}$. Antepondremos a las notaciones abreviadas la palabra sucesión, porque la sola notación $\{a_n\}$ puede interpretarse como el conjunto formado por el único elemento a_n; sin embargo, omitiremos la palabra sucesión cuando no haya ese peligro. A veces basta dar suficientes términos iniciales de una sucesión para que se vea la ley de formación de los mismos y entonces puede omitirse el término general (de hecho, se hace mucho).

Ejemplos:

SUCESIONES NUMÉRICAS

1) La sucesión de los números enteros positivos se representa 1, 2, 3, 4,…, n ,… o bien diciendo la sucesión $\{n\}$. (Definición explícita del término general: $\boxed{a_n = n}$ para todo n).

2) La sucesión $1,-1,1,-1,1,-1,\ldots.$ queda así definida, pues entendemos que los términos que ocupan posiciones impares valen siempre 1 y los términos que ocupan posiciones pares valen siempre -1. Pero su término general puede definirse como: $\boxed{a_n = 1}$ si n es impar y $\boxed{a_n = -1}$ si n es par (definición explícita "a trozos", con dos expresiones). Pero también su término general puede definirse como $\boxed{a_n = (-1)^{n+1}}$ para todo n (con una sola expresión explícita).

3) En otra sucesión que mencionamos anteriormente 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5,…… puede definirse su término general así: $\boxed{a_n = 1}$ si n es par y $\boxed{a_n = (n+1)/2}$ si n es impar (el número siguiente de un impar es par, luego su división por 2 da entero). Podemos comprobar el buen funcionamiento de la expresión dada para n impar: $a_1 = (1+1)/2 = 1$, $a_3 = (3+1)/2 = 2$, $a_5 = (5+1)/2 = 3$, y así sucesivamente. (Tenemos aquí otra definición explícita "a trozos" del término general, con dos expresiones).

4) La ya mencionada sucesión de Fibonacci, empieza de este modo 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,….. lo cual ofrece dudas acerca de la ley de formación de sus términos. Sin embargo, podemos darnos cuenta que la suma de los dos primeros términos da el tercero, que la suma del segundo y el tercero da el cuarto, que la suma del tercero y el cuarto da el quinto, etc… (esa es su ley de formación). En este caso la mejor manera de definir el término general es en "forma recurrente": $\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$ para todo $n > 2$, siendo de $a_1 = a_2 = 1$.

5) Otra definición recurrente es la que establece la "sucesión de medias aritméticas" de otra sucesión dada previamente. Si ésta es $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, la sucesión de sus medias aritméticas será $a_1, (a_1+a_2)/2, (a_1+a_2+a_3)/3$, ... con lo cual tenemos la "definición recurrente": $\boxed{b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n}$ para todo n.

Límite de una sucesión

Al ser una sucesión numérica una función real de dominio ℕ, la única posibilidad de considerar un límite para dicha función es con n tendiendo a $+\infty$. En efecto, el conjunto ℕ de los naturales está formado por "puntos aislados" (pues no hay otro punto del conjunto en un entorno suficientemente pequeño de cualquiera de ellos), luego no tiene sentido hablar de límite de dicha función con n tendiendo a un valor real. Tampoco puede hablarse de su límite cuando n tiende a $-\infty$, por ser n siempre positivo. Pero dado un número real positivo K, por grande que sea, existen infinitos números naturales mayores que K, luego tiene perfecto sentido hablar del límite de la sucesión cuando n tiende a $+\infty$ (el cual podrá existir o no existir, y en caso de existir podrá ser un número real o podrá ser infinito).

MUY IMPORTANTE: En el caso de límite el número real L, escribimos $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = L}$ (de modo que a_n llegará a estar tan cerca de L como queramos, cuando se tome n suficientemente grande) y en el caso de límite infinito, escribimos $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$ (si se cumple que a_n llegará a ser mayor que cualquier número positivo elegido, por grande que éste sea, cuando se tome n suficientemente grande), o escribimos $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$ (si se cumple que a_n llegará a ser menor que cualquier número negativo elegido, por grande que sea su valor absoluto, cuando se tome n suficientemente grande) o bien escribimos $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty}$ (si el valor absoluto de a_n llegará a ser mayor que cualquier número positivo elegido, cuando se tome n suficientemente grande, ocurriendo que **no todos** los términos de la sucesión sean positivos desde uno en adelante **ni todos** los términos sean negativos desde uno en adelante, o sea, que siempre habrá mezcla de términos positivos y términos negativos por mucho que avancemos en la sucesión).

Ejemplos: La sucesión $\{(2n-8)/(3n+5)\}$ tiene límite el número $L = 2/3$ (ver Nota importante más abajo). La sucesión $\{n^2\}$ tiene límite $+\infty$. La sucesión $\{-n\}$ tiene límite $-\infty$. Y la sucesión que cumple $a_n = n^2$ si n es impar y cumple $a_n = -n$ si n es par (que es 1, -2, 9, -4, 25, -6, 49,…..) tiene límite $\pm\infty$.

Nota importante: En los casos en que la sucesión sea la restricción a ℕ una función real de variable real $f(x)$, con dominio un intervalo de ℝ que incluya a todos los números naturales, el límite que ésta tenga cuando x tienda a $+\infty$ será directamente el límite de la sucesión. Pues los términos de la sucesión serán una parte de los valores que toma la función de variable real $f(x)$ y si estos valores tienen un comportamiento determinado cuando se hace crecer x indefinidamente, este mismo comportamiento (pero a saltos) tendrán los términos de la sucesión. Por ejemplo, sabemos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-8}{3x+5} = \frac{2}{3}$, luego es $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-8}{3n+5} = \frac{2}{3}$. Y sabemos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+5x}{7-2x^2} = -\infty$, luego tenemos $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+5n}{7-2n^2} = -\infty$. (Ver límites de cocientes de polinomios cuando $x \to +\infty$ en la Sección 2.4).

Si existe el límite de una sucesión $\{a_n\}$ y éste es un número real L, la sucesión se llama "convergente a L" o simplemente "convergente".

Si existe el límite de una sucesión $\{a_n\}$ y es $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, la sucesión se llamará "divergente a $+\infty$", "divergente a $-\infty$" o "divergente a $\pm\infty$" o simplemente "divergente".

Y si no existe el límite de la sucesión, ésta se llamará "oscilante". Por ejemplo, la sucesión $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ es oscilante (no tiene límite un número, no tiene límite $+\infty$, no tiene límite $-\infty$ ni tiene límite $\pm\infty$).

La condición de "convergente", "divergente" u "oscilante" de una sucesión se llama "su carácter" (por tanto, cuando nos pidan "estudiar el carácter de una sucesión dada", lo que nos preguntan es si la sucesión es convergente, si es divergente o si es oscilante).

Nota: Cuando se escribe $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$ algunos textos suponen que se trata de límite $+\infty$, pero nosotros supondremos que se trata de cualquiera de las tres alternativas anteriores donde no se está especificando el signo de ∞; sin embargo, la escritura $n \to \infty$ sí significa $n \to +\infty$ porque no hay otra posibilidad y nos ahorramos escribir el signo.

Algunas propiedades importantes:

SUCESIONES NUMÉRICAS

1) Es importante saber que la eliminación o el añadido de un número finito de términos (que sean consecutivos o no lo sean) en una sucesión cualquiera, determinará otra sucesión con el mismo carácter de la anterior, y que tendrá también el mismo límite si la sucesión inicial fuese convergente o divergente. Pues el carácter de una sucesión cualquiera solamente depende de los términos que ocupen lugares suficientemente avanzados en la misma, con lo cual la nueva sucesión obtenida (con términos de menos o términos de más) tendrá el mismo carácter que la inicial, pues entre sus términos muy avanzados ya no estarán dichos términos.

2) También ocurre que una alteración cualquiera del orden de los términos iniciales de una sucesión, hasta uno determinado, produce otra sucesión con el mismo carácter (y con el mismo límite si éste existe). Por la misma razón anterior.

3) Dada una sucesión $\{a_n\}$, se llama "subsucesión de la misma" a cualquier otra cuyos términos sean una infinidad de los que tenía $\{a_n\}$, situados en el mismo orden inicial. Es muy importante saber entonces que si $\{a_n\}$ es convergente o divergente a $+\infty$ o $-\infty$, toda subsucesión de $\{a_n\}$ tendrá siempre el mismo carácter y el mismo límite. Y que si hay dos subsucesiones de $\{a_n\}$ que tengan diferente carácter o que tengan límites distintos, la sucesión $\{a_n\}$ será oscilante (salvo que dichos límites diferentes sean solamente $+\infty$ y $-\infty$, en cuyo caso $\{a_n\}$ será divergente a $\pm\infty$). Y, recíprocamente, si una sucesión es oscilante tendrá al menos dos subsucesiones con límites diferentes.

Ejemplos:

1) La sucesión $\{1/n\}$ es convergente de límite cero (fijado un entorno $(-\delta\,,\delta)$ del valor 0, todos los términos de la sucesión suficientemente avanzados, o sea desde un índice n en adelante, quedarán en dicho entorno por pequeño que éste sea).

2) La sucesión $\{n\}$ es divergente de límite $+\infty$ (fijado un valor positivo K, todos los términos de la sucesión suficientemente avanzados serán mayores que K, por grande que éste sea).

3) La sucesión $\{-n\}$ es divergente de límite $-\infty$ (fijado un valor negativo $-$K, todos los términos de la sucesión suficientemente avanzados serán menores que $-$K, por pequeño que sea este valor, o sea, por grande que sea su valor absoluto K).

4) La sucesión $\{(-1)^n \cdot n\}$ es divergente de límite $\pm\infty$ (fijado un valor positivo K, los valores absolutos de todos los términos suficientemente avanzados serán mayores que K, por grande que éste sea, y además entre los mismos habrá siempre positivos y negativos). Obsérvese que la sucesión comienza -1, 2, -3, 4, -5, 6,… con lo cual los términos que ocupan posiciones pares forman una subsucesión de límite $+\infty$ y los términos que ocupan posiciones impares forman otra subsucesión de límite $-\infty$.

5) La sucesión $\{(-1)^n\}$ es oscilante. Comienza -1, 1, -1, 1, -1, 1,….. con lo cual su límite no es 1, porque no todos sus términos desde uno en adelante quedan en un entorno suficientemente pequeño de 1 (sólo quedan los que ocupan posiciones pares); tampoco su límite es -1, porque no todos sus términos desde uno en adelante quedan en un entorno suficientemente pequeño de -1 (sólo quedan los que ocupan posiciones impares); tampoco su límite puede ser $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, porque ninguno de sus términos es mayor que K $= 2$ y ninguno de sus términos es menor que $-$K $= -2$, y tampoco su límite podrá ser un número real cualquiera L, diferente de 1 y -1, porque en un entorno suficientemente

pequeño de L no quedará ningún término de la sucesión. Nótese que la subsucesión que forman sus términos de lugares impares es $-1,\ -1,\ -1,\ \ldots\ldots$, tiene límite -1. Y la subsucesión de sus términos de lugares pares es $1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots$, tiene límite 1 (tenemos entonces dos subsucesiones con límites diferentes y la propiedad 3) anterior establece que la sucesión dada es oscilante).

6) La sucesión vista al principio 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1,…. también es oscilante, pues tiene una subsucesión con límite 1 (la formada por los términos que ocupan lugar par) y tiene otra subsucesión con límite $+\infty$ (la formada por los términos que ocupan lugar impar).

7) La sucesión $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ parece oscilante por los cambios de signos entre términos que ocupan lugares pares e impares, pero es convergente de límite cero (pues todos sus términos, desde uno en adelante, quedan en un entorno prefijado $(-\delta\ ,\delta)$ del valor $L = 0$, por pequeño que sea este entorno).

El número e

Una sucesión muy importante que es convergente y tiene como límite el número irracional e (llamado así en honor al gran matemático suizo Leonhard Euler, que vivió en el siglo XVIII) es la que tiene por término general $a_n = (1 + 1/n)^n$. Recordemos que la escritura decimal del número e es 2’718281828459045…. Pues bien, los cuatro primeros términos de la sucesión que hemos dicho son: 2, 2’25, 2’370370… y 2’441406… . Y los términos que ocupan las posiciones 50, 100 y 1000 son respectivamente 2’691588… , 2’704813… y 2’716923… . Vemos la aproximación poco a poco hacia el valor del límite.

Más general, la sucesión $\{a_n\} = \{(1 + k_n/b_n)^{b_n}\}$ tiene por límite e^K, si $\{b_n\}$ es divergente y $\{k_n\}$ es convergente de límite K (se darán las explicaciones correspondientes en la pág. 16). Como caso particular, si el término general es $(1 - 1/n)^n$ el límite es e^{-1}, pues aquí $k_n = -1$ para todo n (luego $K = -1$) y $b_n = n$, luego b_n diverge a $+\infty$.

Propiedades de los límites de las sucesiones

1) El límite de una sucesión convergente es único.

2) Toda sucesión constante es convergente y su límite es esa constante.

3) Sean dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergentes de límites respectivos A y B. Entonces, si es $A < B$, desde un cierto n en adelante será $a_n < b_n$. En particular, al comparar con la sucesión constante cero de límite cero, se tiene: Si una sucesión es convergente y tiene límite positivo, todos sus términos serán positivos desde uno en adelante. Y si el límite de una sucesión es negativo, todos sus términos serán negativos desde uno en adelante.

4) Sean dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que cumplen $\boxed{a_n \leq b_n}$ para todos los valores de n suficientemente grandes. Entonces puede suceder: a) Que sean ambas sucesiones convergentes de límites respectivos A y B, cumpliéndose entonces A ≤ B. b) Si la sucesión $\{a_n\}$

sabemos que es divergente a $+\infty$, la sucesión $\{b_n\}$ también será divergente a $+\infty$. c) Si la sucesión $\{b_n\}$ sabemos que es divergente a $-\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ también será divergente a $-\infty$.

Nota: Es importante saber que, aunque las dos sucesiones sean convergentes y se cumpla $a_n < b_n$ para todos los valores de n suficientemente grandes, podría suceder que sus límites A y B coincidan.
Un ejemplo es $a_n = n/(n+1)$ y $b_n = (n+1)/n$. Está claro que $a_n < 1 < b_n$, luego $a_n < b_n$ para todo n y sin embargo ambas sucesiones tienen límite 1 (lo veremos en la propiedad 8).

5) Consecuencias de lo dicho anteriormente son las propiedades: "Toda sucesión convergente que tenga todos sus términos positivos desde uno en adelante, tendrá límite positivo o cero" y "toda sucesión convergente que tenga todos sus términos negativos desde uno en adelante, tendrá límite negativo o cero".

6) Una propiedad obvia pero que tiene su importancia es la siguiente: Si los términos generales de tres sucesiones cumplen la condición $\boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$ para todos los valores de n suficientemente grandes, y se sabe que las sucesiones a_n y c_n tiene el mismo límite (puede ser L, $+\infty$ o $-\infty$), la sucesión $\{b_n\}$ tendrá el mismo límite que ambas.
Esto es útil, porque a veces $\{b_n\}$ tiene cierta complicación y se descubren dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ que cumplen la relación exigida teniendo además el mismo límite, con lo cual se sabe lo que le ocurre a $\{b_n\}$.
Un ejemplo podría ser $b_n = (\cos n)/n$, con lo cual podemos tomar $a_n = -1/n$ y $c_n = 1/n$. Al ser siempre $-1 \leq \cos n \leq 1$ y ser $n > 0$, será $-1/n \leq (\cos n)/n \leq 1/n$ para todo n; pero los límites de $-1/n$ y $1/n$ coinciden (valen cero, como indica la propiedad 8); por lo tanto, la sucesión $\{(\cos n)/n\}$ es convergente de límite cero.

7) Caso particular importante de la propiedad anterior es: Si la sucesión $\{b_n\}$ es de términos no negativos y la sucesión $\{c_n\}$ (de términos mayores o iguales) tiene límite cero, la sucesión $\{b_n\}$ también tendrá límite cero (pues es $0 \leq b_n \leq c_n$). Y otro caso particular es: Si la sucesión $\{b_n\}$ es de términos no positivos y la sucesión $\{a_n\}$ (de términos menores o iguales) tiene límite cero, la sucesión $\{b_n\}$ también tiene límite cero (pues en este caso es $a_n \leq b_n \leq 0$).

8) Si el término general de una sucesión es $\boxed{a_n = P_r(n)/Q_s(n)}$, donde el numerador es un polinomio de grado r en la variable n y el denominador es otro polinomio de grado s en la variable n, la sucesión correspondiente será convergente con límite cero si $r < s$, será divergente si $r > s$ y será convergente con límite el cociente a/b si $r = s$, siendo a el coeficiente de la mayor potencia de n en el polinomio del numerador y b el coeficiente de la mayor potencia de n en el polinomio del denominador (propiedad totalmente análoga a la conocida para funciones racionales fraccionarias, donde allí podía ser $x \to +\infty$ o bien $x \to -\infty$ y aquí sólo vale $n \to +\infty$).

Teorema fundamental de las sucesiones monótonas

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es "monótona creciente" si se cumple $a_n \leq a_{n+1}$ para todo índice n. Es decir: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$. Una sucesión de este tipo sólo puede ser convergente o divergente a $+\infty$. Ejemplo: La sucesión de los números naturales es monótona creciente y como siempre se cumple $a_n < a_{n+1}$ le diremos "estrictamente creciente".

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es "monótona decreciente" si se cumple $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n. O sea: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. Una sucesión de este tipo sólo puede ser convergente o divergente a $-\infty$. Ejemplo: La sucesión $\{1/n\}$ es monótona decreciente y como siempre se cumple $a_n > a_{n+1}$ le diremos "estrictamente decreciente". Una sucesión monótona decreciente que no sea "estrictamente decreciente" puedría ser 10, 9, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 5, …. (monótona decreciente, porque la diferencia $a_{n+1} - a_n$ es siempre -1 o 0, con lo cual tiene términos consecutivos iguales).

Se dice que una sucesión es "monótona" si es "monótona creciente" o es "monótona decreciente".

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ "está acotada inferiormente" si existe un número real K_1 de modo que se cumpla $K_1 \leq a_n$ para todo n. (K_1 se llama una cota inferior de la sucesión; al haber una cota inferior hay otras infinitas, pues cualquier número menos que K_1 será otra cota inferior). Ejemplo: La sucesión $\{n^3\}$ está acotada inferiormente por $K_1 = 0$, pero también por $K_1 = -2$.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ "está acotada superiormente" si existe un número real K_2 de modo que se cumpla $a_n \leq K_2$ para todo n. (K_2 se llama una cota superior de la sucesión; al haber una cota superior hay otras infinitas, pues cualquier número mayor que K_2 será otra cota superior). Ejemplo: La sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada superiormente por cualquier número positivo mayor o igual a 1.

Es evidente que una sucesión monótona creciente está siempre acotada inferiormente (su primer término es una cota inferior) y que una sucesión monótona decreciente está siempre acotada superiormente (su primer término es una cota superior).

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ "está acotada" si lo está inferiormente y superiormente. O sea, si existen números reales K_1 y K_2 de modo que se cumpla $K_1 \leq a_n \leq K_2$ para todo índice n. Ejemplos: $\{(-1)^n\}$ está acotada, pues una cota superior es 2 y una cota inferior es -2. En cambio, la sucesión $\{n^3\}$ no está acotada (lo está inferiormente por 0, pero no lo está superiormente pues los cubos llegan a superar a cualquier número positivo que demos). Y la sucesión $\{(-3)^n\}$ no está acotada (en este caso no lo está inferiormente ni superiormente, pues sus términos iniciales son $-3, 9, -27, 81, \dots$, o sea que incluye infinitos términos tan grandes como queramos y otros infinitos términos tan pequeños como queramos).

Un teorema muy importante en Matemáticas es el siguiente:

TEOREMA: Toda sucesión que sea monótona y a la vez acotada es siempre convergente.

En efecto, al ser la sucesión acotada no podrá ser divergente a $+\infty$ (pues no hay términos mayores que K_2), ni divergente a $-\infty$ (pues no hay términos menores que K_1), ni divergente a $\pm\infty$ (pues los valores absolutos de sus términos no superarán al mayor de $|K_1|\ y\ |K_2|$). Por tanto, las únicas posibilidades que quedan para el carácter de la sucesión es que sea convergente o que sea oscilante. Pero al ser monótona, no puede ser oscilante (pues si lo fuera, tendría al menos dos subsucesiones con límites diferentes, con lo cual habría unos términos seguidos de otros menores, los cuales estarían seguidos a su vez de otros mayores, etcétera; algo incompatible con monótana creciente y con monótona decreciente).

Nota 1: El Teorema anterior puede darse para sucesiones monótonas crecientes diciendo: "Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente" (al ser monótona creciente ya está acotada inferiormente y al suponer que también esté acotada superiormente, estará acotada). Y también el Teorema puede darse para sucesiones monótonas decrecientes como "toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente" (al ser monótona decreciente ya está acotada superiormente y al suponer que también esté acotada inferioremente, también estará acotada).

Nota 2: No toda sucesión acotada es convergente, pues puede ser oscilante (por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada entre -1 y 1 y es oscilante). Lo que sí ocurre es que una sucesión acotada no puede ser divergente, como dijimos anteriormente. Y también ocurre que toda sucesión convergente estará acotada, pues todos sus términos desde uno en adelante (llamemos a su índice n_0) estarán en un intervalo de la forma $(L-\delta\, , L+\delta)$, siendo L su límite y δ un número positivo cualquiera fijado (con lo cual basta agrandar suficientemente ese intervalo para que sus términos de índices menores que n_0, que son un número finito, queden también incluidos en el intervalo agrandado).

Ejemplos:

1) Un ejemplo de monótona creciente y acotada superiormente es $\{n/(n+1)\}$.
En efecto, sus primeros términos son 1/2, 2/3, 3/4, 4/5,….. y se ven creciendo, pero hay que demostrar que se cumple $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n. La desigualdad anterior es en este caso $n/(n+1) \leq (n+1)/(n+2)$, lo cual equivale a $n \cdot (n+2) \leq (n+1)^2$ y esto es cierto pues $n^2+2n < n^2+2n+1$, para todo n. Por tanto, la sucesión dada es monótona creciente (podemos decir estrictamente creciente). Además, es evidente que $a_n = n/(n+1) < 1$ para todo n, luego 1 es una cota superior de la sucesión y entonces la sucesión está acotada superiormente. Sabemos que el límite de la sucesión es 1 (coincide con la cota superior dada porque hemos tomado la cota superior más pequeña posible; pero si hubiésemos tomado la cota superior 2, por ejemplo, ya no coincidiría el límite con la cota tomada).

2) Y un ejemplo de monótona decreciente y acotada inferiormente es $\{1/n\}$.
En efecto, la condición $a_n \geq a_{n+1}$ equivale a $1/n \geq 1/(n+1)$ que se cumple evidentemente para todo n (se cumple $>$). Luego la sucesión es estrictamente decreciente. Además, todos sus términos son positivos, luego $a_n > 0$ para todo n , con lo cual 0 es una cota inferior de la sucesión y entonces la sucesión está acotada inferiormente. Sabemos que su límite es cero (que es la mayor cota inferior).

Precisamente, la manera de demostrar que existe el límite de la sucesión $\{(1+1/n)^n\}$ es demostrar que es monótona creciente y también demostrar que está acotada superiormente, con lo cual podremos aplicar el Teorema anterior en su versión para sucesiones monótonas crecientes y concluiremos que esta sucesión es convergente (no lo hacemos aquí por ser algo complicado). Su límite es el número e, como hemos dicho.

Operaciones entre sucesiones

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se define "la sucesión suma" de ambas como $\{c_n\}$, donde $c_n = a_n + b_n$ para todo n (cada término de la "sucesión suma" es la suma de los respectivos términos de las sucesiones que sumamos).

Al respecto, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1: a) Si las sucesiones dadas son convergentes de límites A y B, la sucesión suma es convergente de límite $A + B$.

b) Si una de las sucesiones dadas es convergente y la otra es divergente, su suma es divergente con el mismo límite.

c) Si ambas sucesiones son divergentes, no puede asegurarse el carácter de la sucesión suma (es un caso de la indeterminación $\infty \pm \infty$).

Es una consecuencia de propiedades de los límites de las funciones reales de una variable. (Repasar las propiedades que resumimos como "Álgebra de límites" en la Sección 2.4).

Nota importante: En el caso c) del Teorema anterior hay situaciones donde podemos asegurar lo que le ocurre a la función suma: Si las dos sucesiones dadas son divergentes a $+\infty$, la suma de ambas será divergente a $+\infty$ (caso claro). Y si ambas son divergentes a $-\infty$, la suma también lo será (el otro caso claro). Entonces, las verdaderas indeterminaciones pueden representarse simbólicamente como $(+\infty) + (-\infty)$ y $(-\infty) + (+\infty)$.

De igual modo se define la "sucesión diferencia" de dos sucesiones dadas, con propiedades análogas a las anteriores, consecuencia de las propiedades generales de los límites entre funciones reales de una variable real. Y en este caso, cuando ambas sucesiones dadas sean divergentes, tampoco puede asegurarse en general el carácter de la sucesión diferencia. Las verdaderas indeterminaciones pueden ahora escribirse simbólicamente como $(+\infty) - (+\infty)$ y $(-\infty) - (-\infty)$.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ y un número real k, se define "el producto de la sucesión por el número k" como la nueva sucesión de término general $k \cdot a_n$ (todos los términos de la sucesión dada quedan multiplicados por el número k).

Al respecto, tenemos otro teorema:

TEOREMA 2: a) Si es $k = 0$ la sucesión $\{k \cdot a_n\}$ es la sucesión constante $\{0\}$, obviamente convergente de límite cero, sea cual sea el carácter de la sucesión $\{a_n\}$.

b) Pero si es $k \neq 0$, el carácter de la sucesión $\{k \cdot a_n\}$ coincidirá con el de la sucesión $\{a_n\}$ y en caso de convergencia el nuevo límite será el producto de k por el límite de $\{a_n\}$.

c) En caso de divergencia de $\{a_n\}$ a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, la sucesión $\{k \cdot a_n\}$ divergerá también a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$ (respectivamente) si es $k > 0$, y divergerá a $-\infty$, $+\infty$ o $\pm\infty$ (respectivamente) si es $k < 0$.

En particular, tomando $k = -1$ se tendrá "la sucesión opuesta" de $\{a_n\}$ que es $\{-a_n\}$. De modo que si $\{a_n\}$ es convergente de límite L, $\{-a_n\}$ será convergente de límite $-L$; si $\{a_n\}$ es divergente a $+\infty$, a $-\infty$ o a $\pm\infty$, la sucesión opuesta $\{-a_n\}$ será divergente a $-\infty$, a $+\infty$ o a $\pm\infty$, respectivamente, y si $\{a_n\}$ es oscilante, la opuesta también lo será.

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se define "la sucesión producto de ambas" como la nueva sucesión $\{c_n\}$, donde $c_n = a_n \cdot b_n$ para todo n (los términos de la sucesión producto son los resultados de multiplicar entre sí los términos correspondientes de las dos sucesiones dadas).

Al respecto, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3: a) Si las sucesiones dadas son convergentes de límites A y B, la sucesión producto es convergente de límite $A \cdot B$.

b) Si una de las sucesiones dadas es convergente y la otra es divergente, su producto es divergente, salvo que la convergente tenga límite cero, en cuyo caso no puede asegurarse el carácter del producto de ambas (pues estaríamos en la indeterminación $0 \cdot \infty$ de los límites de funciones).

c) Por último, si las dos sucesiones dadas son divergentes, su producto es también divergente (a $+\infty$, a $-\infty$ o a $\pm\infty$, según sean los signos de sus términos, aplicando la regla de signos).

Es consecuencia también de propiedades de los límites de funciones reales de variable real.

Ahora tenemos también el siguiente teorema que se refiere a "sucesiones inversas":

TEOREMA 4: a) Si una sucesión $\{a_n\}$ es convergente y su límite L es diferente de cero, siendo todos sus términos diferentes de cero, la "sucesión inversa" $\{1/a_n\}$ también es convergente y su límite es $1/L$.

b) Si $\{a_n\}$ es divergente, siendo no nulos todos sus términos, la sucesión $\{1/a_n\}$ es convergente de límite cero.

c) Si $\{a_n\}$ tiene límite cero, siendo todos sus términos no nulos, la sucesión $\{1/a_n\}$ es divergente (a $+\infty$, a $-\infty$ o a $\pm\infty$, según sean los signos de a_n que coincidirán con los signos de $1/a_n$).

d) Y si $\{a_n\}$ es oscilante, siendo todos sus términos no nulos, la sucesión $\{1/a_n\}$ también será oscilante.

Nota: La condición de que todos los términos de $\{a_n\}$ sean diferentes de cero (o no nulos) es para que puedan existir todos los términos de la sucesión $\{1/a_n\}$.

"La sucesión cociente de $\{a_n\}$ entre $\{b_n\}$" es la que tiene por términos $c_n = a_n/b_n$ para todo n (suponemos $b_n \neq 0$ para todo n). Podemos considerarla como "la sucesión producto" de $\{a_n\}$ por "la sucesión inversa" $\{1/b_n\}$. (Caso particular es cuando $a_n = 1$ para todo n y entonces la "sucesión cociente" es la "sucesión inversa").

Al respecto tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5: a) Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente de límite A y la sucesión $\{b_n\}$ es convergente de límite B diferente de cero, la sucesión cociente $\{a_n/b_n\}$ es también convergente y su límite es A/B.

b) Si fuese $A \neq 0$ y $B = 0$, la sucesión $\{a_n/b_n\}$ será divergente.

c) Si $A = 0$ y $B = 0$, no podemos asegurar el carácter de la sucesión cociente (pues estaremos en la indeterminación $0/0$ de los límites de funciones).

d) Si $\{a_n\}$ es convergente y $\{b_n\}$ es divergente, el cociente será con seguridad convergente con límite cero.

e) Si $\{a_n\}$ es divergente y $\{b_n\}$ es convergente, el cociente $\{a_n/b_n\}$ será con seguridad divergente.

f) Si las dos sucesiones son divergentes, tampoco podrá asegurarse el carácter del cociente de ambas (estaremos en la indeterminación ∞/∞).

Ahora trataremos las sucesiones cuyos términos sean los logaritmos (en una determinada base) de los términos de otras sucesiones.

Dada una sucesión de términos positivos $\{a_n\}$, podemos definir "la sucesión de sus logaritmos en base b", de término general $log_b(a_n)$, siendo b positivo y diferente de 1.

Al respecto, tenemos el teorema:

TEOREMA 6: a) Si $\{a_n\}$ es de términos positivos y tiene límite $L > 0$, "la sucesión de sus logaritmos en base b" será convergente de límite $log_b L$.

b) Si $\{a_n\}$ es de términos positivos y tiene límite $L = 0$, "la sucesión de sus logaritmos en base b" será divergente a $-\infty$ cuando $b > 1$ y será divergente a $+\infty$ cuando $0 < b < 1$.

c) Y si $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$, "la sucesión de sus logaritmos en base b" será divergente a $+\infty$ cuando $b > 1$ y será divergente a $-\infty$ cuando $0 < b < 1$.

(Recuérdense, al respecto, los límites de la función $f(x) = log_b x$ cuando $b > 1$ y también cuando $0 < b < 1$ que están en la Sección 2.5).

Finalmente, consideramos las sucesiones cuyos términos sean potencias, con bases los términos de alguna sucesión y exponentes los términos de otra sucesión.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos y dada una sucesión $\{b_n\}$ cualquiera, se define "la sucesión de potencias de bases $\{a_n\}$ y exponentes $\{b_n\}$" como la sucesión $\{c_n\}$, donde $c_n = {a_n}^{b_n}$ para todo n.

Al respecto, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 7: a) Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente de límite $A > 0$ y la sucesión $\{b_n\}$ es convergente de límite B (cualquier número), la sucesión de potencias será convergente de límite A^B.

b) Si es $A = 0$ y $B > 0$, el límite será también $A^B = 0^B = 0$. (Recuérdese que es $a_n > 0$ siempre).

c) Y si es $A = 0$ y $B < 0$, el límite será $+\infty$. (Recuérdese que es $a_n > 0$ siempre).

d) Si la sucesión de la base tiene límite cero y la del exponente también tiene límite cero, no puede asegurarse el carácter de la sucesión de potencias (estamos en la indeterminación 0^0 de los límites de funciones).

e) Si la sucesión de la base tiene límite 1 y la sucesión del exponente es divergente, tampoco puede asegurarse el carácter de la sucesión de potencias (estamos en la indeterminación 1^∞ de los límites de funciones).

f) Y si la sucesión de la base es divergente a $+\infty$ y la sucesión del exponente tiene límite cero, tampoco puede asegurarse el carácter de la sucesión de potencias (estamos en la indeterminación $(+\infty)^0$ de los límites de funciones).

NOTA IMPORTANTE: Para analizar los casos de estas indeterminaciones en forma de potencia y cualquier otro caso de sucesiones de potencias cuyos comportamientos no estén claros, debe hallarse el límite de la sucesión producto $\{b_n \cdot log_e(a_n)\} = \{p_n\}$, con lo cual se podrá conocer el límite de la sucesión $\{e^{p_n}\}$ que es la misma $\{a_n{}^{b_n}\}$ (en efecto, $p_n = b_n \cdot log_e(a_n) = log_e\left(a_n{}^{b_n}\right)$, con lo cual $e^{p_n} = a_n{}^{b_n}$) . La conclusión resulta finalmente de las propiedades de la función exponencial e^x: Si el límite de $\{p_n\}$ es L, el límite de la potencia inicial será e^L; si el límite de $\{p_n\}$ es $+\infty$, el límite de la potencia inicial será $+\infty$; si el límite de $\{p_n\}$ es $-\infty$, el límite de la potencia inicial será cero, y si el límite de $\{p_n\}$ es $\pm\infty$, la potencia inicial no tendrá límite (esa sucesión será oscilante, pues infinitos términos tenderán a $+\infty$ y otros infinitos términos tenderán a cero).

Nota adicional: Cuando estemos en una de las indeterminaciones en forma de potencia (0^0, 1^∞ o bien $(+\infty)^0$), el límite de la sucesión $\{b_n \cdot log_e(a_n)\}$ estará en la indeterminación $0 \cdot \infty$ (o bien $\infty \cdot 0$), que son más fáciles de resolver.

Sucesiones de medias

Dados n números reales, la "media aritmética" de todos esos números es, como sabemos, su suma dividida entre n.

Y si tenemos n números reales positivos, la "media geométrica" de todos esos números es la raíz de índice n de su producto.

Pues bien, dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}$, podemos establecer su "sucesión de medias aritméticas" que tiene por término general $\boxed{b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n}$ (definición recurrente, como vimos en el ejemplo 5 de la pág. 3). Su primer término es a_1, su segundo término será $(a_1 + a_2)/2$, su tercer término será $(a_1 + a_2 + a_3)/3$, etc…

Y dada una sucesión de términos positivos $\{a_n\}$, podemos establecer su "sucesión de medias geométricas" que tiene por término general $\boxed{c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}$ (otra definición recurrente). Su primer término es a_1, su segundo término es $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$, su tercer término es $\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$, etc…

Al respecto, tenemos tres teoremas importantes:

TEOREMA 1: Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, su sucesión de medias aritméticas también será convergente y tendrá el mismo límite. Y si $\{a_n\}$ es divergente a $+\infty$ o a $-\infty$, su sucesión de medias aritméticas también será divergente y tendrá el mismo límite.

TEOREMA 2: Si la sucesión de términos positivos $\{a_n\}$ es convergente, su sucesión de medias geométricas también será convergente y tendrá el mismo límite. Y si $\{a_n\}$ es divergente a $+\infty$, su sucesión de medias geométricas también será divergente a $+\infty$.

TEOREMA 3: Sea la sucesión de términos positivos $\{a_n\}$. A partir de ella pueden definirse en forma recurrente dos nuevas sucesiones $\{a_n/a_{n-1}\}$ (tomando como a_0 el valor 1) y $\{\sqrt[n]{a_n}\}$. Pues bien, si la primera de estas dos (razón de un término al anterior) es convergente, la segunda (raíz *n*-sima del término general) también es convergente y tiene el mismo límite. Y si la primera es divergente a $+\infty$, la segunda también.

Nota 1: El Teorema 2 es una consecuencia del Teorema 1 (aplicando logaritmos) y el Teorema 3 es una aplicación directa del Teorema 2, porque $\sqrt[n]{a_n}$ es el término general de la sucesión de medias geométricas correspondiente a la que tiene como término general a_n/a_{n-1} tomando $a_0 = 1$. En efecto, $\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots\cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[n]{a_n}$.

Nota 2: Aplicando el Teorema 3 a la sucesión de los números naturales $\{n\}$, resulta que el límite de la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es 1 (porque el límite de la sucesión $\{n/(n-1)\}$ también es 1).

Nota 3: En muchas ocasiones la "sucesión de la razón de un término al anterior" se presenta con término general a_{n+1}/a_n en vez de a_n/a_{n-1}. Da igual, pues la segunda expresión coincide con la primera para el valor siguiente de n. En general, para el estudio de su carácter, es lo mismo tomar como término general de una sucesión a_n que tomar como término general a_{n+1} o a_{n+2} (lo importante es que el término general incluya la variable n, con lo cual podremos reproducir la sucesión a partir de un cierto término, sin que falten otros posteriores: Son los términos suficientemente avanzados de la sucesión los que definen su carácter y su posible límite.

Veamos finalmente una generalización del Teorema 1 de las medias aritméticas. Se trata de usar "medias ponderadas": Dados n números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y elegidos n "factores de ponderación positivos" $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, se llama "media ponderada de los n números reales dados con los factores de ponderación elegidos" al cociente

$$\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + \cdots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

Obsérvese que la media aritmética es un caso particular de media ponderada: Corresponde a que tomemos todos los factores de ponderación iguales.

Al respecto, tenemos otro teorema:

TEOREMA 4: Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente de límite L y la sucesión $\{p_n\}$ es de términos positivos, la sucesión de medias ponderadas correspondiente a $\{a_n\}$, utilizando como factores de ponderación respectivos los términos de $\{p_n\}$, también es convergente y su límite es L (independientemente de cuáles sean los factores de ponderación p_n) Y si $\{a_n\}$ es divergente a $+\infty$ o a $-\infty$, la sucesión de medias ponderadas también será divergente y tendrá el mismo límite.

APLICACIÓN IMPORTANTE: Si queremos saber el límite de una sucesión cociente $\{A_n/B_n\}$, donde la sucesión $\{B_n\}$ es de términos positivos y estrictamente creciente (o sea monótona creciente pero sin términos iguales), podremos interpretar que $\{A_n/B_n\}$ es la sucesión de medias ponderadas de una cierta sucesión $\{a_n\}$ (que podremos determinar a partir de A_n y B_n), utilizando unos factores de ponderación p_n (también determinables a partir de los B_n). En efecto, podemos considerar que el denominador B_n del cociente dado es la suma de los n primeros términos de una sucesión $\{p_n\}$ de factores de ponderación positivos ($B_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$), de modo que el factor p_n será entonces la diferencia $\boxed{B_n - B_{n-1}}$ (por ello se ha supuesto que la sucesión $\{B_n\}$ sea de términos positivos y estrictamente creciente). Pero además, podremos considerar que el numerador A_n del cociente dado es de la forma $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \cdots + a_n \cdot p_n$, con lo cual se puede calcular el valor de a_n, ya que la diferencia $A_n - A_{n-1}$ será el producto $a_n \cdot p_n$ y por tanto se tendrá $\boxed{a_n = (A_n - A_{n-1})/p_n = (A_n - A_{n-1})/(B_n - B_{n-1})}$.

De este modo, al interpretar la sucesión cociente inicial $\{A_n/B_n\}$ como la sucesión de medias ponderadas de la anterior sucesión $\{a_n\}$ con los factores de ponderación p_n, el Teorema 4 nos asegura que el límite de la sucesión $\{A_n/B_n\}$ será igual al límite de la sucesión $\{a_n\}$ anteriormente obtenida, tanto si este límite es un número real como si es $+\infty$ o $-\infty$. Por tanto, podemos escribir

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}} \qquad \text{(Criterio de Stolz)}$$

Nota 1: Este Criterio de Stolz es una herramienta muy útil en el cálculo de límites indeterminados del tipo ∞/∞, donde el numerador o el denominador sea suma de un número variable de términos. A veces se trata de un cociente cuyo numerador no sabemos si es divergente, pero cuyo denominador es claramente una sucesión de términos positivos estrictamente creciente (es lo verdaderamente importante para aplicar el Criterio), con lo cual se puede intentar resolver el límite aplicándolo. Veremos un caso así en el Ejercicio 7 del último apartado de este tema y a continuación vemos otro caso:

Ejemplo: Calcular el límite de $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ cuando $n \to +\infty$. Observamos que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$, luego estamos en una indeterminación ∞/∞. Y la sucesión del denominador $\{n^3\}$ es de números positivos estrictamente creciente. Luego el cociente dado cumple la condición que se exige para aplicarle el Criterio de Stolz al límite planteado.

Entonces: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2]-[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]}{n^3-(n-1)^3}$$

de modo que en el numerador sólo queda n^2 y en el denominador queda $3n^2 - 3n + 1$. De modo que el límite dado es igual al límite del cociente $n^2/(3n^2 - 3n + 1)$, que es claramente $1/3$ (aplicando la propiedad 8 de la pág. 7).

Nota 2: Este es un caso en que no podemos interpretar la sucesión dada como la restricción a $\mathbb{N}$ de una función de variable real, pues el numerador es una suma de n sumandos, con lo cual no podremos dar ese número de sumandos a través de una variable real x que tomaría valores no enteros.

Nota 3: Otto Stolz fue un matemático austríaco que vivió en el siglo XIX.

Sucesiones infinitésimas

Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es "infinitésima" (o que es "un infinitésimo") si es convergente de límite cero.

Aquí podemos aplicar muchas de las consideraciones hechas en el tema "Infinitésimos" de funciones reales de una variable real (Sección 3.4). Como "orden de un infinitésimo", comparación de infinitésimos e "infinitésimos equivalentes" (que pueden intercambiarse en el cálculo de límites, cuando aparecen multiplicando en el numerador o en el denominador de la expresión cuyo límite buscamos). "El orden" de una sucesión infinitésima es una medida de la velocidad con que sus términos se acercan al límite cero.

En general, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones infinitésimas, la comparación de sus órdenes se hace por cociente: Si $\{a_n/b_n\}$ tiene límite cero, diremos que $\{a_n\}$ es "un infinitésimo de mayor orden" que $\{b_n\}$; si $\{a_n/b_n\}$ tiene límite infinito, diremos que $\{a_n\}$ es "un infinitésimo de menor orden" que $\{b_n\}$, y si $\{a_n/b_n\}$ tiene límite un número diferente de cero, diremos que ambas sucesiones son "infinitésimos de igual orden" (en este caso, si el límite del cociente es 1, las dos sucesiones se llaman "infinitésimos equivalentes").

Toda potencia de base n y exponente real negativo $-p$ representa el término general de una sucesión infinitésima y consideramos que "su orden" es p. Así n^{-3} es de orden 3, $n^{-2/5}$ es de orden $2/5$ y $n^{-\sqrt{2}}$ es de orden $\sqrt{2}$. Y otras sucesiones infinitésimas tendrán órdenes mayores, menores o iguales, obtenidos por comparación con éstas.

Conviene saber que una suma o diferencia de varios infinitésimos de órdenes distintos es otro infinitésimo cuyo orden es **el menor** de los órdenes respectivos. Y un producto de varios infinitésimos es otro infinitésimo cuyo orden es **la suma** de los órdenes respectivos. Por último, cuando se multiplica un infinitésimo por una constante no nula, se obtiene otro infinitésimo del mismo orden.

Ejemplos:

1) Sucesiones infinitésimas son $\{1/n\}$, $\{sen(1/n)\}$ y $\{1 - cos(3/n^2)\}$.

2) Las dos primeras dadas anteriormente son infinitésimos equivalentes de orden 1, puesto que lo son las funciones $sen\, u$ y u (cuando $u \to 0$) y aquí u es $1/n$, que tiende a cero. Y la tercera sucesión dada anteriormente es equivalente a $\{(3/n^2)^2/2\} = \{9/2n^4\}$, pues la función $1 - \cos u$ es un infinitésimo equivalente a $u^2/2$ (cuando $u \to 0$) y aquí u es $3/n^2$, que tiende a cero. El orden de esta tercera sucesión dada es entonces 4, ya que $9/2n^4 = (9/2)n^{-4}$.

Entonces, si nos piden, por ejemplo, calcular el límite del cociente $\frac{2 \cdot sen^3(1/n)}{n \cdot [1-cos(3/n^2)]}$ cuando $n \to +\infty$, podremos sustituir el infinitésimo $sen^3(1/n)$ por $(1/n)^3$ (sustitución tres veces de $sen(1/n)$ por $1/n$, ya que es tres veces factor del numerador) y podremos sustituir el infinitésimo $1 - cos(3/n^2)$ por $9/2n^4$ ya que es factor del denominador, quedando el límite de $\frac{2 \cdot (1/n)^3}{n \cdot (9/2n^4)}$, que es claramente $\frac{4}{9}$. Por tanto, este número será el límite del cociente inicial. (En este caso, numerador y denominador son infinitésimos del mismo orden (orden 3), pero no son equivalentes).

3) Además de los infinitésimos equivalentes importantes que hemos recordado en el apartado anterior, están los siguientes:

$$\boxed{tan\, u \sim u} \quad ; \quad \boxed{arc\, sen\, u \sim u} \quad ; \quad \boxed{arc\, tan\, u \sim u} \quad ; \quad \boxed{e^u - 1 \sim u}$$

(todos cuando $u \to 0$). (Pondremos siempre el símbolo $\sim$ entre los infinitésimos equivalentes). (Recordar lo dicho en la Sección 3.4).
Más general que la última equivalencia es: $\boxed{a^u - 1 \sim u \cdot ln\, a}$ (siendo a positivo diferente de 1), cuando $u \to 0$.
Y además (también cuando $u \to 0$), tenemos estas otras dos equivalencias:

$$\boxed{(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot u} \quad \text{y} \quad \boxed{log_a(1+u) \sim u \cdot log_a e}$$

donde la última puede darse también de la siguiente manera:

$$\boxed{log_a u \sim (u-1) \cdot log_a e} \quad (\text{cuando } u \to 1)$$

la cual, en el caso particular en que $a = e$, se reduce a

$$\boxed{ln\, u \sim u - 1} \quad (\text{cuando } u \to 1)$$

que tiene gran aplicación en el cálculo de límites indeterminados del tipo 1^∞.
Por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{n \cdot ln(1+1/\sqrt{n})} \quad (\text{por ser } u^v \equiv e^{v \cdot lnu})$$

calculando aparte el límite del exponente (producto indeterminado del tipo $\infty \cdot 0$), para luego aplicar propiedades de la función exponencial e^x. Pero en ese cálculo del límite del exponente, el infinitésimo $ln\left(1 + 1/\sqrt{n}\right)$ podrá sustituirse por su equivalente $1/\sqrt{n}$ (pues $1 + 1/\sqrt{n}$ tiende a 1), con lo cual dicho exponente queda reducido a $n \cdot \left(1/\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}$, cuyo límite es $+\infty$. Por tanto, el límite dado será $+\infty$, porque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Si aplicamos lo anterior a las sucesiones de la forma $a_n = \left(1 + \frac{k_n}{b_n}\right)^{b_n}$, mencionadas en la pág. 6, donde $\{b_n\}$ es divergente y donde $\{k_n\}$ es convergente de límite K, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k_n}{b_n}\right)^{b_n} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \cdot ln\left(1+\frac{k_n}{b_n}\right)}$$

y el límite del exponente es: $\lim_{n\to\infty} \left[b_n \cdot ln\left(1 + \frac{k_n}{b_n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left(b_n \cdot \frac{k_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} k_n = K$

donde hemos sustituido el factor $ln\left(1 + \frac{k_n}{b_n}\right)$ por su infinitésimo equivalente $\frac{k_n}{b_n}$, con lo cual será finalmente $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e^K}$, como habíamos adelantado en la pág. 6.

Sucesiones infinitas

Si las sucesiones infinitésimas tienen importancia en el cálculo de límites, las sucesiones divergentes (también llamadas "sucesiones infinitas" o más brevemente "infinitos") tienen también importancia. Y comparando unas con otras las hay "de mayor orden", "de menor orden" y "del mismo orden", siendo "el orden" una medida de la velocidad con que tienden a infinito. También las hay "equivalentes", como ocurre con los infinitésimos, lo cual quiere decir que se parecen tanto en su crecimiento que pueden intercambiarse en el cálculo de un límite sin alterarlo, cuando aparece alguna de estas sucesiones como factor en el numerador o en el denominador de la expresión con la que se trabaja.

En general, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones divergentes, la comparación de sus órdenes se hace por cociente: Si $\{a_n/b_n\}$ tiene límite infinito, diremos que $\{a_n\}$ es "un infinito de mayor orden" que $\{b_n\}$; si $\{a_n/b_n\}$ tiene límite cero, diremos que $\{a_n\}$ es "un infinito de menor orden" que $\{b_n\}$, y si el cociente $\{a_n/b_n\}$ tiene límite un número diferente de cero, diremos que ambas sucesiones son "infinitos de igual orden" (en este caso, si el límite del cociente es 1, las dos sucesiones se llaman "infinitos equivalentes" y escribiremos $a_n \sim b_n$).

Toda potencia de base n y exponente real positivo fijo p representa el término general de una sucesión divergente a $+\infty$ y consideramos que "su orden" es dicho exponente. Así n^2 es de orden 2, $\sqrt[4]{n}$ es de orden $1/4$, n^π es de orden π, etc… Y otras sucesiones divergentes tendrán órdenes mayores, menores o iguales, obtenidos por comparación con éstas.

En el caso de una sucesión cuyo término general sea un polinomio en la variable n (que siempre es divergente, salvo que sea una constante), su orden será el grado de dicho polinomio (pues al multiplicar una potencia de n por una constante diferente de cero, el orden no se altera, y además una suma o diferencia de varias sucesiones divergentes **tendrá el orden de aquella que lo tenga mayor**). También se cumple que el producto de varias sucesiones divergentes tiene como orden **la suma de los órdenes respectivos**.

Cuando el término general de una sucesión divergente sea la raíz de índice n de un polinomio, su orden será el grado del polinomio dividido por n.

Ejemplos:

1) $\sqrt[4]{2n^3+n^2-3}$ es divergente de orden $3/4$ y $5\sqrt[3]{n^4}-\sqrt{n^5}$ es divergente de orden $5/2$, porque $5/2 > 4/3$.

2) Anteriormente habíamos visto (pág. 15) que el límite de $(1^2+2^2+\cdots+n^2)/n^3$ es $1/3$, con lo cual podemos decir que las sucesiones divergentes del numerador y del denominador son del mismo orden, pero no son equivalentes. Y como n^3 es de orden 3, podemos decir que el numerador es también un infinito de orden 3.

3) $\{n^\pi\}$ es de mayor orden que $\left\{\sqrt[3]{n^8}\right\}$ (pues $\pi > 8/3$).

4) $\{3^n+20\}$ es de menor orden que $\{4^n-50\}$, pues $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+20}{4^n-50} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{20}{3^n}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\frac{50}{3^n}} = 0$

donde hemos dividido por 3^nel numerador y el denominador de la fracción dada; además $20/(3^n)$ y $50/(3^n)$ tienen límite cero y $(4/3)^n$ tiene límite $+\infty$, porque es exponencial de base mayor que 1.

En general, de dos sucesiones divergentes de tipo exponencial $\{a^n\}$ $(a > 1)$ y $\{b^n\}$ $(b > 1)$ será de mayor orden la que tenga base mayor. Pues el cociente $\{a^n/b^n\}$ es la sucesión $\{(a/b)^n\}$, que tendrá límite $+\infty$ si es $a > b$ (pues $a/b > 1$), y tendrá límite cero si es $a < b$ (pues $a/b < 1$).

MUY IMPORTANTE: Cualquier sucesión divergente de tipo exponencial es siempre de mayor orden que una sucesión divergente de tipo potencial. Pues el límite de a^n/n^p (siendo $a > 1$ y $p > 0$) es siempre $+\infty$ (por grande que se tome el exponente p). En efecto, es lo que sucede con el límite de la función real de variable real a^x/x^p cuando $x \to +\infty$, lo cual se demuestra aplicando reiteradamente la Regla de L'Hôpital (ver Sección 3.3): Al derivar r veces numerador y denominador (mientras el cociente sea indeterminado del tipo ∞/∞) , la exponencial a^x se mantiene en el numerador quedando multiplicada por el número positivo $(ln\, a)^r$ y, en cambio, el denominador queda con la potencia x^{p-r} acompañada de un coeficiente positivo, que será el producto $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot ... \cdot (p-r+1)$; de modo que cuando el número de veces (r) que hayamos aplicado la Regla de L'Hôpital sea igual o mayor que el exponente p, la potencia del denominador tendrá ya exponente cero o negativo (y no tenderá a $+\infty$ sino que será constante o tenderá a cero), mientras que el numerador seguirá tendiendo a $+\infty$. Por tanto, el cociente a^x/x^p tendrá límite $+\infty$ cuando x tienda a $+\infty$ y lo mismo sucederá entonces con el cociente a^n/n^p cuando n tienda a $+\infty$ (como habíamos dicho).

Pero hay sucesiones divergentes que todavía tienen **mayor orden** que cualquiera de tipo exponencial (por grande que sea su base), como son $\{n!\}$ y $\{n^n\}$.

Para ver que $\{n!\}$ es de mayor orden que $\{a^n\}$, escribimos $\frac{n!}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{3}{a} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{a}$, donde podemos ver que, para valores de n mayores que a (suponemos que $n \to \infty$), habrá una parte fija de fracciones iniciales del producto (las de numeradores menores o iguales que a) cuyo producto será un valor fijo positivo K (que no depende de n sino de a), el cual estará multiplicado por un número creciente (al crecer n) de fracciones mayores que 1 (que son las siguientes fracciones del producto, hasta llegar a la última que será la mayor), de manera que ese producto total será mayor que $\boxed{\mathrm{K} \cdot \frac{n}{a}}$ (hemos dejado solamente la última fracción, pero las eliminadas son todas mayores que 1). Ahora bien, el límite de $\mathrm{K} \cdot \frac{n}{a}$ es $+\infty$ (cuando $n \to \infty$). Por tanto, el límite de $n!/a^n$ es con seguridad $+\infty$ y entonces $\{n!\}$ es de mayor orden que $\{a^n\}$, por grande que sea la base positiva a.

Damos ahora el siguiente resultado debido al matemático escocés James Stirling que vivió en el siglo XVIII (cuya demostración es complicada): La sucesión $\{n!\}$ es un infinito equivalente a la sucesión de término general $(n/e)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ (obsérvese que ambos factores tienden a $+\infty$; el primero porque es término general de una sucesión cuyos términos superan, desde $n > 6$, a los de la sucesión infinita $\{2^n\}$, y el segundo porque es término general de una sucesión infinita de orden $1/2$).

Por tanto, para valores de n suficientemente grandes vale la siguiente aproximación:

$$\boxed{n! \cong (n/e)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} \qquad \text{(Fórmula de Stirling)}$$

Ahora, la equivalencia de Stirling nos permite ver que la sucesión $\{n^n\}$ es un infinito de mayor orden que la sucesión $\{n!\}$. En efecto, calculamos el límite del cociente $n^n/n!$ usando la equivalencia anterior:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^n}{n^{1/2}}\right) = +\infty$$

pues la sucesión $\{e^n\}$ es de mayor orden que la sucesión $\{n^{1/2}\}$ (ver lo dicho en la página anterior sobre la comparación de sucesiones de tipo exponencial y de tipo potencial).

Para terminar este apartado, diremos que así como hay sucesiones divergentes de órdenes mayores que las de tipo potencial, también las hay de menor orden: Por ejemplo, las de tipo logarítmico, como $\{log_a n\}$ con $a > 1$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{log_a n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{log_a x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{p\cdot x^{p-1}}{x^{-1}\cdot log_a e} = \lim_{x\to+\infty}\frac{p\cdot x^p}{log_a e} = +\infty$$

pues p es positivo y $log_a e$ es constante positiva, donde hemos aplicado la Regla de L'Hôpital al límite ∞/∞ de la función real $x^p/log_a x$ definida en $[2\,,+\infty)$, cuya restricción al conjunto de los números naturales desde 2 en adelante nos da la sucesión cociente inicial (suponemos que los términos de ésta se obtienen desde $n = 2$ en adelante, porque para $n = 1$ se anula el denominador $log_a n$).

En resumen: Podemos escribir con el símbolo $\ll$ los órdenes crecientes entre los términos generales de algunas sucesiones divergentes notables (podríamos leer $\ll$ como "mucho menor"):

$$\boxed{log_a n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n} \qquad \text{(para } a \text{ cualquiera mayor que 1 y } p \text{ positivo cualquiera).}$$

Algunos ejercicios

Ejercicio 1: Demostrar que la sucesión $\{log_e n\}$ es equivalente a la sucesión definida en forma recurrente como $a_n = a_{n-1} + 1/n$ para $n > 1$, con $a_1 = 1$.

Obsérvese que la sucesión $\{a_n\}$ es $1\,,\, 1+\frac{1}{2}\,,\, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,, \ldots\ldots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,, \ldots\ldots$. Luego su término general puede escribirse también $\boxed{a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$, para todo n.

Para ver que ambas sucesiones son equivalentes, comprobaremos que $\lim_{n\to\infty}\frac{log_e n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$.

Como el denominador es una sucesión de términos positivos y estrictamente creciente, podemos aplicar el criterio de Stolz. Por tanto, el límite anterior será igual al siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{log_e n - log_e(n-1)}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{log_e\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} log_e\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right]$$

y es fácil comprobar que el límite de la potencia que está dentro del corchete es el número e, con lo cual el límite será 1 y las dos sucesiones son equivalentes.

(Obsérvese que $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$, donde el primer factor tiene límite e y el segundo factor tiene límite 1).

Nota: Puesto que la sucesión $\{log_e n\}$ es claramente divergente a $+\infty$, queda probado también que la sucesión $\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ es también divergente a $+\infty$, cosa que no se ve claramente de un modo directo (porque se ve que es creciente, pero cada vez más lentamente).

Ejercicio 2: Demostrar que las sucesiones $\{\sqrt[n]{n!}\}$ y $\{n/e\}$ son equivalentes.

Para ello calculamos el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n/e} = \lim_{n\to\infty} e\cdot\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Pero sabemos que el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ se puede obtener del límite de a_n/a_{n-1} (supuesto existente). (Ver Teorema 3 de la pág. 14). Y este último límite es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n-1)^{n-1}}{(n-1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)^{n-1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n+1}{n}} = e^{-1}$$

(También podríamos haber escrito $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ donde el numerador tiene límite e^{-1}, como se dijo en la pág. 6, mientras el denominador tiene límite 1).

Por tanto, el límite inicial es $e\cdot e^{-1} = 1$ y las sucesiones dadas son equivalentes.

Nota: Para resolver el límite indeterminado del tipo 1^∞ hemos sustituido, en el exponente del número e, el logaritmo neperiano de la base por su infinitésimo equivalente $\frac{n-1}{n}-1$. (Ver la explicación en el ejemplo 3 de la pág. 17)

Ejercicio 3: Calcular los límites de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{a_n+b_n\}$, siendo

$$a_n = (-\,n^2+3)/(2n+1) \quad \text{y} \quad b_n = (n+1)^3/(2n^2-n+1)\ .$$

Al ser a_n y b_n cocientes de polinomios con grado del numerador mayor que grado del denominador, las sucesiones respectivas serán divergentes (propiedad 8 de la pág. 7). Pero nos piden sus límites: Para a_n tenemos que su numerador tiende a $-\infty$ y su denominador tiende a $+\infty$, luego su límite será $-\infty$ (regla de signos). Y para b_n tenemos que numerador y denominador tienden a $+\infty$, luego su límite será $+\infty$ (regla de signos).

Veamos ahora el límite de $a_n + b_n$, que corresponde a uno de los casos de verdadera indeterminación explicados en la pág. 10 (dentro de $\infty \pm \infty$):

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2+3}{2n+1} + \frac{(n+1)^3}{2n^2-n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-n^2+3)\cdot(2n^2-n+1)+(n+1)^3\cdot(2n+1)}{(2n+1)\cdot(2n^2-n+1)}$$

(los dos denominadores iniciales son polinomios sin factores comunes, pues las raíces de la ecuación $2n^2 - n + 1 = 0$ son imaginarias; por tanto, el mínimo común múltiplo de ambos será su producto). Y al operar en el numerador y en el denominador de la última fracción, se tiene el cociente $(8n^3 + 14n^2 + 2n + 4)/(4n^3 + n + 1)$, con lo cual el límite será $8/4 = 2$ (porque los grados de numerador y denominador coinciden).

Ejercicio 4: Calcular los límites (si existen) de las sucesiones

$$\{sen\, n\} \quad , \quad \{(1/3)^n\} \quad , \quad \left\{n - \sqrt{n^2 - 2n}\right\} \quad y \quad \left\{\sqrt[n]{3n^2 + 5n - 2}\right\}.$$

La sucesión $\{sen\, n\}$ es oscilante y acotada. En efecto, $-1 \leq sen\, n \leq 1$ para todo n. Y recordemos que el límite de la función $sen\, x$ cuando $x \to +\infty$ no existe, pues los valores de la función oscilan indefinidamente entre -1 y 1 en forma periódica. Entonces, los términos de la sucesión, que son valores del seno para ángulos cuya medida en radianes son números enteros, estarán también oscilando indefinidamente entre -1 y 1: Un ángulo de n radianes, llevado a la circunferencia trigonométrica, corresponderá unas veces a unos cuadrantes y otras veces a otros cuadrantes, con lo cual el seno de dicho ángulo tomará valores positivos y negativos, unas veces con mayor absoluto y otras veces con menor valor absoluto, pero siempre entre -1 y 1, sin aproximarse a ningún valor real cuando $n \to \infty$ (como le ocurre a la función $sen\, x$ cuando $x \to +\infty$, pero a saltos). Por ejemplo: $sen\, 1 = 0'84147\ldots$; $sen\, 2 = 0'90929\ldots$; $sen\, 3 = 0'14112\ldots$; $sen\, 4 = -0'75680\ldots$; $sen\, 5 = -0'95892\ldots$; etc…

La sucesión $\{(1/3)^n\}$ es de tipo exponencial con base menor que 1, luego es convergente con límite cero (pues la función real de variable real a^x con $0 < a < 1$ es exponencial decreciente y tiene límite cero cuando $x \to +\infty$). También $\{(1/3)^n\} = \{1/3^n\}$ puede interpretarse como cociente de la sucesión constante $\{1\}$ y la sucesión divergente de tipo exponencial $\{3^n\}$, luego su límite es cero.

La sucesión $\left\{n - \sqrt{n^2 - 2n}\right\}$ también puede escribirse $\left\{\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 2n}\right\}$ y su límite es indeterminado del tipo $\infty \pm \infty$ (uno de los casos verdaderamente indeterminados vistos en la pág. 10, pues tanto el minuendo como el sustraendo son sucesiones divergentes a $+\infty$; además ambos son infinitos de orden 1, luego crecen a velocidades parecidas). Hay que operar: En estos casos de diferencias de raíces con igual índice, conviene multiplicar y dividir por las expresiones conjugadas correspondientes, que en este caso de raíces cuadradas es $\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 2n}$ (si fuese una diferencia de raíces cúbicas, que podemos representar por $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$, la expresión conjugada sería $\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A \cdot B} + \sqrt[3]{B^2}$, que da como producto $A - B$ al multiplicar a la expresión anterior, y si la indeterminación fuese del tipo $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, la expresión conjugada sería $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A\cdot B}+\sqrt[3]{B^2}$ que da producto $A+B$ al multiplicar a la expresión anterior). Operamos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-2n}}$$

que es un límite indeterminado del tipo ∞/∞, pues los dos sumandos del denominador tienden a $+\infty$, luego su suma tiende a $+\infty$. Además, el numerador es de orden 1 y el denominador también es de orden 1, luego el límite será finito. Para calcular ese límite dividimos numerador y denominador por n (en caso de que el orden común a ambos infinitos fuese k, dividiríamos por n^k):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=1$$

(al entrar n dividiendo en ambas raíces cuadradas, sus radicandos quedarán divididos por n^2 y, al ser n positivo, las raíces no cambiarán de signo; además el límite de $2/n$ es cero).

Nota: Si en la diferencia de raíces dada al principio de este último caso, las sucesiones divergentes del minuendo y del sustraendo tuviesen órdenes diferentes, el límite siempre será infinito. Únicamente habrá que determinar si es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo de los signos de minuendo y sustraendo y de cuál tanga mayor orden. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\sqrt{n^3-3n}-n\right\}$ es divergente a $+\infty$ porque el minuendo es positivo de orden $3/2$ y el sustraendo es positivo de orden 1, siendo $3/2>1$; en cambio, la sucesión $\left\{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^3-8n}\right\}$ es divergente a $-\infty$ porque el minuendo es positivo de orden $2/3$ y el sustraendo es positivo de orden 1, siendo $2/3<1$. ¡Atención! En estos dos ejemplos tanto minuendo como sustraendo divergen a $+\infty$, pero no siempre una raíz cúbica (y en general, las de índice impar) será divergente a $+\infty$, como ocurre por ejemplo en el caso $\sqrt[3]{-2n^2+3n-8}$, que es un infinito de orden $2/3$ con límite $-\infty$ (si el radicando es negativo, la raíz también lo será). Así, la sucesión $\left\{\sqrt[3]{-2n^2+3n-8}-\sqrt[3]{n^3-8n}\right\}$ será divergente a $-\infty$, simplemente porque el minuendo tiende a $-\infty$ y el sustraendo tiende a $+\infty$, con lo cual sus efectos se ayudan (no es caso de indeterminación). En cambio, $\left\{\sqrt[3]{-2n^2+3n-8}+\sqrt[3]{n^3-8n}\right\}$ es una sucesión divergente a $+\infty$, pues, aunque los signos de ambos sumandos son diferentes y sus efectos se contraponen, el primero tiene orden $2/3$ y el segundo tiene orden 1 (mayor), siendo este el que tiende a $+\infty$.

Por último, para hallar el límite de $\sqrt[n]{3n^2+5n-2}$ (de la forma $\sqrt[n]{a_n}$, con a_n siempre positivo) intentamos conocer el límite de a_n/a_{n-1} :

$$(3n^2+5n-2)/[3(n-1)^2+5\,(n-1)-2]=(3n^2+5n-2)/(3n^2-n-4)$$

luego el límite de a_n/a_{n-1} es $3/3=1$ y entonces el límite buscado también será 1. (Ver Teorema 3 de la Pág. 14).

Ejercicio 5: Calcular los límites de las sucesiones $\left\{n\cdot\left[\sqrt[3]{1+(a/n)}-1\right]\right\}$ $(a\neq 0)$ y $\left\{\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{\sqrt[3]{n^3+8n}-n}\right\}$

El límite de la primera sucesión es un caso de la indeterminación $\infty\cdot 0$, pues a/n tiende a cero y entonces el corchete tiene límite cero. Pero entre los infinitésimos incluimos $(1+u)^\alpha-1$ que es equivalente a $\alpha \cdot u$, cuando $u \to 0$ (ver ejemplo 3 de la pág, 17; siendo aquí $\alpha = 1/3$ y $u = a/n$). Por tanto, para calcular el límite de la primera sucesión podemos sustituir el corchete por su equivalente $(1/3) \cdot (a/n)$, que al multiplicar por n nos da $\boxed{a/3}$ (y este número es el límite pedido, que depende del valor del parámetro $a \neq 0$).

Y el término general de la segunda sucesión dada tiene un numerador y un denominador cuyos límites son ambos de la forma indeterminada $\infty \pm \infty$. El numerador se puede escribir como $\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2}$ (diferencia de raíces cuadradas, que tienden ambas a $+\infty$ y son ambas infinitos de orden 1), luego nos conviene multiplicar y dividir ese numerador por su expresión conjugada $\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2}$. Y el denominador se puede escribir como $\sqrt[3]{n^3+8n} - \sqrt[3]{n^3}$ (diferencia de raíces cúbicas, que tienden ambas a $+\infty$ y son ambas infinitos de orden 1), luego nos convendrá multiplicar y dividir ese denominador por su expresión conjugada vista en el ejercicio anterior $\sqrt[3]{(n^3+8n)^2} + \sqrt[3]{(n^3+8n)\cdot n^3} + \sqrt[3]{(n^3)^2}$. En resumen, tanto numerador como denominador deben ser multiplicados por ambas expresiones conjugadas. Con lo cual, el cociente inicial se convierte en

$$\frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{(n^3+8n)^2}+\sqrt[3]{n^6+8n^4}+\sqrt[3]{n^6}\right)}{8n\cdot\left(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2}\right)}$$

pues, en el numerador, el producto de la diferencia de raíces cuadradas por su expresión conjugada da $(n^2+4) - n^2 = 4$, que quedará multiplicado por la expresión conjugada del denominador, y, en el denominador, el producto de la diferencia de raíces cúbicas por su expresión conjugada da $(n^3+8n) - n^3 = 8n$, que quedará multiplicado por la expresión conjugada del numerador.

Ahora bien, el nuevo numerador es una sucesión divergente de orden 2 y el paréntesis del nuevo denominador es una sucesión divergente de orden 1, que al estar multiplicada por $8n$, nos da un denominador de orden 2. Por tanto, tenemos una indeterminación ∞/∞ con el mismo orden en numerador y denominador, lo cual nos indica que el límite será finito. Para obtenerlo, basta dividir numerador y denominador por n^2, que entrará dividiendo en las tres raíces cúbicas como n^6. Y en el denominador se simplifica $8n/n^2$, con lo cual el paréntesis quedará dividido solamente por n (con lo cual entrará n^2 dividiendo en ambas raíces cuadradas). En conclusión, el nuevo numerador tenderá a $4 \cdot (1+1+1) = 12$ y el nuevo denominador tenderá a $8 \cdot (1+1) = 16$, siendo el límite $\boxed{3/4}$.

Nota: Si numerador y denominador no tuviesen el mismo orden, la conclusión sería más fácil, pues el límite sería cero o sería infinito (en cuyo caso habría solamente que determinar su signo).

Ejercicio 6: Calcular los límites de las sucesiones $\left\{\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{1/(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\right\}$ y $\left\{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^{n}\right\}$.

Ambas sucesiones son potencias indeterminadas del tipo 1^∞, pues en la primera su base puede escribirse $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ y el límite del cociente es 1, mientras que en la segunda su base puede escribirse $1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ que claramente tiende a 1, pues el cociente tiende a cero; en cuanto al exponente de la primera potencia, la diferencia $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tiende a cero pues las dos raíces tienden a coincidir en valor a medida que n crece, luego dicho exponente tiende a $+\infty$ (numerador y denominador positivos). (También puede verse que el límite de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ es cero multiplicando y dividiendo por su expresión conjugada).

Hemos establecido en la Nota Importante de la pág. 13 que los casos de indeterminaciones en forma de potencia (y otras situaciones no claras de límites de potencias) se resuelven buscando el límite del exponente multiplicado por el logaritmo neperiano de la base (para luego ver el límite de la función e^x cuando x tiende al límite anterior). Pero en el ejemplo 3 sobre infinitésimos de la pág. 17 dijimos que en los límites indeterminados del tipo 1^∞ el logaritmo de dicha base puede sustituirse por el infinitésimo equivalente "la base menos 1". Y esto haremos en el cálculo de ambos límites pedidos.

Para la primera sucesión, el límite del exponente por el logaritmo neperiano de la base es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot log_e\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Y para la segunda sucesión, el límite análogo es:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot log_e\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Por tanto, la primera sucesión dada tiene límite $e^0 = 1$ y la segunda sucesión tiene límite $+\infty$ (pues la exponencial e^x tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$).

Ejercicio 7: Calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{a_1+(a_2/2)+(a_3/3)+\cdots+(a_n/n)}{log_e(n+1)}\right\}$, siendo a_n el término general de una sucesión convergente de límite A.

Como el denominador es una sucesión de términos positivos y estrictamente creciente, podemos aplicar el Criterio de Stolz: Si representamos el cociente dado por A_n/B_n, intentamos ver si existe el límite de $(A_n - A_{n-1})/(B_n - B_{n-1})$. Y si éste existe como número real, como $+\infty$ o como $-\infty$, el límite pedido será el mismo. En este caso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+(a_2/2)+\cdots+(a_n/n)}{log_e(n+1)} = (aplicando\ Stolz) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n/n}{log_e(n+1) - log_e n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n \cdot log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{log_e\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]} = \frac{A}{log_e e} = A$$

Como el límite obtenido es el número real A, el límite inicial también es A.

Ejercicio 8: Sabiendo que son convergentes, calcular los límites de las sucesiones $\sqrt{3}$, $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$, …… y $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$, ……

Vemos que ambas son de términos positivos y estrictamente crecientes. Y como nos dicen que ambas son convergentes, tendrán límites positivos.

Podemos definir la primera <u>en forma recurrente</u> como $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$ para todo $n > 1$, siendo $a_1 = \sqrt{3}$. Entonces será $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 + a_{n-1}}$ y como el límite de a_{n-1} coincide con el límite de a_n, llamándolo L se tendrá $L = \sqrt{3 + L}$. Entonces L tendrá que ser solución de la ecuación de segundo grado $L^2 - L - 3 = 0$, la cual tiene soluciones $\left(1 \pm \sqrt{13}\right)/2$. Ambas cumplen la ecuación inicial $L = \sqrt{3 + L}$, como puede comprobarse, pero la solución negativa no sirve porque el límite que buscamos es positivo. Por lo tanto, <u>el límite de la primera sucesión dada será $L = \left(1 + \sqrt{13}\right)/2$</u>.

Y también podemos definir la segunda sucesión dada <u>en forma recurrente</u> como $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$ para todo $n > 1$, siendo $a_1 = \sqrt{2}$. Entonces su límite L cumplirá la ecuación $L = \sqrt{2 \cdot L}$. Con lo cual será solución de la ecuación de segundo grado $L^2 - 2L = 0$, las cuales son $L = 0$ y $L = 2$. Las dos cumplen la ecuación $L = \sqrt{2 \cdot L}$, pero <u>sabemos que el límite tiene que ser positivo, luego el límite de la segunda sucesión será $L = 2$</u>.
