

INTEGRALES INDEFINIDAS

(Prerrequisito: Derivadas de funciones de una variable)

Concepto

Dada una función $f(x)$, se llama “integral indefinida” de dicha función al conjunto de todas las “primitivas” o “antiderivadas” de la misma, entendiendo por “primitiva o antiderivada de $f(x)$ ” cualquier función $F(x)$ que tenga como derivada la función $f(x)$, en un cierto intervalo abierto donde $F(x)$ sea derivable.

Se escribe: $\int f(x) dx = F(x) + K$, siendo $F'(x) \equiv f(x)$ en un cierto intervalo abierto

En esta notación $f(x)$ se llama “función integrando” (o simplemente “integrando”) y K es una constante real arbitraria, que llamaremos “constante de integración”. Se demuestra que si $F(x)$ es una cierta primitiva de $f(x)$ en un intervalo, el conjunto de todas las primitivas en el mismo intervalo está representado por la expresión $F(x) + K$, siendo la diferencia entre unas y otras los diferentes valores que queramos dar a la constante K (para $K = 0$ se tendrá la propia primitiva $F(x)$ y para los demás valores de K se tendrán las restantes primitivas de $f(x)$).

Integrales inmediatas

Se llaman así todas las integrales que se deduzcan inmediatamente de las derivadas de las funciones básicas y de las reglas de derivación. Podríamos dar las siguientes principales (pero hay muchas más):

$$\int dx = \int 1 dx = x + K \quad ; \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad (\text{si } \alpha \neq -1) \quad ; \quad \int x^{-1} dx = \ln|x| + K$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + K \quad ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K \quad (a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

$$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + K \quad (a \neq 0) \quad ; \quad \int \cos ax dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + K \quad (a \neq 0)$$

$$\int \operatorname{tag} x dx = -\ln|\cos x| + K \quad ; \quad \int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + K \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tag} x + K$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + K \quad ; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tag} x + K \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + K$$

$$\int \operatorname{sh} ax dx = \frac{\operatorname{ch} ax}{a} + K \quad ; \quad \int \operatorname{ch} ax dx = \frac{\operatorname{sh} ax}{a} + K \quad ; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\operatorname{th} ax}{a} + K$$

Todas se pueden comprobar, por derivación de los correspondientes resultados. Consideraremos también inmediatas las dos integrales adicionales:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + K \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + K$$

que se comprueban también por derivación y simplificación de los resultados dados.

Nota 1: Recuerdese que la derivada de $\ln|x|$ no es $1/|x|$ sino es $1/x$, para todo $x \neq 0$. En efecto, el dominio de $\ln|x|$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, estando definida la función, a trozos, del siguiente modo: Si es x positivo, será $\ln|x| = \ln x$ y si es x negativo, será $\ln|x| = \ln(-x)$. Pero entonces, para $x > 0$ la

INTEGRALES INDEFINIDAS

derivada es $1/x$ (positiva) y para $x < 0$ la derivada (por Regla de la Cadena) es $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = 1/x$ (negativa). En resumen: La derivada de $1/|x|$ es $1/x$ en todo el dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Por tanto, la derivada de la función compuesta $\ln|f(x)|$ será por Regla de la Cadena: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, siempre que $f(x) \neq 0$, sin importar que $f(x)$ sea positiva o negativa.

Si dibujamos la gráfica de la función $y = \ln|x|$, con sus dos arcos de curva simétricos respecto al eje OY (característica de función par), quedando dicho eje como asíntota vertical de ambos arcos, se entiende geoméricamente que la derivada sea positiva para los x positivos (pues la función es creciente) y que la derivada sea negativa para los x negativos (pues la función es decreciente).

Nota 2: Por supuesto, cada integral indefinida dada anteriormente es válida en un cierto intervalo abierto o en varios intervalos abiertos donde la función primitiva dada sea derivable y su derivada coincida con la función integrando (que debe existir en dichos intervalos).

Ejemplos: 1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + K$ es cierta en los intervalos abiertos donde sea derivable y no se anule la función $f(x)$ del denominador. 2) Así $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + K$ es cierta en cada uno de los intervalos abiertos determinados por las raíces de la ecuación $\cos x = 0$, o sea en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, en $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, etc..., así como en $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, en $(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$, etc... Luego no es cierta, por ejemplo, en todo $\mathbb{R}$. 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + K$ es cierta en cada uno de los intervalos abiertos determinados por las raíces de la ecuación $\sin x = 0$, que son $0, \pm\pi, \pm2\pi$, etc... 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + K$ es cierta solamente en el intervalo $(-1, 1)$, donde existen $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\arcsen x$. 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + K$ es cierta en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, poniéndose el valor absoluto para que se cumpla cuando estemos en el intervalo $(-\infty, -1)$, porque $x + \sqrt{x^2-1}$ será negativo y con el valor absoluto existirá el logaritmo neperiano. 6) En cambio, es cierta en todo $\mathbb{R}$ la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + K$ porque no se anula el denominador, y ahora no ponemos el valor absoluto de $x + \sqrt{1+x^2}$ porque esta expresión siempre dará valores positivos, aunque sean negativos los valores de x (en efecto, $\sqrt{1+x^2}$ siempre será positivo de mayor valor absoluto que x). Y así muchos más casos.

Nota 3: Las funciones “seno hiperbólico”, “coseno hiperbólico” y “tangente hiperbólica” son las siguientes: $sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $th x = \frac{sh x}{ch x}$, definidas en todo $\mathbb{R}$. Cumplen las identidades $ch^2 x - sh^2 x \equiv 1$ y $th x \equiv \frac{sh x}{ch x}$. Y es inmediato probar que la derivada del “seno hiperbólico” es el “coseno hiperbólico”, que la derivada del “coseno hiperbólico” es el “seno hiperbólico” y que la derivada de la “tangente hiperbólica” es $1/ch^2 x$. Por ello hemos incluido las tres últimas integrales inmediatas en el primer grupo de integrales, dado en la página anterior. (Las funciones hiperbólicas se utilizarán para resolver más cómodamente ciertas integrales y en la pág. 15 daremos algunas propiedades importantes de estas funciones).

Propiedades de las integrales indefinidas

Se basan en propiedades conocidas de las derivadas:

1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$. Se basa en que la derivada de una suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de las derivadas respectivas.

2) $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$. Se basa en que la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función. En particular, $\int \frac{f(x)}{c} dx = \frac{1}{c} \cdot \int f(x) dx$ ($c \neq 0$)

INTEGRALES INDEFINIDAS

3) $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx$. Se basa en que la derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda, con lo cual $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$. Luego aplicamos la propiedad 1) y utilizamos que $\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = f(x) \cdot g(x) + K$ (obvio).

4) $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + K$, siendo $F'(x) \equiv f(x)$. Se basa en la Regla de la Cadena (derivada de una función compuesta).

Nota: En las tres primeras propiedades anteriores, se sobreentiende que el resultado de cada integral indefinida llevará una constante de integración. Así, en la propiedad 1), si llamamos K a la constante de la primera integral y llamamos K_1 y K_2 a las constantes de las otras dos integrales, se tendrá la relación $K = K_1 \pm K_2$ (todas indeterminadas). En la propiedad 2), si llamamos K a la constante de la primera integral y llamamos K_1 a la constante de la segunda, será $K = c \cdot K_1$. Y en la propiedad 3) las constantes de integración del primer y segundo miembro son la misma.

Métodos generales de integración

Se basan en las propiedades anteriores y son tres:

- 1) Método de integración “por descomposición”.
- 2) Método de integración “por partes”.
- 3) Método de integración “por cambio de variable” (o “por sustitución”).

El primero se basa en las 2 primeras propiedades y se aplica a integrandos que sean sumas o diferencias de ciertas funciones multiplicadas eventualmente por algunas constantes (o bien, que puedan expresarse de ese modo).

El segundo se basa en la propiedad 3, que se aplica usando una versión simplificada conocida como “fórmula de integración por partes” ($\int u dv = u \cdot v - \int v du$).

Y el tercero se basa en la propiedad 4, donde se hace el “cambio de variable” $g(x) = t$, con lo cual $g'(x) dx = dt$ y así la integral del primer miembro queda como $\int f(t) dt$. Entonces, al resolverla, se obtendrá la expresión $F(t) + K$, donde $F'(t) \equiv f(t)$, y al deshacer el cambio de variable utilizado llegamos finalmente al resultado $F[g(x)] + K$.

TIPOS IMPORTANTES DE INTEGRALES INDEFINIDAS

1.- Integrales de funciones racionales

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios de coeficientes reales.

El método general de integración que se aplica en los diferentes casos que veremos es el de “integración por descomposición”, aunque en algún caso muy puntual usaremos “cambio de variable”.

Estas integrales están entre las más utilizadas en aplicaciones y además en el apartado 2 veremos otras integrales importantes que se reducen a éstas “por cambios de variable” apropiados.

1.1) Caso en que grado de $P(x)$ $\geq$ grado de $Q(x)$: Se divide $P(x)$ entre $Q(x)$, obteniéndose el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de la división, con lo cual podemos aplicar la propiedad 1) anterior y se tiene:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right] dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

donde grado de $R(x)$ $<$ grado de $Q(x)$. La primera integral es muy sencilla (se resuelve aplicando el método de integración por descomposición, que conduce a integrales inmediatas de potencias

INTEGRALES INDEFINIDAS

de exponente entero positivo de la variable x) y la segunda corresponde al caso **1.2** que vemos a continuación.

1.2) Caso en que $\text{grado de } P(x) < \text{grado de } Q(x)$: Se usa el método general de integración por descomposición. Podemos distinguir varios subcasos muy frecuentes y en los demás subcasos donde el polinomio del denominador sea de grado mayor que 3, se procede análogamente:

1.2.1) (Subcaso más simple: denominador de primer grado):

$$\int \frac{m}{ax+b} dx = \frac{m}{a} \cdot \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{m}{a} \cdot \ln|ax+b| + K$$

(se supone $m \neq 0$ y $a \neq 0$).

1.2.2) $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ (denominador de segundo grado; se supone $a \neq 0$ y además que el numerador no sea el polinomio cero). Tiene tres posibilidades, en función del signo del discriminante $b^2 - 4ac$:

1.2.2.1) Suponemos $b^2 - 4ac > 0$ (con lo cual el polinomio del denominador tiene dos raíces reales diferentes, que llamaremos α y β):

Primero factorizamos el polinomio del denominador

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-\alpha)(x-\beta)} dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx =$$

(ahora descomponemos el integrando en suma de dos "fracciones simples")

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \cdot \int \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \right) dx = \frac{1}{a} \cdot \left(A \cdot \int \frac{1}{x-\alpha} dx + B \cdot \int \frac{1}{x-\beta} dx \right) = \\ &= \frac{1}{a} \cdot [A \cdot \ln|x-\alpha| + B \cdot \ln|x-\beta|] + K \end{aligned}$$

donde las constantes A y B deben ser calculadas aparte.

Dicho cálculo resulta de la identidad siguiente que ha sido usada anteriormente:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} \equiv \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{mx+n \equiv A \cdot (x-\beta) + B \cdot (x-\alpha)}$$

Al tener que cumplirse esta última identidad de polinomios, los valores de ambos miembros coincidirán para cualquier valor de x . Para $x = \alpha$ queda: $m\alpha + n = A \cdot (\alpha - \beta)$, de donde se despeja el valor de A . Y para $x = \beta$ queda: $m\beta + n = B \cdot (\beta - \alpha)$, de donde se despeja el valor de B .

Ejemplo:
$$\int \frac{3x-2}{2x^2-2x-1} dx = \int \frac{3x-2}{2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot [A \cdot \ln|x+2| + B \cdot \ln|x-3|] + K$$

donde se tiene que cumplir la identidad $\frac{3x-2}{(x+2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$ que se traduce en la identidad de polinomios $\boxed{3x-2 \equiv A(x-3) + B(x+2)}$. Al sustituir x por -2 (valor de α) se tiene $-8 = -5A$, de donde resulta $A = 8/5$. Y al sustituir x por 3 (valor de β) se tiene $7 = 5B$, de donde resulta $B = 7/5$. En conclusión:

$$\int \frac{3x-2}{2x^2-2x-1} dx = \frac{4}{5} \cdot \ln|x+2| + \frac{7}{10} \cdot \ln|x-3| + K$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

1.2.2.2) Suponemos $b^2 - 4ac = 0$ (con lo cual el polinomio del denominador tiene dos raíces reales iguales, o bien una raíz real doble, que llamamos α):

Primero factorizamos el polinomio del denominador

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{mx+n}{a(x-\alpha)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} dx =$$

(ahora descomponemos el integrando en suma de dos "fracciones simples")

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \cdot \int \left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} \right] dx = \frac{1}{a} \cdot [A \cdot \ln|x-\alpha| + B \cdot \int (x-\alpha)^{-2} dx] = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left[A \cdot \ln|x-\alpha| + B \cdot \frac{(x-\alpha)^{-1}}{-1} \right] + K = \frac{1}{a} \cdot \left[A \cdot \ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} \right] + K \end{aligned}$$

donde las constantes A y B deben ser calculadas aparte.

Dicho cálculo resulta de la identidad siguiente que ha sido usada anteriormente:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} \equiv \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{mx+n \equiv A \cdot (x-\alpha) + B}$$

Al tener que cumplirse esta última identidad de polinomios, los valores de ambos miembros coincidirán para cualquier valor de x . Para $x = \alpha$ queda: $m\alpha + n = B$, que nos da el valor de B . Y, por ejemplo, para $x = 0$ queda: $n = -A \cdot \alpha + B$, que permite obtener el valor de A (en caso de que la raíz doble fuese 0, daríamos otro valor de x muy sencillo para calcular A , como $x = 1$).

Ejemplo:
$$\int \frac{-x+5}{2x^2-12x+18} dx = \int \frac{-x+5}{2(x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \left[\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \right] dx = \frac{A}{2} \cdot \ln|x-3| + \frac{B}{2} \cdot \int (x-3)^{-2} dx = \frac{A}{2} \cdot \ln|x-3| - \frac{B}{2(x-3)} + K$$

donde se tiene que cumplir la identidad $\frac{-x+5}{(x-3)^2} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$ que es equivalente a esta otra $\boxed{-x+5 \equiv A(x-3) + B}$. Dando el valor $x = 3$ resulta $\boxed{2 = B}$. Y dando el valor $x = 0$ resulta $5 = -3A + B$, de donde tenemos $5 = -3A + 2$, o sea $\boxed{A = -1}$. En conclusión:

$$\int \frac{-x+5}{2x^2-12x+18} dx = -\frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{x-3} + K$$

(Como en cualquier otro caso, podemos comprobar que el resultado es correcto derivando el mismo, para llegar al integrando dado después de operar y simplificar).

1.2.2.3) Suponemos $b^2 - 4ac < 0$ (con lo cual el polinomio del denominador tiene dos raíces imaginarias conjugadas): Tenemos el caso más incómodo de resolver, pues no podemos factorizar dicho polinomio en el campo real. Primero veremos cómo se procede si $m = 0$ (con lo cual el numerador es constante, en cuyo caso se llega a un arco tangente) y luego veremos la posibilidad $m \neq 0$ (el numerador es de primer grado, en cuyo caso se obtiene con seguridad un logaritmo neperiano y además, posiblemente, un arco tangente).

Si es $m = 0$ será $n \neq 0$ y procedemos así:

$$\begin{aligned} \int \frac{n}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{n}{a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)} dx = \frac{n}{a} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{n}{a} \cdot \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} = \\ &= \frac{n}{a} \cdot \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} \end{aligned}$$

Ahora, para abreviar, llamamos $\frac{b}{2a} = p$ y $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -q^2$, ya que estamos en el caso en que $b^2 - 4ac < 0$ y entonces el último cociente es negativo.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Por tanto, hemos llegado a la integral $\frac{n}{a} \cdot \int \frac{dx}{(x+p)^2+q^2} = \frac{n}{a \cdot q^2} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1}$. Finalmente hacemos el cambio de variable $\boxed{\frac{x+p}{q} = t}$, con lo cual $\boxed{dx = q \, dt}$ y la integral se convierte en:

$$\frac{n}{a \cdot q^2} \cdot \int \frac{q \, dt}{t^2+1} = \frac{n}{a \cdot q} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{n}{a \cdot q} \cdot \arctan t + K = \boxed{\frac{n}{a \cdot q} \cdot \arctan \left(\frac{x+p}{q}\right) + K}$$

Y si es $m \neq 0$, el numerador es de primer grado, con lo cual podemos obtener a partir del mismo la derivada del denominador. Procedemos así:

$$\begin{aligned} \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{m}{2a} \cdot \int \frac{\frac{2a}{m} \cdot (mx+n)}{ax^2+bx+c} dx = \frac{m}{2a} \cdot \int \frac{2a + \frac{2an}{m}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{m}{2a} \cdot \int \frac{2ax+b-\frac{2a}{m}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{m}{2a} \cdot \left[\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{\frac{2a}{m}-b}{ax^2+bx+c} dx \right] = \\ &= \frac{m}{2a} \cdot \ln|ax^2+bx+c| + \frac{m}{2a} \cdot \left(\frac{2an-bm}{m} \right) \cdot \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \boxed{\frac{m}{2a} \cdot \ln|ax^2+bx+c| + \frac{2an-bm}{2a} \cdot I} \end{aligned}$$

donde I es una integral como la que resolvimos anteriormente, la cual da un arco tangente (que no aparecerá cuando sea $2an - bm = 0$).

Conclusión: Las integrales de la forma $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$, en las que se cumpla la condición $b^2 - 4ac < 0$, dan generalmente un logaritmo neperiano más un arco tangente, pero pueden dar sólo el neperiano o sólo el arco tangente.

Ejemplo: $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{\frac{2}{3}(3x-1)}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x-\frac{2}{3}}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x+4-\frac{14}{3}}{x^2+4x+8} dx =$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+8} + \frac{-\frac{14}{3}}{x^2+4x+8} \right) dx = \frac{3}{2} \cdot \left[\ln|x^2+4x+8| - \frac{14}{3} \cdot I \right] = \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2+4x+8| - 7 \cdot I$$

donde I es la integral $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}$, en la cual hacemos el cambio de variable $\frac{x+2}{2} = t$ con lo cual $dx = 2dt$. Queda entonces:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \arctan t + K = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{x+2}{2}\right) + K$$

Finalmente, el resultado de la integral dada será:

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2+4x+8| - \frac{7}{2} \cdot \arctan \left(\frac{x+2}{2}\right) + K$$

Nota: No es preciso hacer operaciones con las distintas constantes de integración que aparezcan en las integrales intermedias. Basta agregar al final una única constante de integración en todos los casos.

1.2.3) $\int \frac{mx^2+px+q}{ax^3+bx^2+cx+d} dx$ (denominador de tercer grado; se supone $a \neq 0$ y además que el numerador no sea el polinomio cero). Este subcaso (el último que estudiaremos en detalle) tiene cuatro posibilidades, según sean las raíces de la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Dichas posibilidades corresponden a que dicha ecuación tenga: Tres raíces reales diferentes, dos raíces reales diferentes siendo una de ellas doble, una sola raíz real triple o bien una raíz real y dos imaginarias conjugadas.

INTEGRALES INDEFINIDAS

1.2.3.1) Suponemos que la ecuación de tercer grado mencionada tiene tres raíces reales distintas (α , β y γ). Entonces, factorizando el polinomio del denominador se tiene:

$$\int \frac{mx^2+nx+p}{ax^3+bx^2+cx+d} dx = \int \frac{mx^2+nx+p}{a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} dx =$$

(y descomponiendo el integrando en suma de "fracciones simples")

$$= \frac{1}{a} \cdot \int \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} \right) dx = \frac{1}{a} \cdot [A \cdot \ln|x-\alpha| + B \cdot \ln|x-\beta| + C \cdot \ln|x-\gamma|] + K$$

donde las constantes A , B y C deben ser calculadas aparte, de modo similar a lo hecho en el subcaso 1.2.2.1. Esta vez debemos dar valores $x = \alpha$, $x = \beta$ y $x = \gamma$ en la identidad de polinomios para obtener los valores de las tres constantes desconocidas.

1.2.3.2) Suponemos que la ecuación de tercer grado mencionada tiene una raíz real doble (α) y otra raíz real simple (β). Entonces, factorizando el polinomio del denominador:

$$\int \frac{mx^2+nx+p}{ax^3+bx^2+cx+d} dx = \int \frac{mx^2+nx+p}{a(x-\alpha)^2(x-\beta)} dx = (\text{descomponiendo en "fracciones simples"}) =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \int \left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{x-\beta} \right] dx = \frac{1}{a} \cdot \left[A \cdot \ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} + C \cdot \ln|x-\beta| \right] + K$$

donde las constantes A , B y C deben ser calculadas aparte, de modo similar a lo hecho en el subcaso 1.2.2.2. En esta ocasión debemos dar valores $x = \alpha$, $x = \beta$ y otro valor a la variable x (muy sencillo y diferente a los anteriores) en la identidad de polinomios, para así obtener los valores de las tres constantes desconocidas.

1.2.3.3) Suponemos que la ecuación de tercer grado mencionada tiene una única raíz real triple (α). Entonces, factorizando el polinomio del denominador:

$$\int \frac{mx^2+nx+p}{ax^3+bx^2+cx+d} dx = \int \frac{mx^2+nx+p}{a(x-\alpha)^3} dx = (\text{descomponiendo en "fracciones simples"}) =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \int \left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3} \right] dx = \frac{1}{a} \cdot \left[A \cdot \ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2 \cdot (x-\alpha)^2} \right] + K$$

donde las constantes A , B y C deben calcularse aparte, de modo similar a lo que hicimos en el subcaso anterior 1.2.3.2. En esta ocasión debemos dar el valor $x = \alpha$ y otros dos valores diferentes (lo más sencillos posibles) en la identidad de polinomios, para llegar a obtener los valores de las constantes desconocidas A , B y C .

1.2.3.4) Suponemos, por último, que la ecuación de tercer grado que habíamos mencionado tiene una única raíz real simple (α) y tiene además dos raíces imaginarias conjugadas. Entonces al factorizar en el campo real el polinomio del denominador obtendremos el factor $(x - \alpha)$ y un factor de segundo grado con discriminante negativo que incluye las dos raíces complejas conjugadas:

$$\int \frac{mx^2+nx+p}{ax^3+bx^2+cx+d} dx = \int \frac{mx^2+nx+p}{a(x-\alpha)(x^2+rx+s)} dx = (\text{descomponiendo en "fracciones simples"}) =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \int \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+rx+s} \right) dx = \frac{1}{a} \cdot [A \cdot \ln|x-\alpha| + I] \quad (\text{con la condición: } p^2 - 4q < 0)$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

donde $I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ es una integral del tipo 1.2.2.3 que nos dará finalmente otro logaritmo neperiano y un arco tangente (o sólo una de estas funciones). Pero antes de resolver I deben calcularse aparte las constantes A , B y C , para lo cual daremos valores a la variable x en la identidad de polinomios obtenida, como dijimos en el subcaso anterior 1.2.3.3.

EN GENERAL: Las integrales del tipo 1.2, con denominadores que no tengan raíces complejas múltiples, se resolverán factorizando el polinomio del denominador, luego descomponiendo el integrando en “fracciones simples”, para finalmente integrar cada una de esas “fracciones simples” (obteniendo una combinación de logaritmos neperianos solamente o bien una combinación de logaritmos neperianos y arcos tangentes). Sólo las integrales del tipo 1.2.2.3 con $m = 0$ dan como resultado un único arco tangente.

Y las “fracciones simples” a utilizar serán siempre de los siguientes tipos:

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n} \quad (n \text{ entero mayor que } 1) \quad \text{y} \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (\text{cumpliéndose } p^2 - 4q < 0)$$

Y sus respectivas integrales son, como sabemos: Un logaritmo neperiano (para la primera), una potencia de exponente entero negativo (para la segunda) y, en general, un logaritmo neperiano más un arco tangente (para la tercera).

Nota 1: Si el polinomio del denominador tuviese raíces imaginarias múltiples (dobles, triples, etc...), caso que no tratamos por ahora, habría que usar un método especial llamado Método de Hermite, el cual reduce ese caso a uno sin raíces complejas múltiples en el denominador, como los vistos anteriormente. (Ver el Método de Hermite a partir de la pág. 19).

Nota 2: Es muy importante resaltar que el número total de constantes a determinar en el proceso de descomposición en “fracciones simples” coincide siempre con el grado del denominador (recuérdese que en los casos 1.2.2.1 y 1.2.2.2 se necesitaban dos constantes que llamábamos A y B , siendo 2 el grado del denominador, y en los casos 1.2.3.1, 1.2.3.2, 1.2.3.3 y 1.2.3.4 siempre se necesitaban tres constantes que llamábamos A , B y C , siendo 3 el grado del denominador). Y para denominadores de grados mayores esto sigue siendo así.

2.- Integrales de funciones trascendentes que se convierten en integrales de funciones racionales mediante cambios de variable

2.1) **Tipo exponencial**, con la forma $\int \frac{P(a^x)}{Q(a^x)} dx$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$: Se les aplica el cambio de variable $\boxed{a^x = t}$, con lo cual resulta $\boxed{dx = \frac{1}{t} \cdot \log_a e \, dt}$.

(Las expresiones $P(a^x)$ y $Q(a^x)$ representan funciones compuestas de la exponencial a^x con polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente).

Ejemplo: $\int \frac{3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}{2^{2x} - 9} dx$, donde el numerador es la compuesta de 2^x con el polinomio $3x^2 - 5x + 4$ y el denominador es la compuesta de 2^x con el polinomio $x^2 - 9$. Al hacer el cambio de variable $\boxed{2^x = t}$, del cual resulta $x = \log_2 t$, se obtiene $\boxed{dx = \frac{1}{t} \cdot \log_2 e \, dt}$. Por tanto, la integral se convertirá en $\int \frac{3t^2 - 5t + 4}{t^2 - 9} \cdot \frac{1}{t} \cdot \log_2 e \, dt$ que puede escribirse como $\log_2 e \cdot \int \frac{3t^2 - 5t + 4}{(t^2 - 9) \cdot t} dt$, (es del tipo 1.2.3.1, con raíces del denominador 0, 3 y -3). Una vez resuelta, habría que deshacer el cambio de variable para tener la respuesta de la integral dada.

INTEGRALES INDEFINIDAS

2.2) **Tipo logarítmico, con la forma** $\int \frac{P(\log_a x)}{Q(\log_a x)} \cdot \frac{dx}{x}$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$: Se les aplica el cambio de variable $\boxed{\log_a x = t}$, con lo cual resulta $\boxed{\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\log_a e} = \ln a \, dt}$.

(Las expresiones $P(\log_a x)$ y $Q(\log_a x)$ son funciones compuestas de $\log_a x$ con polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente).

Ejemplo: $\int \frac{3 \cdot \log^3 x}{2 + \log x} \cdot \frac{dx}{x}$, donde el numerador de la primera fracción es la compuesta de $\log x$ (logaritmo decimal de x) con el monomio $3x^3$, y el denominador de la misma fracción es la compuesta de $\log x$ con el binomio $2 + x$. Al hacer el cambio de variable $\boxed{\log x = t}$, del cual se deduce $dt = \frac{1}{x} \cdot \log e \, dx$, o bien $\boxed{\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\log e} = \ln 10 \, dt}$, la integral queda así: $\int \frac{3t^3}{2+t} \cdot \ln 10 \, dt$, que puede escribirse como $3 \cdot \ln 10 \cdot \int \frac{t^3}{t+2} dt$ (del tipo 1.1, luego habrá que dividir t^3 entre $t + 2$ para empezar). Su solución es $\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 4t - 8 \cdot \ln|t + 2| + K$. Con lo cual la solución de la integral dada será:

$$\int \frac{3 \cdot \log^3 x}{2 + \log x} dx = \frac{1}{3} \cdot \log^3 x - \log^2 x + 4 \cdot \log x - 8 \cdot \ln|2 + \log x| + K$$

2.3) **Tipo trigonométrico, con la forma** $\int \frac{P(\sen x)}{Q(\sen x)} \cdot \cos x \, dx$. Se les aplica el cambio de variable $\boxed{\sen x = t}$, con lo cual resulta $\boxed{\cos x \, dx = dt}$.

Ejemplo: $\int \frac{3 \sen^2 x}{\sen^3 x + 8} \cdot \cos x \, dx$. El numerador es la compuesta de $\sen x$ con el monomio $3x^2$, y el denominador es la compuesta de $\sen x$ con el binomio $x^3 + 8$. Por tanto, al aplicar el cambio de variable $\boxed{\sen x = t}$, la integral quedará $\int \frac{3t^2}{t^3+8} dt$ (del tipo 1.2.3.4, pues el denominador tiene la raíz real -2 y dos raíces imaginarias conjugadas). Una vez resuelta, hay que deshacer el cambio de variable. Pero observamos que su numerador es la derivada del denominador, con lo cual es inmediata: $\int \frac{3t^2}{t^3+8} dt = \ln|t^3 + 8| + K$. Así la integral dada será $\ln|\sen^3 x + 8| + K$ (deshecho el cambio de variable).

2.4) **Tipo trigonométrico, con la forma** $\int \frac{P(\cos x)}{Q(\cos x)} \cdot \sen x \, dx$. Se les aplica el cambio de variable $\boxed{\cos x = t}$, con lo cual resulta $\boxed{\sen x \, dx = -dt}$.

Ejemplo: $\int (\cos^4 x - 3 \cos x + 1) \cdot \sen x \, dx$. Al hacer el cambio indicado, la integral queda como $\int (t^4 - 3t + 1) \cdot (-dt) = \int (-t^4 + 3t - 1) dt = -\frac{t^5}{5} + 3 \cdot \frac{t^2}{2} - t + K$. Y al deshacer el cambio de variable, resulta finalmente $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3 \cdot \cos^2 x}{2} - \cos x + K$.

2.5) **Tipo trigonométrico, con la forma** $\int \frac{P(\tag x)}{Q(\tag x)} dx$. Se les aplica el cambio de variable $\boxed{\tag x = t}$, con lo cual $x = \arc \tag t$ y resulta $\boxed{dx = \frac{dt}{t^2+1}}$.

Ejemplo: $\int \tag^3 x \, dx$. Al hacer el cambio indicado, la integral dada pasa a $\int t^3 \cdot \frac{dt}{t^2+1}$, o bien $\int \frac{t^3}{t^2+1} dt$ (del tipo 1.1). Hacemos la división y se convierte en $\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt$ que nos da $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + K$ (por ser $2t$ la derivada de $t^2 + 1$ y por ser este polinomio siempre positivo,

INTEGRALES INDEFINIDAS

con lo cual sobra el valor absoluto). Entonces, deshaciendo el cambio de variable, tenemos finalmente el resultado $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tag}^2 x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + \operatorname{tag}^2 x) + K$.

2.6) Integrales de funciones racionales en senos y cosenos, con la forma $\int \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} dx$ donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios en las variables x e y , las cuales están sustituidas por las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ respectivamente (son funciones compuestas también).

Hay tres casos particularmente importantes:

2.6.1) El integrando es impar en $\operatorname{sen} x$ (cuando se cambia de signo $\operatorname{sen} x$, todo el integrando cambia de signo). El cambio de variable $\boxed{\cos x = t}$ las convierte en integrales de funciones racionales.

2.6.2) El integrando es impar en $\cos x$ (cuando se cambia de signo $\cos x$, todo el integrando cambia de signo). El cambio de variable $\boxed{\operatorname{sen} x = t}$ las convierte en integrales de funciones racionales.

2.6.3) El integrando es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (cuando se cambian de signo a la vez $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, el integrando no cambia de signo). Se usa el cambio de variable: $\boxed{\operatorname{tag} x = t}$, que implica las sustituciones $\operatorname{sen}^2 x = t^2/(t^2 + 1)$, $\cos^2 x = 1/(t^2 + 1)$, $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = t/(t^2 + 1)$ y $dx = dt/(t^2 + 1)$. Con ello las integrales dadas se convierten en integrales de funciones racionales.

2.6.4) Otros casos se pueden resolver mediante el cambio universal: $\boxed{\operatorname{tag}(x/2) = t}$, que implica $\operatorname{sen} x = 2t/(1 + t^2)$, $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ y $dx = 2dt/(1 + t^2)$. También se llega a integrales de funciones racionales.

Ejemplos:

1) $\int \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3\cos x + \operatorname{sen}^2 x} dx$ (integrando impar en $\operatorname{sen} x$). Hacemos el cambio $\boxed{\cos x = t}$, con lo cual $\operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$ y $\operatorname{sen} x dx = -dt$, obteniéndose la nueva integral $\int \frac{2(1-t^2)}{3t+(1-t^2)} (-dt) = -2 \cdot \int \frac{t^2-1}{t^2-3t-1} dt$ que es una integral de función racional, con grados de numerador y denominador iguales (tipo **1.1**), luego hay que empezar dividiendo. Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable.

2) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2}{\operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x} dx$ (integrando par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$). Hacemos el cambio $\boxed{\operatorname{tag} x = t}$ y se tiene la nueva integral $\int \frac{\frac{t}{t^2+1} + 2}{\frac{t^2}{t^2+1} - 4 \cdot \frac{1}{t^2+1}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t+2(t^2+1)}{(t^2-4) \cdot (t^2+1)} dt$ que es una integral de función racional, con grado del numerador menor que el grado del denominador (tipo **1.2**). El denominador es de grado 4 y tiene dos raíces reales simples (2 y -2) y dos raíces imaginarias conjugadas (i y $-i$); se necesitan entonces tres fracciones simples con 4 constantes a determinar que son $A/(t-2)$, $B/(t+2)$ y $(Ct+D)/(t^2+1)$. Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable.

3) $\int \frac{1}{3-\operatorname{sen} x} dx$ (no es impar en $\operatorname{sen} x$, no es impar en $\cos x$ ni es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$). Hacemos el cambio $\boxed{\operatorname{tag}(x/2) = t}$ y se tiene la nueva integral $\int \frac{1}{3-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)-2t}$ que es una integral de función racional, con grado del numerador menor que el grado del denominador (tipo **1.2**). Su denominador es $3t^2 - 2t + 3$ y tiene dos raíces complejas conjugadas, pues su discriminante es -32 . Entonces corresponde al tipo 1.2.2.3 y dará como resultado solamente un arco tangente (ya que su numerador es constante). Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Nota 1: No se recomienda hacer uso del cambio universal cuando haya otro cambio específico, pues el cambio universal produce muchas veces integrales de funciones racionales más complicadas.

Una excepción es la integral $\int \frac{dx}{\sin x}$, cuyo integrando es impar en $\sin x$ y su cambio de variable específico será $\boxed{\cos x = t}$. Para aplicarlo, se tendrá $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{-dt}{1 - t^2}$, o bien $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt = \dots$. Y al final se deshace el cambio de variable.

Pero si aplicamos el cambio universal $\boxed{\tan(x/2) = t}$ tendremos la integral $\int \frac{2dt/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t}$ que da directamente el resultado $\ln|t| + K$, con lo cual la integral inicial será $\ln|\tan(x/2)| + K$.

Nota 2: Está claro que el resultado final de muchas integrales que pueden resolverse por diferentes cambios de variable, como las de tipo trigonométrico vistas anteriormente, dependerá del cambio de variable que se utilice en su resolución. Esto no debe sorprendernos, pues hay infinitas antiderivadas de una misma función dada, de modo que las antiderivadas obtenidas por distintos cambios de variable pueden ser diferentes expresiones de una misma función, pero muchas veces son funciones diferentes (que necesariamente diferirán en una constante, la cual muchas veces no es visible; habría que calcular sus imágenes para un mismo valor de x y restarlas, para conocer dicha constante).

Por ejemplo, la integral $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ se puede resolver usando el cambio $\cos x = t$ (por ser su integrando una función racional en las dos funciones trigonométricas, de denominador 1, que es impar en $\sin x$). Pero la misma integral se puede resolver usando el cambio $\sin x = t$ (por ser su integrando impar en $\cos x$). Hecha del primer modo, resulta su solución $-\frac{\cos^2 x}{2} + K$.

Y hecha del segundo modo, resulta su solución $\frac{\sin^2 x}{2} + K$. Pues bien, las funciones $-\frac{\cos^2 x}{2}$ y $\frac{\sin^2 x}{2}$ son antiderivadas diferentes de la función integrando $\sin x \cdot \cos x$ (de hecho, la diferencia entre esas antiderivadas es $\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right) = \frac{1}{2}$).

3.- Integrales de potencias enteras del coseno, de potencias enteras del seno y del producto de unas y otras

3.1) **Tipo trigonométrico**, con la forma $\int \cos^n x \, dx$, siendo n entero distinto de cero. Los casos $n = 1$ y $n = -2$ están resueltas por ser inmediatas. Las demás se procesan según valores de n :

- Si n es impar (positivo o negativo), se aplica el cambio de variable $\boxed{\sin x = t}$.
- Si n es par positivo, se usa la identidad trigonométrica $\boxed{\cos^2 x \equiv \frac{1 + \cos 2x}{2}}$.
- Si n es par negativo, se usa una “fórmula de reducción” (que convierte el caso n en el caso $n - 2$). La demostraremos y aprenderemos a usarla en las páginas 17 y 18. (Esta fórmula también sirve para casos en que n es par positivo, pero suele ser más rápido usar la identidad trigonométrica mencionada).

Ejemplos:

1) $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx$. Aplicando ahora el cambio de variable $\sin x = t$, la integral se transforma en $\int (1 - t^2)^2 dt$, que es muy sencilla desarrollando el cuadrado del binomio. Nos da $t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + K$ y deshaciendo el cambio de variable obtenemos finalmente $\sin x - \frac{2}{3} \cdot \sin^3 x + \frac{1}{5} \cdot \sin^5 x + K$.

INTEGRALES INDEFINIDAS

2) $\int \cos^{-3} x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{(1-\sin^2 x)^2}$. Aplicando ahora el cambio de variable $\sin x = t$, la integral se transforma en $\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$ que puede terminarse por el procedimiento para integrales de funciones racionales (caso 1.2). El denominador se factoriza como $(1+t)^2 \cdot (1-t)^2$ o bien $(t+1)^2 \cdot (t-1)^2$, lo cual nos indica que posee dos raíces reales dobles. Y la descomposición en suma de “fracciones simples” será de la forma $\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$ (con 4 constantes a determinar usando las identidades correspondientes, como indica el grado del denominador). Una vez resuelta se pone $\sin x$ en lugar de t .

3) $\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1+2 \cdot \cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx =$
 $= \frac{1}{4} \cdot \int (1 + 2 \cdot \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \cdot (x + \sin 2x + \int \cos^2 2x \, dx) = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \cdot I$,
 donde $I = \int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) + K$.
 En conclusión, la integral dada será $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + K$.

3.2) Tipo trigonométrico, con la forma $\int \sin^n x \, dx$, siendo n entero distinto de cero. Los casos $n = 1$ y $n = -2$ están resueltos por ser inmediatas. Los demás se procesan según valores de n :

- a) Si n es impar (positivo o negativo), se aplica el cambio de variable $\boxed{\cos x = t}$.
- b) Si n es par positivo, se usa la identidad trigonométrica $\boxed{\sin^2 x \equiv \frac{1-\cos 2x}{2}}$.
- c) Si n es par negativo, se usa una “fórmula de reducción” (que convierte el caso n en el caso $n - 2$). La veremos en la pág. 18. (Esta fórmula también sirve para casos en que n es par positivo, pero suele ser más rápido usar la identidad trigonométrica).

Ejemplos: Muy parecidos a los anteriores (ahora, cuando hagamos el cambio $\cos x = t$, se tendrá $\sin x \, dx = -dt$).

3.3) Tipo trigonométrico, con la forma $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ (m y n enteros diferentes de cero).

Son casos particulares del tipo 2.6. Por tanto, podemos destacar las alternativas:

3.3.1) Si m es impar (positivo o negativo), aplicar el cambio de variable $\boxed{\cos x = t}$

3.3.2) Si n es impar (positivo o negativo), aplicar el cambio de variable $\boxed{\sin x = t}$

3.3.3) Si m y n son pares, aplicar el cambio de variable: $\boxed{\tan x = t}$. En este caso, si ambos exponentes son pares positivos, es mejor reducir el integrando solamente a potencias pares de $\sin x$, o bien solamente a potencias pares de $\cos x$, mediante la identidad fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$. También pueden usarse directamente las identidades $\sin^2 x \equiv \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x \equiv \frac{1+\cos 2x}{2}$, que reducen los exponentes y llevan todo a potencias del coseno solamente.

Ejemplos:

1) $\int \sin^{-3} x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cdot \sin x \, dx$ (caso m impar). Hacemos el cambio $\cos x = t$ y queda la integral $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \cdot (-dt) = - \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt$ que es una integral de función racional con grado del numerador menor que el grado del denominador (tipo 1.2). Requiere cuatro “fracciones simples”. Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable.

INTEGRALES INDEFINIDAS

2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx$ (caso n impar). Hacemos el cambio $\sin x = t$ y nos queda la integral $\int t^4 \cdot (1 - t^2) \, dt = \int (t^4 - t^6) \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + K = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + K$

3) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ (caso m y n pares positivos). Podemos poner todo en función del coseno:
 $\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx$
 que son dos integrales del tipo 3.1 con exponentes pares positivos.

También podemos aplicar las identidades de $\sin^2 x$ y de $\cos^2 x$ desde el principio y se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx &= \frac{1}{4} \cdot \int (1 - \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \cdot \int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + K \end{aligned}$$

Nota: Si hubiésemos usado el cambio $\tan x = t$, habríamos llegado a la integral de función racional $\int \frac{t^2}{(1+t^2)^3} \, dt$ (del tipo 1.2). Pero hay un inconveniente: Las raíces del polinomio del denominador son imaginarias conjugadas de multiplicidad 3, con lo cual necesitaríamos el Método de Hermite para resolverla. (Está resuelta en la pág. 20).

4.- Integrales trigonométricas con las formas siguientes:

$$\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx \quad ; \quad \int \sin ax \cdot \sin bx \, dx \quad ; \quad \int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$$

siendo $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq b$. Se resuelven usando las identidades trigonométricas que convierten productos en sumas o diferencias, con lo cual las integrales que resultan son inmediatas. Las identidades son:

$$\begin{aligned} \sin ax \cdot \cos bx &\equiv \frac{1}{2} \cdot [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x] \\ \sin ax \cdot \sin bx &\equiv \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \cos ax \cdot \cos bx &\equiv \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \sin 5x \cdot \sin 8x \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot [\cos(5-8)x - \cos(5+8)x] \, dx =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \int [\cos(-3x) - \cos 13x] \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int (\cos 3x - \cos 13x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 13x}{13} \right) + K$

5.- Algunas integrales de funciones irracionales que se resuelven por cambios de variables

5.1) **Tipo** $\int \frac{P(x, \sqrt[n]{ax+b})}{Q(x, \sqrt[n]{ax+b})} \, dx$, siendo $a \neq 0$. Se aplica el cambio de variable $\sqrt[n]{ax+b} = t$, con lo cual tenemos $x = \frac{t^n - b}{a}$ y resulta $dx = \frac{n}{a} \cdot t^{n-1} dt$. Sustituyendo todo, resulta una integral de función racional.

Ejemplo: $\int \frac{1+\sqrt{2x-3}}{x-\sqrt{2x-3}} \, dx$. Al hacer el cambio $\sqrt{2x-3} = t$ quedará $x = \frac{t^2+3}{2}$, con lo cual se tendrá $dx = t \, dt$ y la nueva integral será

$$\int \frac{1+t}{\frac{t^2+3}{2} - t} \cdot t \, dt = 2 \cdot \int \frac{t^2+t}{t^2-2t+3} \, dt \quad (\text{del tipo 1.1})$$

5.2) **Tipo** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, siendo $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \neq 0$. Completando el cuadrado de un binomio en el radicando, sacando luego una constante positiva de la raíz y haciendo finalmente un cambio

INTEGRALES INDEFINIDAS

de variable del tipo $\boxed{(px + q)/r = t}$ (p , q y r ciertas constantes), se llega a una de las integrales inmediatas siguientes:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad ; \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \quad ; \quad \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-1}}$. Ahora hacemos el cambio de variable $\boxed{(x-3)/2 = t}$, con lo cual $x = 2t + 3$ y entonces se tiene $\boxed{dx = 2 dt}$. Así la integral queda como $\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + K$ (ver pág. 1). Des haciendo el cambio de variable, el resultado final será entonces $\ln\left[\left(\frac{x-3}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1}\right] + K$.

Nota: Si el radicando hubiese sido $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$, el proceso sería completamente análogo y se habría llegado a la segunda integral inmediata (de las citadas anteriormente), que da otro logaritmo neperiano (ver pág. 1). Y si el radicando fuese $-x^2 + 6x - 5 = 4 - (x-3)^2$, de un modo análogo se habría llegado a la tercera integral inmediata, que da un arco seno.

5.3) Tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, siendo $m \neq 0$, $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \neq 0$. Completando en el numerador la derivada del radicando y descomponiendo en dos fracciones con el mismo denominador, se obtiene una integral inmediata que da $p \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (p constante) y otra del tipo anterior multiplicada también por una constante.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= -\frac{3}{2} \cdot \int \frac{-\frac{2}{3}(3x-1)}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\frac{3}{2} \cdot \int \frac{-2x+\frac{2}{3}}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \int \frac{-2x+4-4+\frac{2}{3}}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -3 \cdot \int \frac{(-2x+4)-\frac{10}{3}}{2 \cdot \sqrt{4x-x^2}} dx = -3 \cdot \int \left(\frac{-2x+4}{2 \cdot \sqrt{4x-x^2}} - \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{4x-x^2}} \right) dx = \\ &= -3 \cdot \sqrt{4x-x^2} + 5 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \text{ (siendo esta última del tipo 4.2) (en este caso } p = -3) \end{aligned}$$

5.4) Tipo $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$, siendo $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \neq 0$. Completando el cuadrado de un binomio en el radicando, sacando luego una constante positiva de la raíz y haciendo finalmente un cambio de variable del tipo $\boxed{(px + q)/r = t}$, se llega a una de las integrales no inmediatas siguientes:

$$\int \sqrt{1-t^2} dt \quad ; \quad \int \sqrt{1+t^2} dt \quad ; \quad \int \sqrt{t^2-1} dt$$

La primera se resuelve con el nuevo cambio de variable $\boxed{t = \operatorname{sen} u}$, porque $1 - \operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u$ y con ello eliminamos la raíz. La segunda, con el nuevo cambio $\boxed{t = \operatorname{tag} u}$, porque $1 + \operatorname{tag}^2 u = \sec^2 u$, consiguiendo el mismo efecto. Y la tercera, con el nuevo cambio $\boxed{t = \operatorname{sec} u}$, porque $\sec^2 u - 1 = \operatorname{tag}^2 u$. Y las nuevas integrales obtenidas son del tipo 3.1 (integrales de potencias del coseno) o del tipo 3.3 (integrales de potencias del seno por potencias del coseno).

Ejemplo: $\int \sqrt{4x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2} dx = 2 \cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2} dx$. Y ahora hacemos el cambio $\boxed{\frac{x-2}{2} = t}$, con lo cual $x = 2t + 2$ y entonces será $dx = 2 dt$, quedando así:

$$2 \cdot \int \sqrt{1-t^2} \cdot 2 dt = 4 \cdot \int \sqrt{1-t^2} dt$$

El nuevo cambio es $\boxed{t = \operatorname{sen} u}$, que nos da $dt = \cos u du$, obteniéndose:

$$4 \cdot \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \cdot \cos u du = 4 \cdot \int \cos^2 u du = 4 \cdot \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = 2 \cdot \left(u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2} \right) + K$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ahora tenemos que deshacer los dos cambios de variable, pero el resultado obtenido se puede escribir:

$2u + \operatorname{sen} 2u + K = 2u + 2 \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos u + K = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + 2 \cdot t \cdot \sqrt{1 - t^2} + K$
 con lo cual hemos deshecho el último cambio. Falta deshacer el primer cambio y el resultado queda finalmente como: $2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x-2}{2} \right) + (x-2) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2} \right)^2} + K$

NOTAS IMPORTANTES:

- 1) En la Nota 3 de la pág. 2 definimos las “funciones hiperbólicas” principales, que son “seno hiperbólico”, “coseno hiperbólico” y “tangente hiperbólica” (“hiperbólico” o “hiperbólica” en relación con la curva llamada “hipérbola”; no en relación con “hipérbole” o exageración). Las tres funciones tienen dominio $\mathbb{R}$, el seno hiperbólico tiene recorrido $\mathbb{R}$, el coseno hiperbólico tiene recorrido $[1, +\infty)$ y la tangente hiperbólica tiene recorrido $(-1, 1)$. Las funciones $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{th} x$ son impares y se anulan para $x = 0$ (gráficas simétricas respecto al origen, pasando por dicho punto y situadas en los cuadrantes 1º y 3º; quedando la gráfica de la tangente hiperbólica situada entre las asíntotas horizontales $y = -1$ e $y = 1$) y la función $\operatorname{ch} x$ es par, valiendo 1 para $x = 0$ (gráfica en los cuadrantes 1º y 2º, simétrica respecto al eje OY y cortando a dicho eje en $y = 1$; se parece a una parábola vertical cóncava hacia arriba, con su vértice en $(0, 1)$; se llama “catenaria”). Dijimos además en la pág. 2 que se cumplen las identidades

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}}, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

- 2) Se demuestra que la inversa de $y = \operatorname{sh} x$ (que se llama “argumento seno hiperbólico” y se representa por $\operatorname{arg} \operatorname{sh} x$) es la función $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, de dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $\mathbb{R}$. Como sabíamos que $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + K$ (pág. 1), también podemos escribir ahora $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arg} \operatorname{sh} x + K$, en todo $\mathbb{R}$.
- 3) Se demuestra que la inversa de $y = \operatorname{ch} x$, restringida a $[0, +\infty)$ para que sea inyectiva, es $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, de dominio $[1, +\infty)$ y recorrido $[0, +\infty)$. (Se llama “argumento coseno hiperbólico” y se representa por $\operatorname{arg} \operatorname{ch} x$). Como también vimos en la pág. 1 que $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + K$, y cundo x pertenezca al intervalo $(1, +\infty)$ sobra el valor absoluto, con lo cual podemos escribir también $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arg} \operatorname{ch} x + K$.
- 4) Si restringimos $y = -\operatorname{ch} x$ al intervalo $(-\infty, 0]$, para que sea también inyectiva, su inversa es $y = \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, de dominio $(-\infty, -1]$ y recorrido $(-\infty, 0]$. (Aquí $x + \sqrt{x^2 - 1}$ es negativa, pues x lo es y $\sqrt{x^2 - 1}$ tiene menor valor absoluto, con lo cual $|x + \sqrt{x^2 - 1}| = -x - \sqrt{x^2 - 1}$). Esta inversa no tiene nombre especial, luego cundo estemos trabajando en el intervalo $(-\infty, -1)$, lo correcto es escribir la integral solamente como $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + K$.

Pues bien, las funciones hiperbólicas se pueden aplicar en la resolución de las dos últimas integrales dadas en la página anterior: Para $\int \sqrt{1 + t^2} dt$ sirve el cambio de variable $t = \operatorname{sh} u$, porque $1 + \operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}^2 u$. Y para $\int \sqrt{t^2 - 1} dt$ sirve el cambio $t = \operatorname{ch} u$, porque $\operatorname{ch}^2 u - 1 = \operatorname{sh}^2 u$. Estos cambios son mejores que los cambios trigonométricos dados anteriormente (habíamos dado $t = \tan u$ para la segunda y $t = \sec u$ para la tercera).

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ejemplo: $\int \sqrt{t^2 - 1} dt$ se convierte por el cambio $\boxed{t = ch u}$ (con lo cual $dt = sh u du$) en la integral $\int sh^2 u du = \int \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 du = \frac{1}{4} \cdot \int (e^{2u} + e^{-2u} - 2) du = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2u}}{2} - \frac{e^{-2u}}{2} - 2u \right) + K$. Ahora queda deshacer el cambio, sustituyendo $u = arg ch t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ en la expresión anterior, de modo que e^{2u} quedaría como $(t + \sqrt{t^2 - 1})^2$ y e^{-2u} sería $(t + \sqrt{t^2 - 1})^{-2}$.

En cambio, si resolvemos esta misma integral usando el cambio de variable $\boxed{t = sec u}$ el proceso sería:

$$\int \sqrt{t^2 - 1} dt = \int tag u \cdot \frac{sen u}{cos^2 u} du = \int \frac{sen^2 u}{cos^3 u} du$$

con lo cual hemos llegado a una integral del tipo 2.6.2 con integrando impar en $cos u$ o del tipo 3.3.2 con exponente impar del coseno, luego hemos de aplicar un segundo cambio de variable:

$\boxed{sen u = v}$ (ver páginas 10 y 12), lo cual conduce a la integral de función racional $\int \frac{v^2}{(1-v^2)^2} dv$, que sabemos resolver pero que tiene cierto trabajo (denominador con raíces reales dobles 1 y -1, lo cual implica la descomposición del integrando en 4 fracciones simples: $\frac{A}{v-1} + \frac{B}{(v-1)^2} + \frac{C}{v+1} + \frac{D}{(v+1)^2}$). Y finalmente habría que deshacer los dos cambios de variable que hemos usado. Es evidente que este método es mucho más largo que el obtenido con el cambio $t = ch u$.

Nota: El lector puede comprobar que la integral $\int \sqrt{1 + t^2} dt$ también se resuelve más fácilmente con el cambio $\boxed{t = sh u}$ que con el cambio trigonométrico $\boxed{t = tag u}$ (la situación es parecida a la anterior).

6.- Integrales que se resuelven aplicando el método de integración por partes

Muchas integrales no consideradas en los casos anteriores se resuelven aplicando el método de integración por partes (una o varias veces). Entre ellas destacan las siguientes:

$$\int \ln x dx ; \int arc sen x dx ; \int arc cos x dx ; \int arc tag x dx ; \int x^n \cdot a^{bx} dx ;$$

$$\int x^n \cdot sen ax dx ; \int x^n \cdot cos ax dx ; \int e^{ax} \cdot sen bx dx ; \int e^{ax} \cdot cos bx dx$$

En los cuatro primeros casos, para aplicar la conocida fórmula $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ se toma la función integrando como u y dx como dv . Y en los tres casos siguientes, donde aparece una potencia de x (de exponente entero positivo), conviene tomar $u = x^n$ y el resto del integrando (incluido dx) como dv , con lo cual pasamos a una integral análoga pero que incluye la nueva potencia x^{n-1} . Entonces, repitiendo la aplicación de la integración por partes en estos casos, se va reduciendo el exponente de esa potencia hasta hacerla desaparecer. Finalmente, los dos últimos casos se resuelven conjuntamente como veremos a continuación en el Ejemplo 1.

Además, usando el método de integración por partes se obtienen unas “fórmulas de reducción” que sirven para resolver las integrales de potencias enteras del coseno y de potencias enteras del seno (en particular, las que tienen exponentes pares negativos, que dejamos pendientes de resolver en los apartados 3.1 c) y 3.2 c). Ver Ejemplo 2 a continuación.

Ejemplo 1: Vamos a calcular la última integral de la pequeña lista dada anteriormente. Se suponen $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Llamaremos $\boxed{e^{ax} = u}$ y $\boxed{cos bx dx = dv}$, con lo cual tenemos $\boxed{du = a \cdot e^{ax} dx}$ y $\boxed{v = \frac{sen bx}{b}}$. Entonces, aplicando la fórmula de integración por partes se tendrá:

$$\int e^{ax} \cdot cos bx dx = e^{ax} \cdot \frac{sen bx}{b} - \int \frac{sen bx}{b} \cdot a \cdot e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \frac{sen bx}{b} - \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax} \cdot sen bx dx$$

Si llamamos I a la integral inicial y llamamos J a la última obtenida (penúltima de la lista dada inicialmente), tenemos:

INTEGRALES INDEFINIDAS

$$(1) \quad \boxed{I = e^{ax} \cdot \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \cdot J}$$

Ahora le aplicamos el método de integración por partes a la integral J para lo cual llamamos otra vez $\boxed{e^{ax} = u}$ y llamamos ahora $\boxed{\sin bx \, dx = dv}$, con lo cual se tiene $\boxed{du = a \cdot e^{ax} dx}$ y se tiene también $\boxed{v = -\frac{\cos b}{b}}$. Entonces, al aplicar de nuevo la fórmula $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$, resulta:

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = -e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \int \frac{\cos bx}{b} \cdot a \cdot e^{ax} \, dx = -e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx$$

Es decir, también se cumple

$$(2) \quad \boxed{J = -e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \cdot I}$$

que sustituida en (1) nos da:

$$I = e^{ax} \cdot \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \cdot \left(-e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \cdot I \right) = e^{ax} \cdot \frac{b \cdot \sin bx}{b^2} + e^{ax} \cdot \frac{a \cdot \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \cdot I$$

de donde podemos despejar I , obteniendo:
$$\boxed{\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx}{a^2 + b^2}}$$

Y si sustituimos la expresión (1) de I en la expresión (2) de J , podremos despejar J llegando a:

$$\boxed{\int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2}}$$

Ejemplo 2: Vamos a demostrar la “fórmula de reducción” que permite calcular las integrales de potencias enteras de la función $\cos x$ (tipo 3.1), disminuyendo el valor del exponente dos unidades cada vez que se aplica, hasta llegar a una integral inmediata o de solución fácil. Llamemos I_n a la integral $\int \cos^n x \, dx$, con n entero. Por ser inmediatas, sabemos que $I_0 = x + K$, $I_1 = \sin x + K$ e $I_{-2} = \tan x + K$. Y la integral $I_{-1} = \int \frac{dx}{\cos x}$ se resuelve fácilmente haciendo el cambio de variable $\sin x = t$. Y como la fórmula de reducción disminuye el exponente del coseno en dos unidades, llegaremos a I_1 si la dada tiene exponente impar positivo, llegaremos a I_0 si la dada tiene exponente par positivo, llegaremos a I_{-1} si la dada tiene exponente impar negativo usando la fórmula “al revés” (o sea pasando de I_{n-2} a I_n , por simple despeje; ver la fórmula a continuación) y llegaremos a I_{-2} si la dada tiene exponente par negativo (también usando la fórmula “al revés”; ver en la página siguiente el cálculo I_{-4} e I_{-6}).

Pues bien, la “fórmula de reducción” aludida, que demostraremos más abajo, es:

$$\boxed{n \cdot I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot I_{n-2}}$$

Obsérvese que para $n = 1$ la fórmula nos dice $I_1 = \sin x$ (lo cual es cierto, salvo la constante de integración).

Para $n = 2$ la fórmula de reducción nos dice $2 \cdot I_2 = \cos x \cdot \sin x + I_0$, donde I_0 es x , con lo cual nos está diciendo que $I_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos x \cdot \sin x + x)$ (la constante de integración se agrega al final). Y esto también es cierto, pues resuelta de otra manera, tenemos

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + K$$

y como $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, coinciden los resultados.

Demostración de la “fórmula de reducción”: Partimos de la forma $I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$ y llamamos $\boxed{u = \cos^{n-1} x}$; $\boxed{dv = \cos x \, dx}$, con lo cual $\boxed{du = (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \, dx}$ y $\boxed{v = \sin x}$. Entonces, al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene:

INTEGRALES INDEFINIDAS

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Pero como $\operatorname{sen}^2 x \equiv 1 - \cos^2 x$, la última integral es igual a $(n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n)$.

Por tanto, tenemos $I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n$, de donde resulta:

$$\boxed{n \cdot I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) \cdot I_{n-2}} \quad (\text{válida para todo } n)$$

¿Cómo se aplica esta fórmula para calcular I_{-4} , I_{-6} , etc...? Este tipo de integrales son las que quedaron sin resolver en el apartado c) del tipo 3.1 (pág. 11).

Para calcular I_{-4} conviene dar a n (en la fórmula) el valor -2 , quedando así: $-2 \cdot I_{-2} = \cos^{-3} x \cdot \operatorname{sen} x - 3 \cdot I_{-4}$

de donde resulta $\boxed{I_{-4} = \frac{\cos^{-3} x \cdot \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3} \cdot I_{-2} = \frac{\operatorname{sen} x}{3 \cdot \cos^3 x} + \frac{2}{3} \cdot I_{-2}}$, siendo $I_{-2} = \operatorname{tag} x$ (y al final agregamos la constante de integración).

Así, para calcular I_{-6} damos a n el valor -4 , quedando así $-4 \cdot I_{-4} = \cos^{-5} x \cdot \operatorname{sen} x - 5 \cdot I_{-6}$ de donde se despeja I_{-6} en función de I_{-4} , ya calculada: $\boxed{I_{-6} = \frac{\cos^{-5} x \cdot \operatorname{sen} x}{5} + \frac{4}{5} \cdot I_{-4}}$

Y así sucesivamente...

De un modo análogo se demuestra la “fórmula de reducción” que corresponde a integrales de la forma $J_n = \int \operatorname{sen}^n x \, dx$, la cual es:

$$\boxed{n \cdot J_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot J_{n-2}}$$

que sirve para el cálculo de J_{-4} , J_{-6} , etc... en función de la inmediata $J_{-2} = -\operatorname{cotag} x$ (casos pendientes de solución en el apartado c) del tipo 3.2 de la pág. 12).

Nota 1: Las dos “fórmulas de reducción” también sirven para calcular las otras integrales de potencias enteras del coseno y de potencias enteras del seno, para las cuales habíamos dado ya otros métodos en 3.1 y 3.2 (casos de exponentes impares o pares positivos).

Nota 2: En el caso de aplicar la última fórmula a las potencias de exponentes impares negativos del seno, se llegará finalmente a $J_{-1} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$, que no es inmediata pero se resuelve fácilmente mediante el cambio universal $\operatorname{tag}(x/2) = t$. (La calculamos en la Nota 1 de la pág. 11).

Otros tipos de integrales

Hay muchos otros tipos de integrales indefinidas que pueden “resolverse elementalmente”, lo cual quiere decir que sus resultados son “funciones elementales”, obtenidas aplicando los métodos generales de integración (muchas veces combinados). (Recuérdese que “funciones elementales” son todas las definidas explícitamente operando con las “funciones básicas”).

Ejemplo: $\int e^{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx$ se transforma en $\int e^t \cdot t^2 \, dt$ mediante el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, y esta última se resuelve aplicando dos veces la fórmula de integración por partes (llamar $t^2 = u$ en la primera aplicación y llamar $t = u$ en la segunda aplicación). Finalmente, al deshacer el cambio de variable, queda $(\operatorname{sen}^2 x - 2 \cdot \operatorname{sen} x + 2) \cdot e^{\operatorname{sen} x} + K$.

Pero también hay muchas otras integrales indefinidas que no pueden resolverse elementalmente (o sea, que no existe ninguna “función elemental” que sea solución de esas integrales).

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ejemplos: $\int e^{x^2} dx$, $\int \operatorname{sen}(x^3 + 5) dx$ y $\int \frac{\cos x}{x^2} dx$.

El Método de Hermite

Como apartado final, por si alguien lo necesita, daremos un resumen del método que permite simplificar una integral de función racional cuyo denominador posea alguna raíz múltiple (doble, triple, etc...), reduciéndola al cálculo una integral análoga pero cuyo denominador sólo incluya raíces simples. Lo cual sirve en particular para resolver las integrales de estos tipos con raíces imaginarias múltiples en los denominadores (caso no estudiado; ver Nota 1 de la pág. 8).

Supongamos la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, con grado de $P(x)$ menor que grado de $Q(x)$ (tipo 1.2). Y supongamos que la descomposición del polinomio $Q(x)$ posea varios factores de primer grado y/o varios factores de segundo grado con discriminantes negativos (los cuales incluirán raíces imaginarias conjugadas), apareciendo alguno de esos factores con exponente mayor que 1.

Por ejemplo, podría ser $Q(x) = 3 \cdot (x - 2)^3 \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 8)^2 \cdot (x^2 - x + 2)$, lo cual nos dice que este polinomio posee la raíz real 2 (triple), la raíz real -3 (doble), la raíz real 5 (simple), las dos raíces imaginarias de $x^2 + 8$ (dobles) y las dos raíces imaginarias de $x^2 - x + 2$ (simples). (Bastaría que solamente uno de los factores tuviese exponente mayor que 1 para que estuviésemos en el caso que nos interesa).

El Método de Hermite (matemático francés del siglo XIX) establece que la integral dada se puede descomponer en suma de una cierta función racional (que no hay que integrar y forma parte del resultado final) más otra integral similar cuyo integrando posee un denominador con los mismos factores que el dado, pero todos tendrán exponentes iguales a 1 en su factorización; o sea que las raíces que eran múltiples aparecerán como raíces simples en este nuevo denominador. Así será:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \equiv \frac{A(x)}{B(x)} + \int \frac{C(x)}{D(x)} dx \quad (\text{identidad de Hermite})$$

donde $D(x)$ posee los mismos factores de primer grado y de segundo grado que $Q(x)$, pero todas sus raíces serán simples, para lo cual esos factores deben ir con exponente 1 en la factorización de $D(x)$; donde $B(x)$ es el cociente de $Q(x)$ entre $D(x)$; donde $A(x)$ es un polinomio desconocido de grado menor que el que tenga $B(x)$, y donde $C(x)$ es otro polinomio desconocido de grado menor que el que tenga $D(x)$.

Es decir, para el caso del $Q(x)$ puesto como ejemplo anteriormente, sería

$$D(x) = (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 8) \cdot (x^2 - x + 2)$$

y sería

$$B(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 8)$$

Además, tendríamos $A(x)$ de grado 4 como máximo porque $B(x)$ es de grado 5, y tendríamos $C(x)$ de grado 6 como máximo porque $D(x)$ es de grado 7 (estos polinomios $A(x)$ y $C(x)$ se escribirán con coeficientes indeterminados en la identidad).

Y lo que hace práctico al Método de Hermite es que pueden calcularse todos los coeficientes indeterminados que hayamos necesitado. Para ello se deriva miembro a miembro la identidad de Hermite que habíamos establecido, obteniéndose la nueva identidad de expresiones racionales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{d}{dx} \left[\frac{A(x)}{B(x)} \right] + \frac{C(x)}{D(x)}$$

que al operar, simplificar y quitar denominadores conduce a una identidad de polinomios, de la cual pueden extraerse tantas ecuaciones lineales como constantes indeterminadas haya, las cuales serán las incógnitas de ese sistema (habrá tantas constantes en total como indique el grado del denominador $Q(x)$). Entonces, resolviendo el correspondiente sistema lineal de tantas ecuaciones

INTEGRALES INDEFINIDAS

como incógnitas, que siempre será compatible con solución única, se obtienen los valores de dichas constantes. Y para terminar, ya sólo quedaría resolver la segunda integral por el procedimiento de descomposición en “fracciones simples” explicado en el caso 1.2 de este tema.

Ejemplo 1: Calcular $\int \frac{3x-1}{(x^2+1)^2} dx$.

Obsérvese que en el denominador hay dos raíces imaginarias dobles (i y $-i$).

La identidad de Hermite es en este caso: $\int \frac{3x-1}{(x^2+1)^2} dx \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1} dx$

donde habrá que calcular las constantes A, B, C y D (obsérvese que el grado del denominador dado es 4 y son 4 constantes) y finalmente se resolverá la integral del segundo miembro, que es del tipo 1.2.2.3.

Para calcular las constantes derivamos ambos miembros y operamos, obteniendo una nueva identidad de expresiones racionales:

$$\frac{3x-1}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{A(x^2+1)-2x(Ax+B)}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \equiv \frac{A(x^2+1)-2x(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

la cual, al quitar denominadores, se convierte en la siguiente identidad de polinomios:

$$3x - 1 \equiv A(x^2 + 1) - 2x(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

que, operando y ordenando, queda como:

$$3x - 1 \equiv Cx^3 + (D - A)x^2 + (C - 2B)x + (A + D)$$

lo cual nos conduce al siguiente sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$C = 0 ; D - A = 0 ; C - 2B = 3 ; A + D = -1 .$$

Resuelto este sistema lineal, obtenemos $A = -1/2, B = -3/2, C = 0$ y $D = -1/2$.

Por tanto, será

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+1)^2} dx \equiv \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2+1} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1} dx = -\frac{x+3}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \cdot \arctan x + K$$

Ejemplo 2: Calcular la integral que quedó sin resolver en la Nota de la pág. 13: $\int \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt$

La identidad de Hermite en este caso es: $\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt \equiv \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2+1)^2} + \int \frac{Et+F}{t^2+1} dt$

(6 constantes a determinar, como el grado del denominador dado).

Derivando ambos miembros, simplificando la derivada del cociente y quitando denominadores de la identidad de expresiones racionales que se obtiene, podemos comprobar que se llega a la identidad de polinomios:

$$t^2 \equiv Et^5 + (-A + F)t^4 + (-2B + 2E)t^3 + (3A - 3C + 2F)t^2 + (2B - 4D + E)t + (C + F)$$

La cual conduce al sistema de 6 ecuaciones lineales con 6 incógnitas siguiente:

$$E = 0 ; -A + F = 0 ; -2B + 2E = 0 ; 3A - 3C + 2F = 1 ; 2B - 4D + E = 0 ; C + F = 0$$

cuya resolución nos da los valores: $A = 1/8 ; B = 0 ; C = -1/8 ; D = 0 ; E = 0 ; F = 1/8$

Por tanto, será:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt \equiv \frac{\frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{8}t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{\frac{1}{8}}{t^2+1} dt = \frac{t^3-t}{8 \cdot (t^2+1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \arctan t + K$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ejemplo 3: Resolvamos finalmente un caso en que la segunda integral requiera a su vez un cálculo de nuevas constantes (es lo más frecuente), para ver cómo podemos ahorrar algo de trabajo.

La integral $\int \frac{2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)^3} dx$ tiene un integrando con denominador ya factorizado, que corresponde a tres raíces reales ($x = 1$ de multiplicidad 2, $x = -2$ de multiplicidad 1 y $x = 3$ de multiplicidad 3). Su numerador es de grado inferior al que tiene el denominador (luego es del tipo **1.2**), con lo cual podríamos resolverla directamente por descomposición en 6 fracciones simples (como otras que vimos) o bien podemos resolverla por el Método de Hermite. En ambos casos tenemos que calcular 6 constantes (grado del denominador). El Método de Hermite nos pediría inicialmente 6 constantes, pero luego necesitaríamos 3 constantes más para resolver la integral del segundo miembro de la identidad. En efecto, ese segundo miembro será

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1) \cdot (x-3)^2} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)} dx$$

Pero si escribimos esta segunda integral con su integrando descompuesto en 3 fracciones simples antes de derivar ambos miembros, las constantes que calcularíamos serían A, B, C y las tres constantes nuevas que intervienen en la descomposición en fracciones simples del último integrando (las podríamos llamar M, N y P). De este modo el resultado final de la integral será:

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1) \cdot (x-3)^2} + M \cdot \ln|x-1| + N \cdot \ln|x+2| + P \cdot \ln|x-3| + K$$

El trabajo mayor es el cálculo de estas 6 constantes, que se hace como sabemos derivando ambos miembros de la identidad de Hermite, con lo cual se obtiene una identidad de expresiones racionales, que al quitar denominadores conduce a una identidad de polinomios. Para abreviar, podríamos dar a x seis valores diferentes en la identidad de polinomios (conviene usar los de las raíces 1, -2 y 3 y tres valores más, muy sencillos, diferentes de los anteriores y diferentes entre sí) y entonces no hemos tenido que efectuar las muchas operaciones que conducen a la ordenación del polinomio del segundo miembro, lo cual suele ser muy laborioso.

Aplicando lo dicho a nuestro ejemplo, tenemos la identidad de Hermite en la forma:

$$\int \frac{2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)^3} dx \equiv \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1) \cdot (x-3)^2} + \int \left(\frac{M}{x-1} + \frac{N}{x+2} + \frac{P}{x-3} \right) dx$$

(con el integrando de la segunda integral descompuesto ya en fracciones simples). Ahora derivamos ambos miembros, quedando la identidad de expresiones racionales:

$$(1) \quad \frac{2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)^3} \equiv \frac{(2Ax+B) \cdot (x-1) \cdot (x-3)^2 - (Ax^2+Bx+C) \cdot [(x-3)^2 + 2(x-1) \cdot (x-3)]}{(x-1)^2 \cdot (x-3)^4} + \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x+2} + \frac{P}{x-3}$$

Podemos simplificar el factor $(x-3)$ en la fracción grande del segundo miembro y luego efectuar la suma de las 4 fracciones, obteniendo como denominador final de esa suma el mismo del primer miembro. Y si operásemos en el numerador de esa suma del segundo miembro, reduciendo términos semejantes y ordenándolo en potencias decrecientes de x , para finalmente quitar denominadores de ambos miembros, podemos comprobar que se llegará a la identidad de polinomios escrita así:

$$\begin{aligned} 2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191 &\equiv (M+N+P)x^5 + \\ &+ (-A-8M-11N-6P)x^4 + (-5A-2B+16M+46N+6P)x^3 + \\ &+ (-3B-3C+18M-90N+20P)x^2 + \\ &+ (12A+5B-C-81M+81N-39P)x + (6B+10C+54M-27N+18P) \end{aligned}$$

E igualando coeficientes de las mismas potencias de x de ambos miembros se llega al sistema de 6 ecuaciones lineales que permite obtener los valores de las 6 constantes. La solución que se obtiene es: $A = 0, B = 3, C = 2, M = 2, N = -1$ y $P = 1$.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Luego el valor final de la integral dada será:

$$\int \frac{2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3)^3} dx = \frac{3x+2}{(x-1) \cdot (x-3)^2} + \ln(x-1)^2 - \ln|x+2| + \ln|x-3| + K$$

Pero, si en la identidad racional obtenida inicialmente (ver **(1)** en la página anterior), después de simplificar el factor $(x-3)$, quitamos denominadores directamente sin efectuar otras operaciones, podemos comprobar que se llega a la identidad de polinomios siguiente:

$$2x^5 - 11x^4 - 14x^3 + 131x^2 - 269x + 191 \equiv (2Ax + B)(x-1)(x-3)(x+2) - (Ax^2 + Bx + C)[(x-3) + 2(x-1)](x+2) + M(x-1)(x+2)(x-3)^3 + N(x-1)^2(x-3)^3 + P(x-1)^2(x+2)(x-3)^2$$

Y al darle los valores 1, -2 y 3 de las tres raíces, así como los valores sencillos y diferentes 0, -1 y 2, se obtienen las siguientes 6 ecuaciones con las incógnitas A, B, C, M, N y P:

$$30 = 6A + 6B + 6C \quad ; \quad 1125 = -1125N \quad ; \quad -220 = -180A - 60B - 20C \quad ;$$

$$191 = 6B + 10C + 54M - 27N + 18P \quad ; \quad 592 = -8A + 8C + 128M - 256N + 64P \quad ;$$

$$-47 = -32A - 12B - 4C - 4M - N + 4P$$

que nos da los mismos valores de las 6 constantes obtenidos antes, con menos operaciones.

Comentarios finales importantes

Habíamos indicado anteriormente (en la pág. 13) que la integral $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ se podía reducir a la diferencia $I_2 - I_4$ (donde $I_n = \int \cos^n x \, dx$). Y siguiendo esa posibilidad hasta el final (es decir, aplicando la “fórmula de reducción” para potencias del coseno dada en la pág. 17, que nos permite obtener I_4 en función de I_2 y luego resolver esta última), llegaremos a la solución

$$-\frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{4} + \frac{\cos x \cdot \sin x}{8} + \frac{x}{8} + K$$

Pero en la pág. 13 también resolvimos la misma integral usando las identidades $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, llegando a la solución $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + K$.

Y ahora, habiendo resuelto por el Método de Hermite la integral en la variable t del ejemplo 2 de la pág. 20, la cual se había obtenido de $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ mediante el cambio de variable $\tan x = t$, al deshacer ese cambio de variable llegamos a la conclusión de que la integral trigonométrica mencionada tiene también la solución

$$\frac{\tan^3 x - \tan x}{8(1+\tan^2 x)^2} + \frac{x}{8} + K$$

Observamos una notable diferencia entre los tres resultados, pero veremos a continuación que se trata de expresiones equivalentes de la misma función primitiva, con la salvedad de que la última solución no serviría para valores de x que sean múltiplos impares de $\pi/2$ (porque en ellos no existe la función tangente). Pero si sustituimos $1 + \tan^2 x$ por $\sec^2 x$ en el denominador de la primera fracción y multiplicamos numerador y denominador de dicha fracción por $\cos^4 x$, obtenemos esta última solución como

$$\frac{\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x}{8} + \frac{x}{8} + K, \text{ válida en todo } \mathbb{R}$$

INTEGRALES INDEFINIDAS

Las expresiones segunda y última de la integral considerada son equivalentes: Pues se tiene

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x\end{aligned}$$

$$\text{y por tanto, } \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} = \frac{x}{8} - \frac{4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x}{32} = \frac{x}{8} + \frac{\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x}{8}$$

Pero también las expresiones última y primera que hemos dado también son equivalentes, pues

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x}{8} &= \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x}{8} = \frac{\sin x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x}{8} = \\ &= \frac{\sin x \cdot \cos x}{8} - \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{4}\end{aligned}$$

Pero hay muchos casos en que no puede demostrarse que expresiones diferentes obtenidas para una misma integral sean equivalentes, como lo hicimos antes. Porque quizás no sean equivalentes, o si lo son, sea muy difícil pasar de una a otra.

Entonces ¿cómo decidir si dos resultados diferentes de una misma integral son correctos? La respuesta es hallando las derivadas de ambos resultados, las cuales deben coincidir con el integrando. Lo que pasa es que las operaciones necesarias para comprobarlo pueden ser largas, ya que las derivadas pueden tener formas alejadas del integrando y puede costar hacer la transformación correspondiente.

Debemos también saber, que hay algunos casos en que las distintas primitivas obtenidas difieren en una constante que no es visible pero que puede calcularse con cierta facilidad.

Ejemplo: Ya vimos en la Nota 2 de la pág. 11 dos resultados diferentes obtenidos para la integral $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ (usando distintos cambios de variable), pero se podía ver que la constante en que difieren aquellos resultados era $1/2$ o $-1/2$ (según el orden en que se resten). En efecto, las dos primitivas encontradas eran $-\frac{\cos^2 x}{2}$ y $\frac{\sin^2 x}{2}$, con lo cual la segunda menos la primera es $\frac{1}{2}$.

Otro ejemplo: Lo mismo ocurre con la integral inmediata $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ cuyo resultado puede darse como $\arcsin x + K$, pero también puede darse como $-\arccos x + K$. Y ocurre que la primera primitiva menos la segunda es al constante $\pi/2$ (pues para todo x del intervalo $[-1, 1]$ se tiene la siguiente identidad: $\arcsin x + \arccos x \equiv \pi/2$). En efecto, se ve fácilmente que la gráfica de $y = -\arccos x$ es idéntica a la de la función $y = \arcsin x - \pi/2$.

Ahora bien, hay siempre un procedimiento sencillo para saber si dos resultados diferentes de una misma integral son correctos: Pueden evaluarse las dos primitivas correspondientes para distintos valores de la variable independiente (usando una calculadora) y si los valores obtenidos coinciden o difieren siempre en una misma constante, podremos pensar que ambos resultados son correctos (sin seguridad absoluta en la mayoría de los casos, porque siempre quedarán por restar infinitos otros pares de valores que corresponden a nuevos valores de la variable independiente). Una excepción son las primitivas que sean polinomios, pues si son de grado n , basta restar $n + 1$ pares de valores de ambos, correspondientes a $n + 1$ valores diferentes de la variable independiente, para que sea seguro que los polinomios sean coincidentes o difieran en una constante cuando todas esas diferencias sean iguales entre sí (si las diferencias dan cero, las primitivas serán la misma en dos versiones diferentes, y si dan otro valor, serán primitivas distintas).

En caso contrario, o sea, cuando no coincidan las diferencias de imágenes correspondientes a dos valores distintos de la variable independiente, uno de los resultados de la integral será incorrecto o serán ambos incorrectos.