FUNCIÓN GAMMA, FUNCIÓN BETA Y TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

(Prerrequisito: Integrales impropias)

Introducción

Las integrales impropias se usan principalmente para definir ciertas "funciones especiales" y también ciertas "transformaciones integrales", las cuales tienen muchas aplicaciones. También se usan en Estadística Matemática para definir "funciones de distribución de probabilidad" y los cálculos correspondientes.

Entre las "funciones especiales" trataremos "la función gamma" (real de una variable real) y "la función beta" (real de dos variables reales), llamadas "funciones eulerianas" en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783; considerado el matemático más importante del siglo XVIII).

Y entre las "transformaciones integrales" trataremos solamente la transformación de Laplace, en honor al matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Pero hay muchas más. En general, una "transformación integral" está definida por una cierta integral (la cual incluye en su integrando un parámetro real s) y sirve para transformar unas funciones en otras funciones. Así si representamos la transformación integral por $\mathcal{T}$, dada una función $f(t)$ de una cierta familia, su transformada por $\mathcal{T}$ es otra función $F(s)$, función del parámetro s que había en la integral, y podremos escribir $\mathcal{T}[f(t)]= F(s)$. Esto se entenderá mejor cuando veamos la Transformación de Laplace funcionando.

La función gamma

Es una función real de una variable real p, definida explícitamente por la expresión:

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx}\ , \text{ para todo } p > 0$$

La integral que define gamma es impropia de primera especie convergente para $p \geq 1$ y es impropia de tercera especie convergente para $0 < p < 1$ (en estos casos el integrando posee una discontinuidad infinita en $x = 0$, además del intervalo de integración no acotado). Para otros valores de p la integral es no convergente, luego no tiene valor. Pero el valor de la integral, cuando es convergente, depende del valor de p que sustituyamos en la misma. Por tanto, es una función real de la variable real p. (Su símbolo Γ es el de la letra griega "gamma" mayúscula).

Se tienen las siguientes propiedades importantes de la función $\Gamma(p)$:

1) Su dominio es el intervalo $(0\,,+\infty)$.

2) Sus valores son todos positivos.

3) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (son valores notables de la función).

4) $\boxed{\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)}$, para todo $p > 0$. Esta propiedad es característica de la función gamma y permite tabularla solamente para valores de p entre 1 y 2.

5) $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo entero positivo $n > 1$. Es consecuencia de la propiedad anterior. Al extender esta propiedad para $n = 1$, resulta $0! = 1$.

6) Es derivable y por tanto continua en todo su dominio.

7) Su gráfica es cóncava hacia arriba en todo el dominio.

8) La función posee un único mínimo relativo (que es también mínimo absoluto) en el punto $p_0 \cong 1'46163$, siendo su valor en ese punto $\Gamma(p_0) \cong 0'8856$.

9) $\lim\limits_{p \to 0^+} \Gamma(p) = +\infty$ (si tomamos los valores de p en el eje de abscisas de un sistema cartesiano y los de $\Gamma(p)$ en el correspondiente eje de ordenadas, la gráfica quedará situada en el primer cuadrante y el eje de ordenadas será asíntota vertical de la misma).

10) $\lim\limits_{p \to +\infty} \Gamma(p) = +\infty$ (la gráfica, a la derecha del mínimo, tiene un comportamiento parecido a la mitad derecha de una parábola vertical cóncava hacia arriba que tuviese su mínimo en el punto $(p_0, \Gamma(p_0))$, pero crece mucho más rápidamente pues parte de sus valores son los factoriales de los enteros positivos sucesivos).

La gráfica de la función gamma es muy sencilla y se puede dibujar en forma aproximada con los datos que hemos dado.

Damos ahora una **tabla de doble entrada de valores de la función gamma** con 3 decimales y redondeo, correspondientes a 100 valores de la variable p con dos decimales entre 1’00 y 1’99 (la primera cifra decimal acompañada de la parte entera aparece en la columna de la izquierda y la segunda cifra decimal aparece en la fila superior):

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1’0	1	0’994	0’989	0’983	0’978	0’973	0’969	0’964	0’960	0’955
1’1	0’951	0’947	0’944	0’940	0’936	0’933	0’930	0’927	0’924	0’921
1’2	0’918	0’916	0’913	0’911	0’908	0’906	0’904	0’902	0’901	0’899
1’3	0’897	0’896	0’895	0’893	0’892	0’891	0’890	0’889	0’888	0’888
1’4	0’887	0’887	0’886	0’886	0’886	0’886	0’886	0’886	0’886	0’886
1’5	0’886	0’887	0’887	0’888	0`888	0’889	0’890	0’890	0’891	0’892
1’6	0’893	0’895	0’896	0’897	0’899	0’900	0’902	0’903	0’905	0’907
1’7	0’909	0’911	0’913	0’915	0’917	0’919	0’921	0’924	0’926	0’929
1’8	0’931	0’934	0’937	0’940	0’943	0’946	0’949	0’952	0’955	0’958
1’9	0’962	0’965	0’969	0’972	0’976	0’980	0’984	0’988	0’992	0’996

Los valores de gamma para p variando entre 2 y 3 se obtienen aplicando la propiedad 4 directamente. Los valores de gamma correspondientes al intervalo (3 , 4) resultan de apli-

car dos veces esa misma propiedad. Los valores correspondientes al intervalo (4 , 5) resultan aplicando tres veces esa propiedad. Etc…
Por ejemplo, $\Gamma(4'7) = 3'7 \cdot \Gamma(3'7)$, además $\Gamma(3'7) = 2'7 \cdot \Gamma(2'7)$ y también $\Gamma(2'7) = 1'7 \cdot \Gamma(1'7)$ y así resulta $\boxed{\Gamma(4'7) = 3'7 \cdot 2'7 \cdot 1'7 \cdot \Gamma(1'7)}$. Y la tabla anterior nos dice que $\Gamma(1'7) \cong 0'909$, luego se tendrá finalmente $\Gamma(4'7) \cong 15'437547$.

Los valores de la tabla de la función gamma se obtienen por métodos numéricos de integración, dando aproximaciones con error menor que una unidad de la última cifra que aparece (todas las cifras exactas, salvo la tercera decimal que puede provenir de un redondeo hacia arriba y en ese caso es una unidad mayor que la exacta); así el anterior valor dado de $\Gamma(1'7)$ tiene un error por exceso o por defecto menor que 0'001, lo cual nos permite decir que el resultado final tiene un error en valor absoluto menor que $0'001 \cdot 3'7 \cdot 2'7 \cdot 1'7 = 0'016983$. Entonces despreciaremos las cifras decimales posteriores a la primera, quedando la aproximación $\boxed{\Gamma(4'7) \cong 15'4}$, con todas las cifras exactas.

Nota: Para obtener el valor de $\Gamma(1'73)$, hemos hallado con una calculadora científica los valores de las integrales $\int_0^{20} x^{0'73} \cdot e^{-x}\, dx$ y $\int_0^{30} x^{0'73} \cdot e^{-x}\, dx$, que son aproximaciones por defecto de la integral $\int_0^{+\infty} x^{0'73} \cdot e^{-x}\, dx$, la cual da exactamente el valor buscado de gamma. Los valores obtenidos por la calculadora, después de unos 3 minutos de espera en cada caso, fueron 0'9146653522 y 0'9146653712 respectivamente. Se ve que hay muy poca diferencia entre ambos, pues el integrando en el intervalo $[20\,,30]$ tiene ya valores muy pequeños (por ejemplo, el valor del integrando en el extremo 20 es aproximadamente $1'8 \cdot 10^{-8}$ y su valor en el extremo 30 es aproximadamente $1'12 \cdot 10^{-12}$), y en el intervalo restante $[30\,,+\infty)$ los valores del integrando son casi nulos, con lo cual la integral correspondiente vale casi cero. Por tanto, podemos suponer que el valor exacto de $\Gamma(1'73)$ debe ser 0'91466… , mientras que el valor dado en la tabla de la página anterior es 0'915 (se aplicó un redondeo en la tercera cifra decimal).

Y para obtener valores de gamma correspondientes al intervalo (0 , 1) se aplica la propiedad 4 "en retroceso". Por ejemplo, para hallar $\Gamma(0'23)$ tomamos en la fórmula $p = 0'23$, con lo cual tenemos $\Gamma(1'23) = 0'23 \cdot \Gamma(0'23)$, de donde resulta $\boxed{\Gamma(0'23) = \Gamma(1'23)/0'23}$. Y como la tabla de valores nos dice que $\Gamma(1'23) \cong 0'911$, se tiene $\Gamma(0'23) \cong 3'96087$, con error menor que $0'001/0'23 \cong 0'00435$, con lo cual podemos escribir con todas las cifras exactas $\boxed{\Gamma(0'23) \cong 3'9}$.

Hay muchas integrales impropias convergentes, de difícil o imposible cálculo directo en forma exacta, pero cuyos valores pueden relacionarse con ciertos valores de la "función gamma". Esta aplicación le da especial interés a la función gamma. Y también veremos en lo que sigue que la "función beta" se relaciona directamente con la "función gamma", lo cual permite obtener fácilmente los valores de otras muchas integrales a través de "beta" y "gamma" (algunas impropias y otras no).

Ejemplos:

1) Calcular el valor de la integral impropia de primera especie $\int_0^{+\infty} \sqrt[4]{x} \cdot e^{-\sqrt{x}}\, dx$.
Aplicamos el cambio de variable $\boxed{\sqrt{x} = t}$, con lo cual $\sqrt[4]{x} = \sqrt{t}$, $x = t^2$ y $dx = 2t\, dt$.
Los límites de integración son los mismos, pues $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$.

Por tanto: $\int_0^{+\infty} \sqrt[4]{x} \cdot e^{-\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \cdot e^{-t} \cdot 2t\, dt = 2 \cdot \int_0^{+\infty} t^{3/2} \cdot e^{-t}\, dt$. Pero esta integral es como la que define gamma poniendo $p - 1 = 3/2$, o sea $\boxed{p = 5/2}$.
Conclusión: La integral dada vale

$$2 \cdot \Gamma(5/2) = 2 \cdot (3/2) \cdot \Gamma(3/2) = 2 \cdot (3/2) \cdot (1/2) \cdot \Gamma(1/2) = (3/2) \cdot \sqrt{\pi}$$

2) Calcular el valor de la integral impropia de segunda especie $\int_0^{1/2} ln^2(2\,x)\, dx$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = 0$).
Aplicamos el cambio de variable $\boxed{ln(2\,x) = -t}$, con lo cual $ln^2(2\,x) = t^2$; $x = e^{-t}/2$; siendo $dx = (-\,e^{-t}/2)\, dt$. Los límites de integración cambian: $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$ y $x = 1/2 \Rightarrow t = 0$.
Por tanto: $\int_0^{1/2} ln^2(2\,x)\, dx = \int_{+\infty}^{0} t^2 \cdot \left(-\frac{e^{-t}}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t}\, dt$, con lo cual la integral dada valdrá $\boxed{(1/2) \cdot \Gamma(p)}$, siendo $p - 1 = 2$, o sea $\boxed{p = 3}$.
Conclusión: La integral dada vale $\Gamma(3)/2 = 2!/2 = 1$.

Nota: No sabíamos de antemano si las integrales impropias dadas en los ejemplos anteriores eran convergentes o no. Pero al haber podido calcular sus respectivos valores, ya sabemos que son convergentes.

La función beta

Es una función real de dos variables reales (p y q) definida explícitamente por la expresión:

$$\boxed{B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1 - x)^{q-1} dx} \text{ , para todo } p > 0 \text{ y todo } q > 0$$

También se puede definir beta como: $\boxed{B(p, q) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} sen^{2p-1}x \cdot cos^{2q-1}\, x\ dx}$

La primera expresión se llama forma binomial de beta y la segunda se llama forma trigonométrica de beta. Se pasa de la primera expresión a la segunda aplicando el cambio de variable $\boxed{x = sen^2 t}$ o bien $t = arc\ sen\sqrt{x}$ (así $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x = 1 \Rightarrow t = \pi/2$).

En la forma binomial, la integral es impropia de segunda especie convergente cuando es $0 < p < 1$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = 0$), o cuando $0 < q < 1$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = 1$). Pueden darse ambos casos, con lo cual el integrando tendrá dos asíntotas). Si $p \geq 1$ y $q \geq 1$ la integral no es impropia (es una integral definida ordinaria). Y si alguno de los parámetros es negativo o cero, la integral es impropia no convergente, luego no tiene valor.

En la forma trigonométrica, la integral es impropia de segunda especie convergente cuando es $0 < p < 1/2$, o cuando $0 < q < 1/2$. Si $p \geq 1/2$ y $q \geq 1/2$ la integral no es impropia (es una integral definida ordinaria). Y si alguno de los parámetros es negativo o cero, la integral resulta impropia no convergente, luego no tiene valor.

Por tanto, la función beta tendrá siempre valor real cuando $\boxed{p > 0 \text{ y } q > 0}$ (y sólo en estos casos), luego su dominio es la región del primer cuadrante, excluidos los bordes, en un sistema cartesiano OPQ (representando p sobre un eje y representando q sobre el otro eje).

Se tienen las siguientes propiedades importantes de la función beta:

1) $B(p,q) = B(q,p)$

2) $B(p,1) = 1/p$ así como $B(1,q) = 1/q$

3) Relación muy importante entre beta y gamma: $\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$ $(p > 0 \; y \; q > 0)$

4) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ (valor obtenido por cálculo directo inmediato en la forma trigonométrica, de donde resulta el valor ya mencionado $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ al aplicar la propiedad anterior).

Del mismo modo que "la función gamma" sirve para calcular exactamente algunas integrales impropias y también algunas integrales definidas ordinarias de difícil o imposible cálculo directo, "la función beta" también sirve para calcular exactamente ciertas integrales impropias o integrales ordinarias de tipo binomial o de tipo trigonométrico de cálculo directo muy largo, difícil o imposible (en este caso aprovechando la importante relación entre beta y gamma dada anteriormente).

Ejemplos:

1) Calcular el valor de la integral impropia de segunda especie $\int_0^1 x \cdot \left(1-\sqrt{x}\right)^{-1/3} dx$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = 1$).
Aplicamos el cambio de variable $\boxed{\sqrt{x} = t}$, para que aparezca $(1-t)^{-1/3}$, con lo cual tenemos $x = t^2$ y $dx = 2t\,dt$. En este cambio los límites de integración no se alteran, pues $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Por tanto:

$$\int_0^1 x \cdot \left(1-\sqrt{x}\right)^{-1/3} dx = \int_0^1 t^2 \cdot (1-t)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2t\,dt = 2 \cdot \int_0^1 t^3 \cdot (1-t)^{-\frac{1}{3}}\,dt$$

que es $2 \cdot B(p,q)$ si tomamos $p - 1 = 3$ y $q - 1 = -1/3$, o sea $\boxed{p = 4}$ y $\boxed{q = 2/3}$.
Conclusión:

$$\int_0^1 x \cdot \left(1-\sqrt{x}\right)^{-1/3} dx = 2 \cdot B(4, \tfrac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(2/3)}{\Gamma(4+2/3)} = \frac{2\cdot 3!\cdot\Gamma(2/3)}{\Gamma(14/3)} = \frac{2\cdot 6\cdot\Gamma(2/3)}{\frac{11}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\Gamma(2/3)}$$

que, simplificando, nos da como valor de la integral $243/220$.

2) Calcular el valor de la integral ordinaria $\int_0^3 x \cdot \sqrt[3]{27-x^3}\,dx$.
Sacamos 27 factor común del radicando, con lo cual ese radicando queda como $27 \cdot (1 - x^3/27) = 3^3 \cdot [1-(x/3)^3]$.

Por tanto, la integral dada será $\quad I = 3 \cdot \int_0^3 x \cdot \left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^3\right]^{1/3} dx$

Conviene hacer el cambio de variable $\boxed{x/3 = t}$, con lo cual $x = 3t$ y $dx = 3\,dt$. Uno de los límites de integración cambia, pues $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x = 3 \Rightarrow t = 1$. Así se tiene:

$$I = 3 \cdot \int_0^1 3t \cdot (1-t^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 3\,dt = 27 \cdot \int_0^1 t \cdot (1-t^3)^{1/3} dt$$

Ahora conviene el nuevo cambio $\boxed{t^3 = u}$, con lo cual $t = u^{1/3}$ y $dt = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot u^{-\frac{2}{3}}\,du$, quedando los límites de integración iguales, pues $t = 0 \Rightarrow u = 0$ y $t = 1 \Rightarrow u = 1$. Con lo cual:

$$I = 27 \cdot \int_0^1 u^{1/3} \cdot (1-u)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot u^{-\frac{2}{3}}\ du = 9 \cdot \int_0^1 u^{-1/3} \cdot (1-u)^{\frac{1}{3}}\ du = 9 \cdot B(p,q)$$

tomando $p - 1 = -1/3$ y $q - 1 = 1/3$, o sea $\boxed{p = 2/3}$ y $\boxed{q = 4/3}$.

Conclusión:

$$I = 9 \cdot B(\tfrac{2}{3}\,,\,\tfrac{4}{3}) = 9 \cdot \frac{\Gamma(2/3) \cdot \Gamma(4/3)}{\Gamma(2)} = 9 \cdot \frac{\Gamma(5/3)}{2/3} \cdot \Gamma(4/3) = \frac{27 \cdot \Gamma(5/3) \cdot \Gamma(4/3)}{2}$$

donde los valores de gamma en $5/3$ y en $4/3$ se buscarán en la tabla dada en la pág. 2 resultando $\Gamma(4/3) \cong \Gamma(1'33) \cong 0'893$ y $\Gamma(5/3) \cong \Gamma(1'67) \cong 0'903$.
Por tanto, la integral dada vale aproximadamente 10'886.

3) Calcular el valor de la integral impropia de segunda especie $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\ dx$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = 0$).
Escribimos la integral como $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-1/2} x \cdot \cos^{1/2} x\ dx$ y, recordando la forma trigonométrica de beta, sería directamente $(1/2) \cdot B(p,q)$, con $2p - 1 = -1/2$ y $2q - 1 = 1/2$, o sea $\boxed{p = 1/4}$ y $\boxed{q = 3/4}$.

Conclusión: El valor de la integral es

$$\frac{1}{2} \cdot B(1/4\,, 3/4) = \frac{\Gamma(1/4) \cdot \Gamma(3/4)}{2 \cdot \Gamma(1)} = \frac{\Gamma(5/4)\ \cdot \Gamma(7/4)}{2 \cdot (1/4) \cdot (3/4)} = \frac{8 \cdot \Gamma(5/4) \cdot \Gamma(7/4)}{3}$$

donde los valores de gamma en $5/4$ y en $7/4$ aparecen en la tabla dada, resultando $\Gamma(5/4) = \Gamma(1'25) \cong 0'906$ y $\Gamma(7/4) = \Gamma(1'75) \cong 0'919$.
Por tanto, el valor de la integral dada es aproximadamente 2'220.

4) Calcular el valor de la integral impropia de segunda especie $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}} dx$ (el integrando tiene asíntota vertical en $x = \pi/4$).
Escribimos la integral como $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos^{-\frac{1}{3}} 2x\ dx$, debiéndose aplicar el cambio de variable $\boxed{2x = t}$, con lo cual $x = t/2$ y $dx = (1/2)dt$, para que el límite superior de integración pase a ser $\pi/2$: En efecto, $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x = \pi/4 \Rightarrow t = \pi/2$. Por tanto:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos^{-\frac{1}{3}} 2x\ dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos^{-\frac{1}{3}} t \cdot (1/2)\ dt = (1/4) \cdot B(p,q)$$

siendo $2p - 1 = 2$ y $2q - 1 = -1/3$, o sea $\boxed{p = 3/2}$ y $\boxed{q = 1/3}$.

Conclusión: La integral dada vale

$$(1/4) \cdot B(\tfrac{3}{2}\,,\,\tfrac{1}{3}) = \frac{\Gamma(3/2) \cdot \Gamma(1/3)}{4 \cdot \Gamma(11/6)} = \frac{(1/2) \cdot \Gamma(1/2) \cdot \Gamma(4/3)}{4 \cdot \Gamma(11/6) \cdot (1/3)} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(4/3)}{8 \cdot \Gamma(11/6)}$$

donde los valores de gamma en $4/3$ y en $11/6$ aparecen en la tabla dada (ver tabla en la pág. 2, donde obtenemos $\Gamma(4/3) \cong \Gamma(1'33) \cong 0'893$ y $\Gamma(11/6) \cong \Gamma(1'83) \cong 0'940$).
En conclusión, el valor de la integral dada es aproximadamente 0'631.

La transformación de Laplace

Ya dijimos en la introducción que una "transformación integral" está definida por una cierta integral (cuyo integrando incluye un parámetro s) y sirve para transformar unas funciones en otras funciones: Si se la aplicamos a una función $f(t)$ resulta como "transformada" otra función $F(s)$.

Una de las transformaciones integrales más importantes es la Transformación de Laplace, que se define así: Dada una función $f(t)$, continua en $[0, +\infty)$, "su transformada de Laplace" es la nueva función $\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)\, dt}$ (suponiendo convergente esta integral impropia de primera especie para ciertos valores de la nueva variable s).

O sea, la transformada viene definida por esa integral impropia (de primera especie porque hemos supuesto la continuidad de $f(t)$ en todo el intervalo de integración). La cual podrá ser convergente o no en función de los valores que demos al parámetro s. Los valores de s que hagan convergente la integral impropia, serán los elementos del dominio de existencia de la función $F(s)$, puesto que ésta tendrá un valor real para cada s elegido de ese modo.

Ejemplo 1: Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$.
Será $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at}\, dt$ que podemos escribir $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt$. Pero sabemos que esta integral impropia solamente converge si $a - s < 0$, o sea para valores de s que cumplan $\boxed{s > a}$. Por tanto, el dominio de la función transformada $F(s)$ será el intervalo $(a, +\infty)$. Y para hallar la expresión final de $F(s)$ habrá que calcular el valor de la integral impropia anterior, suponiendo $a - s$ negativo:

$$F(s) = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u e^{(a-s)t} dt = \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^u = \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)u}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

Conclusión: La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(s-a)$ de dominio $(a\,, +\infty)$.

Ejemplo 2: Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^{\alpha}$.
Será $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^{\alpha}\, dt$. Si suponemos el parámetro s positivo y hacemos el cambio de variable $\boxed{u = st}$, será $t = \frac{u}{s}$ y $dt = \frac{du}{s}$, manteniéndose los mismos límites de integración. Entonces, $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{s}\, du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \int_0^{+\infty} u^{\alpha} \cdot e^{-u}\, du$ y si ahora recordamos la expresión de la función gamma y llamamos $p - 1$ al exponente α, el resultado obtenido es $F(s) = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(p) = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha + 1)$, siempre que sea $\alpha + 1 > 0$, para que la integral que define gamma sea convergente.
Conclusión: La transformada de Laplace de $f(t) = t^{\alpha}$, con $\alpha > -1$, es $F(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ de dominio $(0\,, +\infty)$. (Interesante resultado que relaciona la Transformación de Laplace con la función gamma).

De modo similar al ejemplo anterior se calculan las transformadas de otras funciones (hay relaciones muy grandes de transformadas publicadas). Así tenemos:

1) La transformada de la función constante 1 es $\boxed{1/s}$ para todo $s > 0$ (es el mismo resultado del ejemplo 1 anterior tomando $a = 0$) y la transformada de 0 es 0 (al intervenir la función 0 como factor en la integral que define $F(s)$, esta integral será cero para todo s).

2) La transformada de la función e^{at} es $\boxed{1/(s-a)}$ para todo $s > a$ (visto en el ejemplo 1).

3) La transformada de t^{α} es $\boxed{\Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}}$ para todo $s > 0$ (siendo $\alpha + 1 > 0$).

(Lo acabamos de ver en el ejemplo 2). (Si tomamos $\alpha = 0$ se tiene de nuevo que la transformada de 1 es $1/s$, pues $\Gamma(1) = 1$).

4) La transformada de $sen\, bt$ es $\boxed{b/(s^2 + b^2)}$ para todo $s > 0$ (b real cualquiera). (Si tomamos $b = 0$ se tiene de nuevo que la transformada de 0 es 0).

5) La transformada de $cos\, bt$ es $\boxed{s/(s^2 + b^2)}$ para todo $s > 0$ (b real cualquiera). (Si tomamos $b = 0$ se tiene de nuevo que la transformada de 1 es $1/s$).

6) La transformada de $sh\, bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$ (seno hiperbólico de bt) es la función $\boxed{b/(s^2 - b^2)}$ para todo $s > |b|$ (b real cualquiera).

7) La transformada de $ch\, bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ (coseno hiperbólico de bt) es la función $\boxed{s/(s^2 - b^2)}$ para todo $s > |b|$ (b real cualquiera).

8) La transformada de la "función escalón" $U(t - a)$ es $\boxed{e^{-as}/s}$ para todo $s > 0$ (siendo $a \geq 0$).

Nota: La "función escalón" $U(t - a)$ se define a trozos así: Vale 0 para $t < a$ y vale 1 para $t \geq a$.
Aunque esta función no es continua en $[0\,, +\infty)$ cuando es $a > 0$, la única discontinuidad que posee es una "discontinuidad de salto finito" en $t = a$, lo cual no impide la existencia de cualquier integral definida donde intervenga la función $U(t - a)$ en su integrando e incluya al punto $t = a$ en su intervalo de integración. En efecto, en la Sección 4.2 se dijo que siempre existen las integrales definidas de funciones con un número finito de puntos de discontinuidad en su intervalo de integración, si estas discontinuidades son solamente de los tipos "evitable" o "de salto finito".
Por tanto, si es $a > 0$, la integral definida $\int_0^u e^{-st} \cdot U(t - a)\, dt$ existirá para todo u mayor que 0 y su límite cuando $u \to +\infty$ será la transformada de Laplace de $U(t - a)$. Pero la integral impropia, $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot U(t - a)\, dt$, se reduce en este caso a la nueva integral impropia $\int_a^{+\infty} e^{-st} \cdot 1\, dt$ que nos da el valor e^{-as}/s (porque $\int_0^a e^{-st} \cdot U(t - a)\, dt = \int_0^a e^{-st} \cdot 0\, dt$ vale cero). Luego la transformada de Laplace de $U(t - a)$, para $a > 0$, es e^{-as}/s.
Y cuando es $a = 0$, la función $U(t)$ coincide con la función 1 en todo $[0\,, +\infty)$, luego la transformada de $U(t)$ será igual a la transformada de 1 que es $1/s$ (valor de e^{-as}/s cuando es $a = 0$).

A continuación, enunciamos las principales propiedades de la Transformación de Laplace, representando dicha transformación por la letra $\mathcal{L}$ y representando la transformada de una función continua $f(t)$ por $F(s)$ y la transformada de una función continua $g(t)$ por $G(s)$:

1) Linealidad de la transformación: $\mathcal{L}\,[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$

2) Principio de traslación: $\mathcal{L}\,[e^{at} \cdot f(t)] = F(s - a)$

3) Cambio de escala: $\mathcal{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$, para $a > 0$

4) Transformada de la derivada n-sima:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n}(t)\right] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - s^{n-3} \cdot f''(0) - \cdots - f^{(n-1}(0)$$

5) Derivada n-sima de la transformada: $\mathcal{L}\left[(-t)^n \cdot f(t)\right] = F^{(n}(s)$

6) Transformada de la integral indefinida que se anula en 0: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s}$

7) Transformada del <u>producto de convolución</u>: $\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right] = F(s) \cdot G(s)$

8) $\mathcal{L}\left[f(t) \cdot U(t-a)\right] = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\left[f(t+a)\right]$ para $a \geq 0$

9) Si $f(t)$ es <u>periódica</u> de periodo T, entonces: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \cdot \int_0^T e^{-sx} \cdot f(x)\, dx$

<u>Nota 1</u>: Se define el "producto de convolución" $f(t) * g(t)$ como $\int_0^t f(x) \cdot g(t-x)\, dx$ o bien como $\int_0^t g(x) \cdot f(t-x)\, dx$ (las dos integrales con el parámetro t coinciden).

<u>Nota 2</u>: La propiedad 4 para $n = 1$ nos dice que $\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)}$. Para $n = 2$ nos dice que $\boxed{\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)}$. Para $n = 3$ nos dice análogamente que $\boxed{\mathcal{L}\left[f'''(t)\right] = s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)}$. Y así sucesivamente…

Ejemplo de aplicación de la Transformación de Laplace

<u>La Transformación de Laplace es muy útil, por ejemplo, en la resolución de "ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n" que sean "lineales con coeficientes constantes"</u>, las cuales son de la forma siguiente:

$$a_n \cdot y^{(n} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1} + \cdots + a_3 \cdot y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(t) \quad \textbf{(1)}$$

donde los coeficientes a_n , a_{n-1} , …. , a_3 , a_2 , a_1 y a_0 son constantes reales; <u>la función incógnita es $y(t)$</u>, situada en el último término del primer miembro, correspondiendo las expresiones $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1}, y^{(n}$ a sus derivadas sucesivas hasta la de orden n (para que la ecuación sea de orden n, el coeficiente a_n debe ser diferente de cero); <u>suponemos que el orden n es dos o mayor que dos</u>, pues las ecuaciones diferenciales lineales de orden uno se resuelven fácilmente (se verá en la Sección 7.3).
Pero para utilizar la Transformación de Laplace en la resolución de estas ecuaciones, <u>deben conocerse los valores en $t = 0$ de la solución buscada y de sus derivadas sucesivas hasta la de orden $n - 1$</u> (esos valores se conocen como <u>"condiciones iniciales de la solución"</u>). Y hay muchos problemas de Física, de Química, de Biología, etc… que tienen justamente como <u>modelos matemáticos</u> ciertas ecuaciones diferenciales del tipo descrito (normalmente de orden dos o de orden tres).

<u>Ejemplo</u>: La ecuación diferencial $\boxed{y'' - 3y' = 2 \cdot cos\, t}$ es del tipo mencionado y se demuestra que <u>tiene todas sus soluciones incluidas en la expresión</u>

$$y = -\frac{cos\, t}{5} - \frac{3\, sen\, t}{5} + C_1 + C_2 \cdot e^{3t}$$

donde C_1 y C_2 son valores reales arbitrarios (en la Sección 7.5 se explican los detalles). Si damos, por ejemplo, las "condiciones iniciales" $y(0) = 2/5$ e $y'(0) = 0$, se tiene la solución única

$$y_0 = \frac{1}{5} \cdot (-\cos t - 3 \operatorname{sen} t + 2 + e^{3t})$$

que responde a la forma dada anteriormente, tomando los valores $C_1 = 2/5$ y $C_2 = 1/5$ (omitimos los detalles del cálculo de esas constantes, pues se explicarán en la Sección 7.5). De todos modos, esta solución obtenida puede comprobarse derivándola dos veces y sustituyéndola con sus dos derivadas en la ecuación diferencial dada, la cual se convierte en una identidad (y además se comprueba inmediatamente que cumple las dos "condiciones iniciales" que hemos dado).

¿Cómo podríamos llegar directamente a esta conclusión usando la Transformación de Laplace? (En la Sección 7.6 se explicará esto nuevamente con más detalle, pero lo adelantamos aquí como un primer ejemplo de aplicación de la transformación de Laplace).

Razonamos del modo siguiente:
Al ser $y_0(t)$ la solución desconocida de la ecuación diferencial (la que queremos obtener), se tendrá que cumplir $\boxed{y_0''(t) - 3y_0'(t) \equiv 2 \cdot \cos t}$ (pues al sustituir la función solución y sus derivadas en la ecuación diferencial, ésta se convierte en una identidad). Entonces, aplicando la Transformación de Laplace a ambos miembros de la identidad anterior, tendrá que ser $\boxed{\mathcal{L}\,(y_0'' - 3y_0') \equiv \mathcal{L}\,(2 \cdot \cos t)}$ **(2)**

Pero, en virtud de las propiedades 1 (linealidad de $\mathcal{L}$) y 4 (transformadas por $\mathcal{L}$ de la derivada primera y de la derivada segunda de una función), tenemos para el primer miembro de la identidad anterior:

$$\mathcal{L}\,(y_0'' - 3y_0') = \mathcal{L}\,(y_0'') - 3 \cdot \mathcal{L}\,(y_0') = [s^2 \cdot Y_0 - s \cdot y_0(0) - y_0'(0)] -$$
$$-3 \cdot [s \cdot Y_0 - y_0(0)] = (s^2 - 3s) \cdot Y_0 - (2/5) \cdot s + 6/5$$

donde estamos llamando Y_0 a la transformada de Laplace de y_0, además de haber sustituido $y_0(0)$ por el valor $2/5$ y haber sustituido $y_0'(0)$ por el valor 0 (condiciones iniciales dadas).
Y para el segundo miembro de la identidad **(2)** que habíamos obtenido, tenemos:

$$\mathcal{L}\,(2 \cdot \cos t) = 2 \cdot \mathcal{L}(\cos t) = \frac{2s}{s^2+1}$$

(linealidad de $\mathcal{L}$ y apartado 5 de la relación de transformadas en la pág. 8).
Por tanto, sustituyendo los dos resultados anteriores en la identidad **(2)** tendrá que ser:

$$\boxed{(s^2 - 3s) \cdot Y_0 - \frac{2s}{5} + \frac{6}{5} \equiv \frac{2s}{s^2+1}} \quad \textbf{(3)}$$

de donde podemos despejar Y_0 y nos queda: $\boxed{Y_0 \equiv \frac{2s^3-6s^2+12s-6}{5s \cdot (s-3) \cdot (s^2+1)}}$ (es decir, que hemos obtenido la transformada de Laplace de la solución desconocida y_0 que buscamos).

Por tanto, si aplicásemos la "Transformación Inversa de Laplace" $\mathcal{L}^{-1}$ a $Y_0(s)$ resultará la solución que buscamos $y_0(t)$ (al ser $\mathcal{L}(y_0) = Y_0$, tendrá que ser $\mathcal{L}^{-1}(Y_0) = y_0$).

Ahora bien, se demuestra matemáticamente que la "Transformación Inversa de Laplace" no sólo existe sino que también cumple la propiedad de linealidad. Con lo cual, si logramos descomponer la fracción que tenemos en una combinación lineal de otras más sencillas (con denominadores como los de las transformadas conocidas), **la aplicación de $\mathcal{L}^{-1}$ equivaldrá a usar las transformadas conocidas en sentido inverso**, para saber de qué funciones iniciales provienen.

Por tanto, nos conviene descomponer la fracción que define $Y_0(s)$ en fracciones simples (de modo análogo a como descomponíamos un integrando $P(x)/Q(x)$ en fracciones simples, para poder resolver la integral correspondiente).
Así quedaría $Y_0(s)$ de la siguiente manera: $\boxed{Y_0(s) = \frac{A}{5s} + \frac{B}{s-3} + \frac{Cs+D}{s^2+1}}$
con lo cual, por la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_0(s)] = \frac{A}{5} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + D \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

Es decir, tenemos ya la solución buscada: $\boxed{y_0(t) = \frac{A}{5} \cdot 1 + B \cdot e^{3t} + C \cdot cos\, t + D \cdot sen\, t}$

(ver relación de transformadas dadas en páginas 7 y 8).

Nos queda solamente calcular los valores de las constantes A, B, C y D de la anterior descomposición en fracciones simples (lo cual se hace por identidad de polinomios, como sabemos del cálculo de integrales de funciones racionales).

Hecho ese cálculo, identificando la expresión que teníamos de $Y_0(s)$ cuando la despejamos de la identidad **(3)** con la descompuesta en fracciones simples dada anteriormente, resultan $A = 2$, $B = 1/5$, $C = -1/5$ y $D = -3/5$. Luego la solución buscada será:

$$\boxed{y_0(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot e^{3t} - \frac{1}{5} \cdot cos\, t - \frac{3}{5} \cdot sen\, t = \frac{1}{5} \cdot (2 + e^{3t} - cos\, t - 3\, sen\, t)}$$

(la misma que habíamos dado al principio en la pág. 9).

El procedimiento anterior es general, siempre que se conozca la transformada del segundo miembro de la ecuación diferencial **(1)** (que habíamos llamado $f(t)$ en la expresión general) y que dicha transformada sea un cociente de polinomios (vemos en la tabla de transformadas que esto se cumple al menos cuando $f(t)$ es alguna de las funciones que siguen: $k \cdot e^{at}$, $k \cdot sen\, bt$, $k \cdot cos\, bt$, $k \cdot sh\, bt$ y $k \cdot ch\, bt$).

Así, dada la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes **(1)** y dadas unas condiciones iniciales que deba cumplir la solución desconocida $y_0(t)$:

1) Se establece la identidad que resulta de sustituir la solución buscada $y_0(t)$ en la ecuación diferencial dada.

2) Se aplica $\mathcal{L}$ a los dos miembros de la identidad anterior y usamos **su linealidad** (propiedad 1) y **las transformadas de las derivada sucesivas que aparezcan** (propiedad 4), con lo cual tendremos una nueva identidad donde aparece la función $Y_0(s)$, que es la transformada de Laplace de la solución buscada $y_0(t)$.

3) Se despeja $Y_0(s)$, lo cual es siempre posible porque la identidad anterior es de primer grado en esa función (debe quedar para $Y_0(s)$ una expresión racional de s).

4) Se descompone la expresión racional obtenida de $Y_0(s)$ en fracciones simples (determinando directamente los valores de las constantes que correspondan).

5) Se aplica finalmente $\mathcal{L}^{-1}$ a $Y_0(s)$ utilizando la descomposición anterior, teniendo en cuanta **su linealidad**, con lo cual resulta una expresión explícita de $y_0(t)$, en términos de las transformadas inversas de las fracciones simples que se hayan utilizado.

Nota: Para obtener esas transformadas inversas de las fracciones simples se tiene en cuenta lo siguiente: $\mathcal{L}^{-1}$ aplicada a $\frac{1}{s-a}$ nos dará $\boxed{e^{at}}$; $\mathcal{L}^{-1}$ aplicada a $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ nos dará $\boxed{e^{at} \cdot cos\, b\, t}$ (teniendo en cuenta la propiedad 2 de la Transformación $\mathcal{L}$, en la pág. 8) y $\mathcal{L}^{-1}$ aplicada a $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ nos dará $\boxed{e^{at} \cdot sen\, bt}$ (aplicando la misma propiedad 2 de la Transformación $\mathcal{L}$).

En el ejemplo anterior usamos estas dos últimas transformadas inversas con $a = 0$ y $b = 1$. Pero en otros casos, habrá que operar para poner las fracciones simples que tengamos en las formas indicadas (recuérdese que un polinomio de segundo grado con raíces imaginarias que esté en un denominador puede ponerse siempre como una suma de cuadrados).

Ejemplo: Una fracción simple como $\frac{3s-1}{s^2-s+1}$ se descompondrá de este modo antes de aplicarle la Transformada Inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\frac{3s-1}{s^2-s+1} = \frac{3s-1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+1} = \frac{3\cdot\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}-1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{3\cdot\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= 3\cdot\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 3\cdot\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

con lo cual, al aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ quedará:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s-1}{s^2-s+1}\right) = 3\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot sen\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)} \text{ (aquí } a = 1/2 \text{ y } b = \sqrt{3}/2\text{)}$$
