PRINCIPALES APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisito: Integrales definidas)

Introducción

En todo lo que sigue, las funciones que aparezcan en las diferentes integrales, se suponen continuas en los correspondientes intervalos de integración: Eso garantiza la existencia de dichas integrales. También, cuando digamos que una función es mayor o igual que otra en un intervalo, supondremos que esa relación la cumplen sus respectivos valores para todos los puntos de dicho intervalo.

Aplicaciones geométricas importantes:

1) Área de una región plana limitada por las gráficas de las funciones $\boldsymbol{y=f(x)}$ e $\boldsymbol{y=g(x)}$, así como por las rectas verticales $\boldsymbol{x=a}$ y $\boldsymbol{x=b}$ (se supone $\boldsymbol{a<b}$):

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \quad \text{(unidades de área)}$$

Información: El integrando será $f(x)-g(x)$ donde sea $f(x)-g(x)\geq 0$ y el integrando será $g(x)-f(x)$ donde sea $f(x)-g(x)\leq 0$. Por tanto, si las gráficas de las dos funciones se cortan en puntos intermedios del intervalo $[a\,,b]$, cambiando el signo de la diferencia $f(x)-g(x)$ en algún caso, se calcula la integral anterior descomponiendo el intervalo de integración en dos o más subintervalos consecutivos usando las abscisas de los puntos de corte, de modo que tomemos como integrando en cada uno de los subintervalos la diferencia que sea positiva o cero ($f(x)-g(x)$ o bien $g(x)-f(x)$). Los valores obtenidos se sumarán.

Caso particular más conocido: Área de la región limitada por la gráfica de la función $y=f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$: Basta tomar en la fórmula dada anteriormente la función $g(x)$ como la función cero, obteniéndose $A=\int_a^b|f(x)-0|\,dx=\int_a^b|f(x)|\,dx$ (unidades de área).

Ejemplo 1: Hallar el área limitada por las gráficas de $y=e^x$ e $y=e^{-x}$, entre las rectas verticales $x=-2$ y $x=2$.

$$A=\int_{-2}^2|e^x-e^{-x}|\,dx=\int_{-2}^0(e^{-x}-e^x)\,dx+\int_0^2(e^x-e^{-x})\,dx$$

pues en el intervalo $[-2\,,0]$ es $e^{-x}\geq e^x$ y en el intervalo $[0\,,2]$ es $e^x\geq e^{-x}$, como puede comprobarse fácilmente. El punto de corte de las dos gráficas corresponde a $x=0$.
Por tanto, $A=[-e^{-x}-e^x]_{-2}^0+[e^x+e^{-x}]_0^2=(-2+e^2+e^{-2})+(e^2+e^{-2}-2)$, es decir $A=2e^2+2e^{-2}-4=11'048\ldots$ (unidades de área).

Ejemplo 2: Hallar el área limitada por la gráfica de $y=x^3$, el eje OX y las rectas verticales $x=-1$ y $x=2$.

$$A=\int_{-1}^2|x^3|\,dx=\int_{-1}^0(-x^3)\,dx+\int_0^2 x^3\,dx$$

pues en el intervalo $[-1\,,0]$ es $x^3\leq 0$ y en el intervalo $[0\,,2]$ es $x^3\geq 0$.
Por tanto, $A=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}=4'25$ (unidades de área)

Nota: En muchas ocasiones tenemos funciones $x=f(y)$ y $x=g(y)$, cuyas gráficas limitan a derecha e izquierda una región del plano, la cual queda situada también entre las rectas horizontales $y=a$ (que la limita inferiormente) e $y=b$ (que la limita superiormente), pues se supone

$a < b$. Entonces, para obtener su área aplicamos una fórmula totalmente análoga a la dada anteriormente, donde la integral se calcula en la variable y.
Y el caso particular importante ahora es calcular el área de la región limitada por la gráfica de $x = f(y)$, el eje OY (de ecuación $x = 0$) y las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$, que viene dada también por la fórmula análoga $A = \int_a^b |f(y) - 0|\, dy = \int_a^b |f(y|\, dy$ (unidades de área).

---

2) Volumen del cuerpo de revolución obtenido girando 360º alrededor del eje OX una región plana como la del apartado anterior (se supone $a < b$ y que sea $0 \le g(x) \le f(x)$, o bien sea $f(x) \le g(x) \le 0$, en el intervalo $[a\,,b]$; se cumple así $|f(x)| \ge |g(x)|$ en $[a\,,b]$):

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx \qquad \text{(unidades de volumen)}$$

Información: La fórmula anterior se conoce como "fórmula del disco". El primer cuadrado siempre debe corresponder a la función cuya gráfica esté más lejos del eje OX (en las hipótesis dadas es la función $y = f(x)$, por tener mayor valor absoluto). Además, ambas gráficas tienen que estar al mismo lado de dicho eje, pudiendo llegar a tocarlo (por eso se pide $0 \le g(x) \le f(x)$, con lo cual las dos gráficas estarán por encima del eje OX, estando la de $y = f(x)$ más alejada de OX, o bien se pide $f(x) \le g(x) \le 0$, con las dos gráficas por debajo del eje OX, estando nuevamente la de $y = f(x)$ más alejada de OX). Cuando las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se corten en puntos intermedios del intervalo $[a\,,b]$, intercambiando sus posiciones pero manteniéndose ambas del mismo lado del eje OX, habrá que descomponer dicho intervalo en dos o más subintervalos consecutivos y aplicar la anterior "fórmula del disco" correctamente en cada uno de estos, de modo que la diferencia de cuadrados sea siempre positiva o cero. Los valores obtenidos se sumarán.

Ejemplo: Hallar el volumen obtenido al girar 360º alrededor del eje OX la región descrita en el ejemplo 1 del apartado anterior. Se puede aplicar la fórmula del disco, pues las gráficas de las dos funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ quedan a un mismo lado del eje OX (en este caso ambas están por encima del eje). Entonces:

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_{-2}^{0} [(e^{-x})^2 - (e^x)^2]\, dx + \pi \cdot \int_0^2 [(e^x)^2 - (e^{-x})^2]\, dx$$

pues en el intervalo $[-2\,,0]$ la gráfica más alejada de OX es la de $y = e^{-x}$ y en el intervalo $[0\,,2]$ la gráfica más alejada es la de $y = e^x$. Por tanto,

$$V_{OX} = \pi \cdot \left[\frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{-2}^{0} + \pi \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2 = \pi \cdot (e^4 + e^{-4} - 2) = 165'299\ldots$$

unidades de volumen.

Nota 1: Si las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no quedan al mismo lado del eje OX, puede suceder que la región plana que giremos alrededor de dicho eje sea simétrica respecto al mismo (es el caso en que $g(x) = -f(x)$) o bien puede que no ocurra esto. En el primer caso, bastaría girar alrededor de OX la mitad superior o la mitad inferior de la región (tomando como $y = g(x)$ la función $y = 0$), obteniéndose así el cuerpo de revolución completo y por consiguiente su volumen. En el segundo caso la situación puede ser más complicada y no entramos en detalles.
Por ejemplo, para hallar el volumen obtenido girando la región plana limitada por las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ y las rectas verticales $x = -a$ y $x = a$ (con a positivo), que es el círculo de centro el origen y radio a, simétrico respecto al eje OX, se hallará el volumen obtenido girando la mitad superior, limitada por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = 0$ entre las mismas rectas verticales, que es:

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left[\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - 0^2\right] dx = \pi \cdot \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{4\pi a^3}{3} \text{ (unidades de volumen)}$$

que es el volumen de una esfera de radio a (el giro del semicírculo superior nos dará la esfera completa de igual centro e igual radio).

Nota 2: La situación análoga para funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, siendo $0 \leq g(y) \leq f(y)$ o bien $f(y) \leq g(y) \leq 0$, cuyas gráficas definen a derecha e izquierda una región del plano, limitada también por las rectas horizontales $y = a$ (inferiormente) e $y = b$ (superiormente), es calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar esa región 360º alrededor del eje OY. Y la "fórmula del disco" es ahora

$$V_{OY} = \pi \cdot \int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}\, dy \quad \text{(unidades de volumen)}$$

---

3) Volumen del cuerpo de revolución obtenido girando 360º alrededor del eje OY una región plana como la del apartado 1) (se supone $a < b \leq 0$, o bien $0 \leq a < b$):

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b |x| \cdot |f(x) - g(x)|\, dx \quad \text{(unidades de volumen)}$$

Información: La fórmula anterior se conoce como "fórmula del anillo". Si es $a < b \leq 0$, se tendrá $|x| = -x$. Y si es $0 \leq a < b$, se tendrá $|x| = x$. Obsérvese que las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ tienen que estar al mismo lado del eje OY, pudiendo llegar a coincidir una de ellas con dicho eje (por eso se pide $a < b \leq 0$, estando las dos rectas a la izquierda de OY, o bien debe cumplirse $0 \leq a < b$, quedando ambas rectas a la derecha de OY). Cuando las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se corten en puntos intermedios del intervalo $[a\,, b]$ e intercambien sus posiciones, habrá que descomponer dicho intervalo en dos o más subintervalos consecutivos tomando en cada uno la diferencia que sea positiva o cero (entre $f(x) - g(x)$ y $g(x) - f(x)$), aplicando correctamente la anterior fórmula del anillo en cada uno de esos subintervalos. Los valores obtenidos se sumarán.

Ejemplo: Hallar el volumen obtenido al girar alrededor del eje OY la misma región descrita en el ejemplo 1 del cálculo de un área. Aquí tenemos el caso en que las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$ que limitan la región no están al mismo lado del eje OY (luego no podremos aplicar la fórmula del anillo directamente). Pero si hacemos el dibujo de la región aludida nos daremos cuenta que esa región es simétrica respecto al eje OY, de forma que al girarla alrededor de dicho eje, la mitad izquierda (correspondiente al intervalo $[-2\,, 0]$) describe en el espacio el mismo cuerpo de revolución que el que describe la mitad derecha (correspondiente al intervalo $[0\,, 2]$). Por tanto, bastará usar una de esas mitades para obtener todo el volumen que queremos (con lo cual usaremos las rectas verticales $x = -2$ y $x = 0$, región a la izquierda del eje OY, o bien usaremos las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, región a la derecha del eje OY). Recuérdese que se exige $a < b \leq 0$ o bien $0 \leq a < b$, con lo cual puede ser $b = 0$ en la primera situación y puede ser $a = 0$ en la segunda situación. Así tenemos:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_0^2 |x| \cdot |e^x - e^{-x}|\, dx \ \text{ o bien } \ V_{OY} = 2\pi \cdot \int_{-2}^0 |x| \cdot |e^x - e^{-x}|\, dx$$

siendo $|x| = x$ y $|e^x - e^{-x}| = e^x - e^{-x}$ en el primer caso, y siendo $|x| = -x$ así como $|e^x - e^{-x}| = e^{-x} - e^x$ en el segundo caso. Calculando mediante integración por partes cualquiera de estas integrales se llega a $V_{OY} = 2\pi \cdot (e^2 + 3e^{-2}) = 48'977\ldots$ (unidades de volumen).

Nota 1: Si la región no hubiese sido simétrica respecto al eje OY, estando limitada por rectas verticales a distinto lado del eje, el problema sería más complicado. Tampoco entramos en detalles.

Nota 2: Para funciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$ el giro de la región plana será de 360º alrededor del eje OX y las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$ deberán estar al mismo lado de dicho eje (se tiene que cumplir $a < b \leq 0$ o bien $0 \leq a < b$, como dijimos anteriormente). Y todo lo demás es análogo, incluyendo la "fórmula del anillo", con variable independiente y en vez de x.

---

4) Volumen de un cuerpo en el espacio tridimensional, cuya "sección" (o región de corte) por un plano perpendicular a una cierta recta, por un punto x de la misma, tiene un área conocida $S(x)$. Se supone que $x = a$ y $x = b$ marcan las secciones inicial y final del cuerpo, con $a < b$:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx \quad \text{(unidades de volumen)}$$

Ejemplo: Hallar el volumen de un cuerpo en el espacio $\mathbb{R}^3$ cuya base sea el círculo de centro el origen y radio a, situado en el plano OXY, y cuyas "secciones" por planos perpendiculares al eje OX sean cuadrados situados en el semiespacio $z \geq 0$ y cuyos lados inferiores coincidan con las cuerdas determinadas sobre la base por esos cortes.

(Conviene hacerse un croquis del cuerpo, dibujando en perspectiva, con su base en el círculo, un "techo" formado por los lados superiores de los cuadrados obtenidos al cortar por los planos y con dos caras laterales simétricas entre sí y perpendiculares al plano OXY, formadas por los lados verticales de los cuadrados obtenidos al cortar por los planos).

Habrá cortes desde el plano de ecuación $x = -a$ (que da un punto, con lo cual el cuadrado es de lado cero) hasta el plano de ecuación $x = a$ (que da otro punto), luego la integral tendrá esos límites de integración: $-a$ y a .

Si llamamos x a la posición de un corte intermedio entre $-a$ y a, la longitud de la cuerda del círculo de la base que determina dicho corte será $2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ (Teorema de Pitágoras aplicado a triángulo rectángulo de hipotenusa a y cateto $|x|$ situado sobre el eje OX). Por tanto, el área del correspondiente cuadrado será $S(x) = 4 \cdot (a^2 - x^2)$. (Obsérvese que en los dos extremos del intervalo de integración el área es cero y en el corte dado por el plano central, de ecuación $x = 0$, el área es $4a^2$, pues la cuerda que le corresponde es el diámetro $2a$ del círculo). Entonces, aplicando la fórmula dada tenemos:

$$V = \int_{-a}^{a} 4 \cdot (a^2 - x^2)\, dx = 4 \cdot \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = 8 \cdot \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{16}{3} a^3$$

unidades de volumen.

Nota: Hemos pedido que los cortes cuadrados estén en el semiespacio $z \geq 0$ y apoyados sobre la base del cuerpo para facilitar el dibujo del mismo. Pero lo que influye en el cálculo del volumen son los valores de las áreas de dichos cortes y las posiciones del corte inicial y del corte final. O sea que el volumen hubiese resultado el mismo si desplazáramos todos los cuadrados de modo que sus centros estuviesen sobre el eje OX o todos quedasen en el semiespacio $z \leq 0$. Esto ilustra al famoso Principio de Cavalieri, según el cual "cuando se cortan dos cuerpos por un haz de planos paralelos entre dos fijos, si las secciones dadas por cada plano en ambos cuerpos tienen áreas iguales, ambos cuerpos tendrán el mismo volumen, sin importar la forma ni la posición de dichas secciones obtenidas" (siglo XVII).

---

5) Longitud del arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, comprendido entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ (se supone $a < b$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,, b]$):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad \text{(unidades de longitud)}$$

Ejemplo: Hallar la longitud del arco de "catenaria" de ecuación $y = ch\, x$ entre los puntos de abscisas 0 y 3.

Tenemos que la derivada de $ch\, x$ es $sh\, x$ y viceversa; también que la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas es $ch^2 x - sh^2 x \equiv 1$ para todo x real. Por tanto,

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + sh^2 x}\; dx = \int_0^3 ch\, x\; dx = [sh\, x]_0^3 = sh\, 3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2} = 10'017\ldots$$

unidades de longitud.

Nota: Si el arco correspondiese a la gráfica de $x = f(y)$, entre los puntos de ordenadas $y = a$ e $y = b$, se aplica la misma fórmula quedando la integral en la variable y.

---

6) Área de la superficie de revolución obtenida girando 360º alrededor del eje OX un arco como el del apartado anterior (se supone $a < b$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,,b]$):

$$A_{OX} = 2\pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(unidades de área)}$$

Información: Si $f(x)$ cambia de signo en $[a\,,b]$, habrá que descomponer el intervalo de integración en dos o más subintervalos consecutivos, donde en cada uno se mantenga el signo de $f(x)$, aplicando correctamente la fórmula anterior en cada subintervalo. Luego se suman los valores obtenidos.

Ejemplo: Hallar el área de la superficie obtenida girando alrededor del eje OX el arco de la gráfica de $y = -2\sqrt{x}$ entre los puntos $(1, -2)$ y $(4, -4)$. Será:

$$A_{OX} = 2\pi \cdot \int_1^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\; dx = 4\pi \cdot \int_1^4 \sqrt{x+1}\; dx$$

unidades de área. Pues las abscisas de los extremos del arco son 1 y 4, siendo además $-2\sqrt{x}$ siempre negativa, con lo cual su valor absoluto es $2\sqrt{x}$. Resolviendo la integral se tiene:

$$A_{OX} = 4\pi \cdot \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{125} - \sqrt{8}\right) = 69'968\ldots \quad \text{(unidades de área)}$$

Nota: Cuando el arco corresponda a la gráfica de $x = f(y)$, entre los puntos de ordenadas $y = a$ e $y = b$, siendo la rotación alrededor del eje OY, se obtendrá el área de la superficie engendrada de un modo similar al indicado anteriormente, resolviendo en este caso una integral con y como variable independiente: $A_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b |f(y)| \cdot \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\; dy$ (unidades de área)

---

7) Área de la superficie de revolución obtenida girando 360º alrededor del eje OY un arco como el de los dos apartados anteriores (se supone $a < b$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,,b]$):

$$A_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b |x| \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(unidades de área)}$$

Información: Si fuese $a < b \leq 0$, se tendría $|x| = -x$ (el arco que rotamos estaría a la izquierda del eje OY). Si fuese $0 \leq a < b$, se tendría $|x| = x$ (el arco que rotamos estaría a la derecha del eje OY). Y en caso de que el arco corte al eje OY porque sea $a < 0 < b$ pueden suceder varias situaciones, que se resuelven teniendo en cuenta por separado las dos integrales: $I_{[a,0]}$ (con el mismo integrando e intervalo de integración $[a\,,0]$, donde $|x| = -x$) e $I_{[0,b]}$ (con el mismo integrando e intervalo de integración $[0\,,b]$, donde $|x| = x$). Las situaciones son básicamente tres, aunque podrían aparecer mezcladas: 1) Que las dos partes del arco, correspondientes a los dos subintervalos $[a\,,0]$ y $[0\,,b]$, sean simétricas respecto al eje OY, en cuyo caso basta calcular sólo una de las integrales mencionadas, porque las dos partes del arco generan la misma superficie. 2) Que las dos partes del arco no sean simétricas, pero una de ellas genere una superficie contenida en la que genera la otra, en cuyo caso basta calcular la integral que corresponda a la superficie mayor. 3) Que las dos partes del arco no sean simétricas y generen superficies diferentes, ninguna contenida en la otra ni siquiera parcialmente, en cuyo caso habrá que calcular las dos integrales mencionadas y sumar sus resultados.

Ejemplo 1: Hallar el área de la superficie obtenida girando 360º alrededor del eje OY el arco de la gráfica de la función $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ que va del punto de abscisa $x = -a$ al punto de abscisa $x = 0$ (se trata del arco de la circunferencia de centro el origen y radio a, situado en el tercer cuadrante; por tanto, la superficie que se obtiene es la mitad inferior de la superficie esférica de igual centro y radio). El cálculo será:

$$A_{OY} = 2\pi \cdot \int_{-a}^{0} (-x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi \cdot \int_{-a}^{0} (-x) \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\, dx$$

pues el arco que rotamos está a la izquierda del eje OY, con lo cual $|x| = -x$. Además, la derivada de la función dada es $f'(x) = -\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Resolviendo la integral mediante el cambio de variable $a^2 - x^2 = t$, se llega a $A_{OY} = 2\pi a^2$ (unidades de área), que es la mitad del área de la superficie esférica nombrada.

Ejemplo 2: Si nos pidiesen el área de la superficie obtenida girando 360º alrededor del eje OY el arco de la gráfica de la función $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ que va del punto $x = -a$ al punto $x = a$ (arco de circunferencia de centro el origen y radio a, situado en los cuadrantes tercero y cuarto), al cortar el arco al eje OY en el punto $(0\,,-a)$ y ser simétricas sus dos partes respecto a dicho eje, bastará calcular solamente la misma integral anterior correspondiente a la mitad izquierda del arco, o bien calcular solamente la integral análoga correspondiente a la mitad derecha del arco (que dará el mismo resultado).

Ejemplo 3: Hallar el área de la superficie obtenida girando 360º alrededor del eje OY el arco de la gráfica de la función $y = x^3$, entre los puntos $x = -1$ y $x = 2$. El arco corta el eje OY en el punto $(0\,,0)$, estando situada la parte izquierda de dicho arco en el tercer cuadrante y la parte derecha en el primer cuadrante. Por tanto, las dos partes del arco no son simétricas respecto al eje OY, generando superficies diferentes y no quedando una contenida en la otra (la superficie generada por la parte izquierda del arco queda por debajo del plano obtenido rotando el eje OX alrededor de OY, y la superficie generada por la parte derecha del arco queda por encima de dicho plano). Entonces habrá que calcular las dos integrales siguientes y sumar sus resultados:

$$2\pi \cdot \int_{-1}^{0} |x| \cdot \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \text{ (u. a.) y } 2\pi \cdot \int_{0}^{2} |x| \cdot \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \text{ (u. a.)}$$

y tomando en cuenta que $|x| = -x$ en la primera y $|x| = x$ en la segunda, se tiene:

$$A_{OY} = 2\pi \cdot \int_{0}^{-1} x \cdot \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx + 2\pi \cdot \int_{0}^{2} x \cdot \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \quad \text{(unidades de área)}$$

Las integrales anteriores se calculan del mismo modo porque tienen el mismo integrando: Hacemos en ambas el cambio de variable $3x^2 = t$, con lo cual $6x\, dx = dt$, o sea $x\, dx = dt/6$, y se obtiene $2\pi \cdot \int \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 + t^2}\, dt$ (poniéndoles límites de integración, será entre $t = 0$ y $t = 3$ la primera integral, y entre $t = 0$ y $t = 12$ la segunda). Luego hacemos en ambas el nuevo cambio $t = sh\, u$ con lo cual es $u = arg\, sh\, t = ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$ (ver páginas 14 y 15 de la Sección 4.1), teniéndose $dt = ch\, u\, du$ y $\sqrt{1 + sh^2 u} = ch\, u$, para obtener $\frac{\pi}{3} \cdot \int ch^2 u\, du$, que es la integral inmediata $\frac{\pi}{3} \cdot \int \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du = \frac{\pi}{12} \cdot \int (e^{2u} + e^{-2u} + 2)\, du$, siendo los límites de integración entre $u = 0$ y $u = ln\,(3 + \sqrt{10}\,)$ para la primera integral y entre $u = 0$ y $u = ln\,(12 + \sqrt{145}\,)$ para la segunda.

Los resultados numéricos son π ·1'8842 + π ·24'6132 = $\boxed{\pi \cdot 26'4974 \text{ unidades de área}}$ (aproximando los valores de las dos integrales hasta la cuarta cifra decimal con redondeo).

Nota: Cuando el arco corresponda a la gráfica de $x = f(y)$, entre los puntos de ordenadas $y = a$ e $y = b$, siendo la rotación alrededor del eje OX, se obtendrá el área de la superficie engendrada de un modo similar al indicado anteriormente, resolviendo en este caso una integral con y como variable independiente: $A_{OX} = 2\pi \cdot \int_{a}^{b} |y| \cdot \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy$ (unidades de área)

Aplicaciones importantes en Física:

1) Masa de un alambre muy fino que ocupe la posición de la gráfica de $y = f(x)$, entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$, siendo $m(x)$ la densidad lineal (cantidad de masa por unidad de longitud) en cada punto del alambre (se supone $a < b$, $m(x) \geq 0$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,,b]$):

$$M = \int_a^b m(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(unidades de masa)}$$

Ejemplo: Hallar la masa de un alambre de densidad lineal variable $m(x) = |x|$ (unidades de masa por unidad de longitud), que ocupa el arco de la gráfica de $y = 5 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$ entre los puntos de abscisas $x = 3$ y $x = 8$. Será:

$$M = \int_3^8 |x| \cdot \sqrt{1 + \left(-\sqrt{x}\right)^2}\; dx = \int_3^8 x \cdot \sqrt{1+x}\, dx \quad \text{(unidades de masa)}$$

integral que se resuelve aplicando el cambio de variable $1 + x = t$, o bien mediante integración por partes, resultando $M = 1076/15 = 71'733\ldots$ (unidades de masa).

---

2) Momento de inercia respecto al eje OX de un alambre muy fino, como el del apartado anterior, siendo $m(x)$ la densidad lineal en cada punto del alambre (se supone $a < b$, $m(x) \geq 0$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,,b]$):

$$I_{OX} = \int_a^b [f(x)]^2 \cdot m(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(unidades de masa) x (unidades de long.)}^2$$

Ejemplo: Hallar el momento de inercia respecto al eje OX de un alambre que ocupa el arco de la gráfica de $y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$ entre los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 3$, siendo su densidad lineal $m(x) = \sqrt{1+x}$. Será:

$$I_{OX} = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right)^2 \cdot \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\; dx = \int_0^3 \frac{4}{9} x^3 \cdot (1+x)\; dx$$

Integral que se resuelve fácilmente resultando $I_{OX} = \frac{153}{5} = 30'6$ (unidades de masa por unidades de longitud al cuadrado).

---

3) Momento de inercia respecto al eje OY de un alambre muy fino, como el de los apartados anteriores, siendo $m(x)$ la densidad lineal en cada punto del alambre ($a < b$, $m(x) \geq 0$ y $f(x)$ con derivada continua en $[a\,,b]$):

$$I_{OY} = \int_a^b x^2 \cdot m(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(unidades de masa) x (unidades de long.)}^2$$

Ejemplo: Hallar el momento de inercia respecto el eje OY del mismo alambre del ejemplo anterior. Será:

$$I_{OY} = \int_0^3 x^2 \cdot \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^3 x^2 \cdot (1+x)\; dx$$

Integral que se resuelve fácilmente resultando $I_{OY} = \frac{117}{4} = 29'25$ (unidades de masa x unidades de longitud al cuadrado).

---

4) El momento de inercia del alambre respecto del origen es: $I_O = I_{OX} + I_{OY}$

En el caso del alambre puesto como ejemplo en los dos apartados anteriores, se tendrá: $I_O = \frac{153}{5} + \frac{117}{4} = \frac{1197}{20} = 59'85$ (unidades de masa x unidades de longitud al cuadrado).

---

5) Valor medio de una función escalar sobre un alambre muy fino. La función escalar puede ser la temperatura $t(x)$ en cada punto del alambre, u otra función similar (por ejemplo, la presión o la densidad lineal). El alambre ocupa la posición de la gráfica de $y = f(x)$, entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ (se supone $a < b$, $t(x)$ continua en $[a, b]$ y $f(x)$ con derivada continua en ese mismo intervalo). Para la función temperatura $t(x)$ sería:

$$\text{Temperatura media} = \frac{\int_a^b t(x) \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx} \quad \text{(unidades de temperatura)}$$

Análogamente se podría hallar la "presión media" usando la función $p(x)$ que dé la presión en cada punto, o podría hallarse la "densidad lineal media" usando la función $m(x)$ que da la densidad lineal en cada punto. Etc…

<u>Ejemplo</u>: Hallar la <u>densidad lineal media</u> del alambre que hemos tomado como ejemplo en los apartados 2), 3) y 4), cuya densidad lineal en cada punto es $\sqrt{1 + x}$ (unidades de masa por cada unidad de longitud). Se tiene:

$$\text{Densidad media} = \frac{\int_0^3 \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\, dx}{\int_0^3 \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\, dx} = \frac{\int_0^3 (1+x)\, dx}{\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx} = \frac{15/2}{16/3} = \frac{45}{32} = 1'40625 \quad \text{(u.m./u.l.)}$$

(Nótese que la densidad lineal es mínima en el punto de abscisa 0, valiendo 1. Y luego <u>crece</u> a lo largo del alambre para llegar a su valor máximo en el punto de abscisa 3, donde vale 2. Y la densidad media ha quedado entre 1 y 2, como debe ser).

NOTAS IMPORTANTES:

1) Lo que hemos dicho anteriormente sobre aplicaciones en Física, donde en todos los casos hemos supuesto que el alambre ocupa un arco de la gráfica de $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, puede aplicarse análogamente al caso en que el alambre ocupe un arco de la gráfica de una función de la forma $x = f(y)$ entre $y = a$ e $y = b$, siendo en ese caso la densidad lineal función continua de la variable y en $[a, b]$ y $f(y)$ con derivada continua en dicho intervalo. Pero entonces, la integral análoga (en la variable y) a la que nos daba el momento de inercia del alambre respecto a OX (apartado 2 anterior) será ahora la que nos dará el momento de inercia del mismo alambre <u>respecto a OY</u>. Y viceversa, la integral análoga (en la variable y) a la que daba el momento de inercia del alambre respecto del eje OY (apartado 3 anterior) será la que nos dé el momento de inercia <u>respecto de OX</u>.

2) De igual modo, ya habíamos visto que las aplicaciones geométricas consideradas en los apartados 1, 2 y 3 pueden usarse de forma análoga cuando las funciones dadas sean de las formas $x = f(y)$ y $x = g(y)$. En estos casos <u>los ejes de coordenadas cumplen papeles invertidos</u>: Así la "fórmula del disco" en estos casos se usará cuando rotemos la región alrededor del eje OY (el eje de rotación <u>coincide</u> con la variable de integración), mientras que la "fórmula del anillo" se aplicará en las rotaciones alrededor del eje OX (el eje de rotación <u>no coincide</u> con la variable de integración).

3) En la Sección 4.7 se explica que "un arco de curva plana" viene dado, en general, por un par de funciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$ con el "parámetro" t variando en un cierto inte-

valo $[a\,,b]$, de forma que ambas funciones tienen que ser continuas en dicho intervalo. Uno de los extremos del arco es el punto A de coordenadas $(f(a), g(a))$ y el otro extremo es el punto B de coordenadas $(f(b), g(b))$, obteniéndose los demás puntos para los valores intermedios de t en $[a\,,b]$.
Caso particular: Cuando la primera función paramétrica sea $x = t$, se puede eliminar el parámetro de la segunda función, quedando la única función $y = g(x)$ que define el mismo arco entre $x = a$ y $x = b$.
Otro caso particular: Cuando la segunda función paramétrica sea $y = t$, al eliminar el parámetro de la primera función, queda la única función $x = f(y)$ que define el mismo arco entre $y = a$ e $y = b$.

4) Pues bien, en la Sección 4.7 veremos que en las aplicaciones que involucren a un arco de curva plana (longitud del arco, áreas de las superficies obtenidas al girarlo, masa y momentos de inercia de un alambre con la forma del arco, vistas aquí en los apartados iniciales 5, 6 y 7, así como en los apartados 1, 2 y 3 de las aplicaciones a la Física), se considera la expresión de "la longitud de un arco infinitesimal" (que son los arcos en que se descompone el arco principal cuando consideramos particiones del intervalo $[a\,,b]$ donde varía el parámetro t, cuya cantidad es cada vez mayor y donde todos son cada vez más pequeños a medida que el paso h tiende a cero al aproximarnos a la integral). La expresión mencionada es $dl = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$ (se suponen f y g derivables con derivadas continuas), que en el primer caso particular de arco definido por $y = g(x)$ se convierte en $dl = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\;dx$ y en el segundo caso particular de ar-co definido por $x = f(y)$ se convierte en $dl = \sqrt{[f'(y)]^2 + 1}\;dy$ (recordar que en las integrales respectivas siempre aparecen estas expresiones).

5) Pero también, en la Sección 4.7 se verá que la longitud de un arco definido por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ con $t \in [a\,,b]$, teniendo f y g derivadas continuas en ese intervalo, viene dada como

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

(esto viene a ser que "la longitud total del arco dado es la suma de las longitudes de todos sus arcos infinitesimales"). Y en el apartado 5 de las aplicaciones geométricas mencionadas en este tema habíamos dicho que la longitud del arco era $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ cuando el arco venía definido por $y = f(x)$ (lo cual concuerda con lo anterior, pues será $x = t$ e $y = f(t)$ en forma paramétrica), mientras que en la Nota de ese mismo apartado dijimos que se usa $L = \int_a^b \sqrt{[f'(y)]^2 + 1}\;dy$ si el arco viene dado por $x = f(y)$ (que también concuerda con lo anterior, pues en forma paramétrica será $x = f(t)$ e $y = t$).