SERIES DE POTENCIAS

(Prerrequisitos: Series numéricas. Fórmula de Taylor de una variable)

Introducción

Hemos visto "series numéricas" en la Sección 4.7, donde sus "términos" son infinitos números reales que aparecen sumados. Pero podemos considerar también "series de funciones" cuyos términos sean funciones reales (de una o varias variables).

Así, en general, "las series de funciones de una variable" son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

donde las funciones reales de una variable real que intervienen deben tener un dominio común (para que existan valores de x donde todas esas funciones estén definidas).

Así, para cada valor $x = a$ en dicho dominio común, se tendrá una serie numérica cuyos términos son los valores en ese punto a de las infinitas funciones de la serie dada. Puede suceder entonces que dicha serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sea convergente o no lo sea, lo cual dependerá del valor a tomado. Pues bien, se llama "campo de convergencia" de la serie de funciones dada, al subconjunto A de su dominio común que esté formado por los diferentes puntos del mismo para los cuales las series numéricas correspondientes resulten convergentes.

O sea, que si $x = a$ está en el "campo de convergencia" A, la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ será convergente y tendrá un cierto valor $S(a)$, y si $x = a$ no está en A, la serie numérica anterior no será convergente (será divergente u oscilante), con lo cual el valor $S(a)$ no existirá. Lógicamente, al variar a en el "campo A de convergencia" de la serie de funciones dada, se obtendrán en general diferentes valores $S(a)$, pero para cada a habrá un solo valor. Por tanto, en dicho "campo A de convergencia" la serie de funciones estará definiendo **una nueva función real de variable real que podemos llamar $S(x)$**. Y se puede escribir

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \text{ para todo } x \text{ perteneciente al campo de convergencia A}$$

Ahora bien, en el caso llamado "series de potencias", que trataremos en esta Sección, las funciones dadas como términos de la serie de funciones serán de la forma general $\boxed{f_n(x) = a_n \cdot x^n}$ o bien, $\boxed{f_n(x) = a_n \cdot (x-h)^n}$, siendo en este caso el dominio común de todas las funciones dadas el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Por tanto, tendremos series de potencias con la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(donde suponemos conocidos los coeficientes reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$), en las cuales las sumas parciales de la serie son polinomios en la variable x de grados crecientes.

Y otras series de potencias serán de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-h)^n = a_0 + a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + a_3(x-h)^3 \ldots$$

con $h \neq 0$ fijo, donde sus sumas parciales también son polinomios en x, pero ordenados según potencias crecientes del binomio $(x-h)$.

Pues bien, todas estas series se pueden estudiar como "series numéricas" dependientes del parámetro real x. Y se tratarán, en general, como "series de términos positivos y negativos".

Intervalo de convergencia de una serie de potencias

Desde luego, las series del primer tipo dado anteriormente serán siempre convergentes para $x = 0$ y las del segundo tipo lo serán para $x = h$, siendo cero el valor de las correspondientes series numéricas. Y cuando la serie dada sea convergente para algún otro valor de x (distinto de 0 en el primer caso o distinto de h en el segundo caso), ocurre que su convergencia se dará siempre en un cierto intervalo centrado en $x = 0$ o $x = h$ (según el caso) al cual pertenecerá ese valor de x diferente de cero.

Pues bien, a ese intervalo se le llamará "intervalo de convergencia de la serie" (es lo que habíamos llamado "campo de convergencia" en general para una serie de funciones) y tendrá alguna de las cuatro formas siguientes $(-r , +r)$, $[-r , +r)$, $(-r , +r]$, $[-r , +r]$ o bien $(-\infty , +\infty)$ para las series de potencias del primer tipo, o bien, será $(h-r ,\ h+r)$, $[h-r , h+r)$, $(h-r , h+r]$, $[h-r , h+r]$ o bien $(-\infty , +\infty)$ para las series del segundo tipo. En ambos casos, el número real positivo r se llama "radio de convergencia de la serie" y cuando el intervalo sea $(-\infty , +\infty)$ diremos que el radio de convergencia es infinito. Por último, cuando la serie sólo converja en $x = 0$ o $x = h$ (según el caso) diremos que el radio de convergencia es cero. Además, en todos los casos restantes se cumple que la convergencia en el interior del intervalo de convergencia es "convergencia absoluta". Y cuando el intervalo de convergencia incluya algún extremo, la convergencia en el mismo podrá ser "absoluta" o ser "condicional" (ver estos conceptos en la Sección 4.7 "Series numéricas", que es fundamental para entender este tema).

En resumen, hay tres posibilidades respecto a r : $\boxed{r = 0, r > 0 \text{ o } r = +\infty}$. En el primer caso la serie sólo será convergente para $x = 0$ o $x = h$ (caso trivial, de poco interés práctico). En el segundo caso la serie será convergente en un intervalo acotado de longitud $2r$ y centrado en $x = 0$ o $x = h$, según el tipo de serie, siendo "absolutamente convergente", al menos, en el interior de dicho intervalo. Y en el tercer caso la serie será "absolutamente convergente" en todo $\mathbb{R}$.

Lo que interesa en la práctica es que el radio de convergencia de una serie de potencias no sea cero, con lo cual la función $S(x)$ definida por la serie tendrá como dominio un intervalo de cierta longitud o será todo $\mathbb{R}$, incluyendo entonces infinitos puntos. (Recuérdese lo dicho en la introducción sobre el conjunto A y la función $S(x)$).

El siguiente teorema indica cómo conocer el valor del radio de convergencia.

TEOREMA 1: Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-h)^n$.

1) Si el límite, cuando n tiende a $+\infty$, del cociente $|a_n/a_{n-1}|$ (o bien, el límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$) es cero, el radio de convergencia de la serie será $+\infty$.

2) Si alguno de los límites anteriores es $L > 0$, el radio de convergencia será $r = 1/L$.

3) Si alguno de los límites anteriores es $+\infty$, el radio de convergencia será cero.

SERIES DE POTENCIAS

Nota 1: Recuérdese de la Sección 3.8 que si existe el límite de $|a_n/a_{n-1}|$, existirá el límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ y ambos serán iguales, pero puede existir el segundo sin que exista el primero. En general, se recomienda intentar calcular el primer límite pues suele ser más sencillo y si éste no existe o es difícil, pasaremos a estudiar el segundo. Sin embargo, cuando $|a_n|$ pueda relacionarse con una cierta potencia de exponente n, es recomendable buscar directamente el límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$.

Nota 2: Sabemos ya que el intervalo de convergencia es todo $\mathbb{R}$ si r es $+\infty$ y es $[0\,,0]=\{0\}$ o bien es $[h\,,h]=\{h\}$ si r es cero. Pero si r es real positivo, no queda claro cuál es el intervalo de convergencia: Hay 4 posibilidades, pero como mínimo será el intervalo abierto $(-r\,,+r)$ o bien el intervalo abierto $(h-r\,,h+r)$, según la serie de que se trate. Pero además, en cada caso, tendremos que estudiar las series numéricas obtenidas para los valores de los dos extremos de ese intervalo abierto y, según que éstas series sean convergentes o no, incluiremos o no cada uno de dichos extremos en el intervalo de convergencia definitivo.

Ejemplo 1: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (en este caso hacemos variar n desde 1 en adelante pues $a_0=0$).

El límite de $|a_n/a_{n-1}|=n/(n-1)$ es 1. Por tanto, nos ha resultado $\boxed{r=\frac{1}{1}=1}$ y el intervalo de convergencia es entonces $(-1\,,1)$ como mínimo. Además: En el extremo $x=-1$ la correspondiente serie de valores es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n$, la cual no es convergente ya que $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\pm\infty$ (no cumple la condición necesaria de convergencia). Y en el extremo $x=1$ la serie de valores es $\sum_{n=1}^{\infty} n$, que tampoco converge por el mismo motivo, pues $\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie dada es definitivamente $(-1\,,1)$.

Ejemplo 2: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (recuérdese que $0!=1$).

El límite de $|a_n/a_{n-1}|=(n-1)!/n!=1/n$ es cero. Luego resulta $\boxed{\text{radio de convergencia } +\infty}$ y entonces el intervalo de convergencia será todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ (aquí hacemos variar n desde 1 en adelante pues a_n no existe para $n=0$).

En este caso aparece en $|a_n|$ una potencia de exponente n, luego buscamos el límite de $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ y recordando que la sucesión $\sqrt[n]{n!}$ es equivalente a la sucesión n/e, el límite anterior será $1/e$. Por lo tanto, resulta $\boxed{r=e}$ y el intervalo de convergencia es en principio $(-e\,,e)$.
En el extremo $x=-e$ resulta la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!\cdot e^n}{n^n}$. Veamos si cumple la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!\cdot e^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n/e)^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot e^n}{n^n}==\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sqrt{2\pi n}=\pm\infty$$

donde hemos usado la fórmula de Stirling (sustitución de la sucesión divergente $n!$ por la sucesión equivalente $(n/e)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$) . Por tanto, esta serie no converge. Y en el extremo $x=e$ resulta la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n}$ que tampoco converge pues el límite de su término general, calculado del mismo modo anterior, será $+\infty$. Conclusión: El intervalo de convergencia definitivo es $(-e\,, e)$.

Ejemplo 4: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$.

El límite de $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 5}$ es $1/5$, ya que $\sqrt[n]{n}$ tiende a 1 (como $\frac{n}{n-1}$). Luego el radio de convergencia es $\boxed{r = 5}$ y entonces el intervalo de convergencia será como mínimo $(-5\,, 5)$. En el extremo $x = -5$ resulta la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, puesto que $2n + 1$ es siempre impar. O sea, que la serie obtenida es la opuesta de la serie armónica y por tanto divergente a $-\infty$. Y en el extremo $x = 5$ resulta la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ que cumple las condiciones del Teorema de Leibniz y por tanto es convergente, pero no es "absolutamente convergente" (porque su serie de valores absolutos es la armónica), sino es "condicionalmente convergente". Conclusión: El intervalo de convergencia definitivo es $(-5\,, 5]$.

Ejemplo 5: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ (que es del segundo tipo dado al principio).

El límite de $|a_n/a_{n-1}| = \frac{(n-1)^2}{n^2}$ es 1. Luego el radio de convergencia es $\boxed{r = 1}$ y por tanto el intervalo de convergencia será en principio $(2-1\,, 2+1) = (1\,, 3)$. En el extremo $x = 1$ resulta la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, que cumple las condiciones del Teorema de Leibniz y por tanto es convergente; pero en este caso su serie de valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es también convergente (por ser la armónica general con $p = 2 > 1$); entonces, para $x = 1$ tenemos una serie "absolutamente convergente". Y en el extremo $x = 3$ resulta la misma serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es "absolutamente convergente". Conclusión: El intervalo de convergencia definitivo es $[1\,, 3]$.

Vemos ahora qué ocurre cuando derivamos todos los términos de una serie de potencias.

TEOREMA 2: Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define la función $S(x)$ en $(-r\,, +r)$ o en todo $\mathbb{R}$, la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$ (que resulta de derivar todos los términos de la serie dada) tiene el mismo radio de convergencia que la anterior y define en el mismo intervalo $(-r\,, +r)$ o en todo $\mathbb{R}$ (el que corresponda) la función derivada $S'(x)$.

Lo mismo vale para las series del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-h)^n$.

O sea, que si es $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)}$ para todo x en el intervalo $(-r\,, r)$ o en todo $\mathbb{R}$, se tendrá:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = S'(x)}$$

para todo x en el mismo intervalo $(-r\,,r)$ o en todo $\mathbb{R}$ (independientemente de que **alguna de esas dos series pudiese además ser convergente en alguno de los extremos de su intervalo de convergencia**, cuando el mismo sea un intervalo acotado). En efecto, puede ser convergente la primera serie en uno de esos extremos y no ser convergente la segunda serie en ese punto, o al revés, puede la segunda serie ser convergente en uno de los extremos de su intervalo de convergencia sin que sea convergente la primera serie en dicho punto.

Ejemplo: La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es absolutamente convergente en $(-1\,,1)$, ya que para la misma es $a_n = 1$ siempre, con lo cual el límite de $|a_n/a_{n-1}|$ será 1 y entonces $\boxed{r=1}$. Además, el valor de dicha serie es la función $S(x) = \frac{1}{1-x}$ en todo ese intervalo (por ser una serie geométrica de razón x). Con lo cual, en virtud del Teorema anterior, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ será absolutamente convergente en el mismo intervalo $(-1\,,1)$ y tendrá como valor la función $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ en todo ese intervalo. Y del mismo modo, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$ será una serie absolutamente convergente en $(-1\,,1)$ y tendrá valor $S''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Etc…

Veamos ahora qué ocurre cuando integramos todos los términos de una serie de potencias.

TEOREMA 3: Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define la función $S(x)$ en $(-r\,,+r)$ o en todo $\mathbb{R}$, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots$ (que resulta de integrar todos los términos de la dada) tiene el mismo radio de convergencia que la anterior y define en $(-r\,,+r)$ o en todo $\mathbb{R}$ (el que corresponda) la función antiderivada de $S(x)$ que dé valor cero para $x = 0$.

Lo mismo vale para una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-h)^n$. Y escribiendo la integral de a_0 como $a_0(x-h)$, resultará la función antiderivada de $S(x)$ que dé valor cero para $x = h$.

O sea, que si $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)}$ para todo x en el intervalo $(-r\,,r)$ o en todo $\mathbb{R}$, se tendrá

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = F(x)}$$

donde $\boxed{F'(x) = S(x)}$ para todo x en el mismo intervalo $(-r\,,r)$ o en todo $\mathbb{R}$, siendo $F(0) = 0$. Y análogamente, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-h)^n = S(x)$ en el intervalo $(h-r\,,h+r)$ o en todo $\mathbb{R}$, se tendrá $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-h)^{n+1} = F(x)$, donde $F'(x) = S(x)$ en el mismo intervalo, siendo $F(h) = 0$. Y esto, independientemente de que alguna de estas dos series pudiese ser convergente además en alguno de los extremos de su intervalo de convergencia (cuando el mismo sea un intervalo acotado).

Ejemplo: Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $(-1\,,1)$ por ser serie geométrica de razón x, luego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ será la antiderivada o la integral indefinida de $\frac{1}{1-x}$ en $(-1\,,1)$, que valga cero en $x = 0$. Entonces, como $\int \frac{1}{1-x}\, dx = -ln|1-x| + K$ para todo $x \neq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ valdrá $F(x) = -ln(1-x)$ en el intervalo $(-1\,,1)$. (Se ha quitado el valor absoluto de $1-x$, pues es positivo en ese intervalo y hemos tomamos $K = 0$ pues así $F(0) = 0$).

Y, de un modo análogo, si tomamos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ que vale $\frac{1}{1+x}$ en el intervalo $(-1\,,1)$ (por ser serie geométrica de razón – x), se tendrá que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ valdrá $F(x) = ln(1+x)$ en el intervalo $(-1\,,1)$. (No hemos puesto el valor absoluto a $1+x$, pues esa expresión es positiva en el intervalo $(-1\,,1)$ y hemos tomado la constante de integración cero pues así $F(0) = 0$).

Nota : Esta última serie $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ es muy importante y se llama "serie logarítmica", porque define la función $ln(1+x)$ en el intervalo $(-1\,,1)$ e incluso en el extremo $x = 1$ de dicho intervalo, como establece más adelante el Teorema de las pág. 8.

Entonces, hemos visto que cuando derivemos término a término o integremos término a término una serie de potencias, el intervalo abierto de convergencia absoluta no se altera, pero puede suceder que haya también convergencia (absoluta o condicional) en algún extremo de dicho intervalo para la nueva serie obtenida. no habiendo quizás convergencia para la serie original en ese mismo extremo. O bien, puede que no haya convergencia en algún extremo del intervalo de convergencia para la nueva serie, siendo la serie inicial convergente en dicho punto.

Por ejemplo, hemos visto que la serie obtenida por integración término a término a partir de $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ es $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$. La primera vale $\frac{1}{1+x}$ y la segunda vale $ln(1+x)$ en el intervalo abierto de convergencia de ambas que es $(-1\,,1)$. Sin embargo, la primera no converge en $x = -1$ ni en $x = 1$ (en el primer caso resulta $1+1+1+\cdots$ que es divergente a $+\infty$ y en el segundo caso resulta la serie oscilante $1-1+1-1+\cdots$). En cambio, la segunda serie no converge en $x = -1$ (resulta $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1}$ que es igual a $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, divergente a $-\infty$), pero **sí converge para $x = 1$** (resulta la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$, que cumple las condiciones del Teorema de Leibniz).

Resumiendo: Se puede operar con las series de potencias que tengan intervalos de convergencia no reducidos a un solo punto (multiplicándolas por una constante, sumándolas término a término, restándolas término a término o multiplicándolas entre sí como explicamos en la Sección 4.7 (se llama "producto de Cauchy de series"); también derivándolas término a término o integrándolas término a término). Por supuesto, esto podrá hacerse solamente en la parte común de sus intervalos abiertos de convergencia (si esta intersección no es vacía).

Series de MacLaurin y de Taylor

Supongamos que una serie de potencias tenga sumas parciales sucesivas iguales a los polinomios de MacLaurin o de Taylor de órdenes crecientes que correspondan a una cierta función $f(x)$ (la cual necesariamente tendrá que ser derivable infinitas veces en el punto $x = 0$ o bien $x = h$, al que se refieran los polinomios). O sea, supongamos que la serie tenga la forma

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

o bien que tenga la forma

$$f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2+\frac{f'''(h)}{3!}(x-h)^3+\cdots+\frac{f^{(n}(h)}{n!}(x-h)^n+\cdots$$

siendo f(x) una función que posea infinitas derivadas en x = 0 (en el caso anterior) o en x = h (en este último caso).

Observamos que la suma parcial que incluye a los cuatro primeros términos de la primera serie es "el polinomio de MacLaurin de orden 3" de la función $f(x)$:

$$P_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

y al agregar un término más tendremos "el polinomio de MacLaurin de orden 4", etc… Y, análogamente ocurre que las sumas parciales sucesivas de la segunda serie son "los polinomios de Taylor" correspondientes a f(x) en el punto x = h.

Supongamos ahora que una serie como las mencionadas anteriormente tenga radio de convergencia distinto de cero, con lo cual definirá una función $S(x)$ en su intervalo de convergencia (acotado o no acotado, pero no reducido a un solo punto). La pregunta fundamental ahora es la siguiente: ¿**Se podrá decir que $S(x)=f(x)$ para todo x del intervalo de convergencia**? **La respuesta es no, en general**. Pero para muchas funciones sucede que los valores de la serie y los valores de dicha función sí coinciden en todo el intervalo de convergencia o en un subintervalo I del mismo. En esos casos diremos que la serie dada es "el desarrollo en serie de MacLaurin" o "en serie de Taylor" (según el caso) de la función $f(x)$ en el intervalo I.

En general, sabemos que si $f(x)$ es derivable infinitas veces en $x=0$ (o en $x=h$), podemos escribir $\boxed{f(x)=P_n(x)+R_n(x)}$ para todo n, donde $P_n(x)$ es el polinomio de MacLaurin de orden n para $f(x)$ (o el de Taylor de igual orden en $x=h$) y donde $R_n(x)$ es el resto de MacLaurin de orden n para $f(x)$ (o el de Taylor de igual orden en $x=h$). Pero, al hacer crecer n, el polinomio $P_n(x)$ tenderá a la función $S(x)$ en el intervalo de convergencia, pues dicho polinomio es una suma parcial de la serie. Por tanto,

solamente será $f(x)=S(x)$ cuando el límite de $R_n(x)$ sea cero al tender n a infinito

lo cual dependerá de los valores de x en el intervalo de convergencia.

Ejemplo: El desarrollo de MacLaurin de orden n de la función $f(x)=e^x$, con resto en la forma de Lagrange, es $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$, donde c es un cierto valor intermedio entre 0 y x (dependiente de x y de n). (Ver Sección 3.7 "Fórmula de Taylor").

Por otro lado, la serie de potencias $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ cumple que sus sumas parciales sucesivas coinciden con los polinomios de MacLaurin de órdenes crecientes de $f(x)=e^x$, y tiene radio de convergencia $+\infty$, luego su intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$ (ver ejemplo 2 de la pág. 3).

¿Podrá decirse entonces que el valor de la serie anterior coincide con la función e^x para todo x real? En este caso la respuesta es sí, pues el resto de MacLaurin de orden n tiene límite cero cuando $n \to \infty$, para cualquier x real.

En efecto, $R_n(x) = \frac{e^c \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$ y para demostrar que tiene límite cero cuando $n \to \infty$, bastará ver que tiende a cero su valor absoluto, que es $\frac{e^c \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

a) Si $|x| < 1$ el numerador de la última expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$, pues el factor e^c (aunque sea variable con n) está acotado entre 0 y $e^{|x|}$ (que es fijo para cada x tomado) y el factor $|x|^{n+1}$ tiende a cero; además el denominador tiende a $+\infty$, luego $\boxed{\mathrm{R_n(x)\ tiende\ a\ cero}}$.

b) Si $|x| = 1$ queda en el numerador solamente e^c, que permanece acotado como hemos dicho, y el denominador tiende a $+\infty$, luego $\boxed{\mathrm{R_n(x)\ tiende\ a\ cero}}$.

c) Si $|x| > 1$ el numerador tiende siempre a $+\infty$, pues el factor e^c es fijo y diferente de cero para cada x elegido, mientras que $|x|^{n+1}$ tiende a $+\infty$; además el denominador tiende también a $+\infty$, pero el infinito $|x|^{n+1}$ es "de menor orden" que el infinito $(n + 1)!$, por grande que sea $|x|$. Por tanto, $\boxed{R_n(x) \text{ tiende a cero}}$.

Nota: No haremos más demostraciones como las de este ejemplo en lo sucesivo, pues vemos que pueden tener dificultad.

El siguiente Teorema incluye un conjunto de resultados notables, relativos a **desarrollos en serie de MacLaurin de funciones muy importantes** (de uso muy frecuente). La demostración de cada uno de esos resultados, como en el caso del ejemplo anterior, pasa por ver que los correspondientes restos de MacLaurin de orden n tienen límite cero cuando $n \to \infty$, siendo x cualquier valor del correspondiente "intervalo de validez" señalado en el Teorema.

TEOREMA: Se tienen los siguientes desarrollos en serie de MacLaurin de las funciones indicadas

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{(válido en todo } \mathbb{R})$$

$$sen\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{(válido en todo } \mathbb{R})$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad \text{(válido en todo } \mathbb{R})$$

$$ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad \text{(válido en } (-1\,,1])$$

$$sh\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{(válido en todo } \mathbb{R})$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad \text{(válido en todo } \mathbb{R})$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots \quad \text{(válido en } (-1\,,1))$$

$$arc\ sen\,x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \frac{105}{3456}x^9 + \cdots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

(válido en $[-1\,,1]$) (el término general vale para $n \geq 1$)

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 - \frac{105}{3456}x^9 - \cdots - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \cdots$$

(válido en $[-1\,,1]$) (el término general vale para $n \geq 1$)

$$arc\ tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad \text{(válido en } [-1\,,1])$$

Nota: Entendemos el símbolo $\binom{\alpha}{n}$ como la expresión $\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$ y como el valor 1 si $n = 0$. O sea: $\binom{\alpha}{0} = 1$; $\binom{\alpha}{1} = \alpha$; $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}$; $\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{6}$; etc… (donde α es un número real cualquiera diferente de cero; si es entero positivo, la serie se reduce al desarrollo del binomio de Newton correspondiente, pues los coeficientes anteriores son todos cero desde uno en adelante).

Observación general: Los desarrollos de las funciones impares solamente incluyen potencias impares de x (ejemplos: los de $sen\,x$, $sh\,x$, $arc\ sen\,x$ y $arc\ tg\,x$) y los desarrollos de las funciones pares sólo incluyen potencias pares de x (ejemplos: los de $\cos x$ y $ch\,x$). Cuando veamos en el desarrollo potencias pares e impares de x, la función no será par ni impar (ejemplos: los de e^x, $ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ y $arc\cos x$).

Nota: Estos desarrollos en serie son el fundamento de los valores que dan las calculadoras y los ordenadores para las funciones correspondientes en entornos del origen de coordenadas, tomando en cada caso sumas parciales suficientemente grandes de la serie, para que los errores cometidos sean muy bajos y permitan asegurar las cifras decimales que se den en pantalla.

Ejemplo 1: El comienzo del desarrollo en serie de MacLaurin de la función $\sqrt{1+x}$ es

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{384}x^4 + \cdots$$

válido en $(-1\,,1)$. Para obtenerlo se ha usado el desarrollo de $(1+x)^\alpha$ para $\alpha = 1/2$, con lo cual $\binom{\alpha}{2} = \frac{(1/2)\cdot(-1/2)}{2} = -\frac{1}{8}$; $\binom{\alpha}{3} = \frac{(1/2)\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{6} = \frac{3}{48}$; etc…

El desarrollo anterior permite calcular valores aproximados de raíces cuadradas de todos los números comprendidos entre 0 y 2, pues x debe cumplir $-1 < x < 1$. Así, por ejemplo, para calcular $\sqrt{0'8}$ tomaríamos $x = -0'2$ y tenemos $\sqrt{0'8} = 1 + \frac{1}{2}\cdot(-0'2) - \frac{1}{8}\cdot(-0'2)^2 + \cdots$. Tomando solamente los tres primeros términos de la serie, se obtiene la aproximación $\sqrt{0'8} \cong 0'895$, siendo 0'89442… el valor exacto de $\sqrt{0'8}$ (calculadora), es decir que ya hemos obtenido dos cifras decimales exactas en esta aproximación.

De igual modo, para obtener $\sqrt{1'5}$ tomaremos $x = 0'5$ y se tiene $\sqrt{1'5} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0'5 - \frac{1}{8}\cdot 0'5^2 + \frac{3}{48}\cdot 0'5^3 - \cdots$ y tomando otra vez los tres primeros términos indicados se obtiene la aproximación $\sqrt{1'5} \cong 1'21875$, siendo el valor exacto $\sqrt{1'5} = 1'22474\ldots$ (calculadora). Y si sumamos un término más de la serie se obtiene $\sqrt{1'5} \cong 1'2265625$, donde ya coinciden las dos primeras cifras decimales con las del valor exacto.

Nota 1: La serie de MacLaurin obtenida en este caso es también convergente para el valor $x = 1$, por resultar el número 1 más una serie alternada que cumple las condiciones del Teorema de Leibniz. Y se demuestra que el correspondiente resto de orden n tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, se tiene: $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} - \frac{15}{384} + \cdots}$, que sirve para calcular el valor de $\sqrt{2}$ con la exactitud que queramos, sumando suficientes términos de la serie alternada que comienza en $1/2$.

Nota 2: En el Teorema precedente se ha establecido que el desarrollo de $(1 + x)^{\alpha}$ es válido en $(-1\,,1)$, lo cual vale para cualquier α; pero al elegir un α particular, como en este ejemplo, puede ocurrir que el intervalo de convergencia incluya además alguno de sus extremos (en este caso pudimos incluir el extremo derecho).

Ejemplo 2: El comienzo del desarrollo en serie de MacLaurin de la función $1/(1 + x^2)$ es

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

válido en $(-1\,,1)$, donde hemos usado el desarrollo de $(1 + x)^{\alpha}$ para $\alpha = -1$ y luego se ha sustituido x por x^2 (si $|x| < 1$ también será $|x^2| < 1$). Obsérvese que ha resultado una serie geométrica de razón $-x^2$ (que tiene valor absoluto menor que 1); por tanto, dicha serie será convergente y sabemos que su valor es efectivamente $1/(1 + x^2)$.

Ejemplo 3: Obsérvese ahora que $1/(1 + x^2)$ es la derivada de la función $arc\ tg\ x$, luego si integramos término a término la serie anterior, se obtiene el desarrollo de MacLaurin de la función $arc\ tg\ x$, por tratarse de la primitiva de $1/(1 + x^2)$ que se anula para $x = 0$. (Recuérdese el Teorema 3 de la pág. 5). Entonces tenemos:

$$\boxed{arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$$

válida al menos en el intervalo $(-1\,,1)$ según dicho Teorema. Pero también se pueden incluir ambos extremos del intervalo, pues la serie converge en esos puntos al resultar alternada y cumplir las condiciones del Teorema de Leibniz (y además se demuestra que los correspondientes restos de MacLaurin de orden n tienden a cero cuando $n \to \infty$). Así que el intervalo de validez del desarrollo de la función $arc\ tg\ x$ es $[-1\,,1]$ como se indicó en el último Teorema dado.

Así será $arc\ tg\ 0'3 = 0'3 - \frac{0'3^3}{3} + \frac{0'3^5}{5} - \frac{0'3^7}{7} + \cdots$. Al ser esta serie alternada cumpliendo las condiciones del Teorema de Leibniz, para obtener una aproximación con error menor que 0'001, bastará sumar los términos iniciales hasta encontrar un primer término cuyo valor absoluto sea menor o igual que 0'001, que no incluiremos en la suma parcial. Se tiene $0'3^5/5 = 0'000486$, que es menor que 0'001. Por tanto, para obtener una aproximación con error menor que 0'001 (2 cifras decimales exactas y la tercera exacta o quizá alterada en una unidad), debemos efectuar la suma parcial de los dos primeros términos solamente, que es $0'3 - 0'3^3/3 = 0'291$. Pues bien, la calculadora nos da $0'291456\ldots$ como valor exacto de $arc\ tg\ 0'3$, lo cual nos permite ver que las tres cifras decimales del valor aproximado obtenido anteriormente son correctas; además, al ser negativo el último término sumado, la aproximación obtenida será por defecto (y vemos que lo es).

También para $x = 1$ se obtiene $\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}$, serie alternada que cumple las condiciones del Teorema de Leibniz y por tanto nos permitirá calcular el valor de $\pi/4$ con toda la exactitud que queramos (y al tener $\pi/4$ tendremos π).

Ejemplo 4: El comienzo del desarrollo en serie de MacLaurin de la función $1/\sqrt{1+x}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \frac{105}{384}x^4 - \cdots \quad \text{(válido en } (-1\,,1))$$

para lo cual se ha usado el desarrollo de $(1+x)^\alpha$ con $\alpha = -1/2$.

Si ahora sustituimos en el desarrollo anterior x por $-x^2$ (si $|x| < 1$ es también $|-x^2| < 1$), resulta el desarrollo en serie de la función $1/\sqrt{1-x^2}$, que es la derivada de $arc\ sen\ x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{48}x^6 + \frac{105}{384}x^8 + \cdots \quad \text{(válido en } (-1\,,1))$$

Entonces, integrando término a término el desarrollo anterior, resulta el desarrollo de MacLaurin de $arc\ sen\ x$, por tratarse de la antiderivada de $1/\sqrt{1-x^2}$ que se anula en $x = 0$. (Recuérdese el Teorema 3 de la pág. 5):

$$\boxed{arc\ sen\ x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \frac{105}{3456}x^9 + \cdots} \quad \text{(válido en } (-1\,,1))$$

Nota: Se demuestra que el intervalo de validez de este desarrollo incluye también ambos extremos, como se indicó en el último Teorema dado.

Ejemplo 5: Podemos también encontrar el desarrollo de la función $arc\ cos\ x$ integrando término a término la serie de MacLaurin de la función $-1/\sqrt{1-x^2}$, teniendo en cuenta que el valor del arco coseno en $x = 0$ es $\pi/2$.

En el ejemplo anterior vimos que $\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{48}x^6 + \frac{105}{384}x^8 + \cdots$

Por tanto, cambiando todo de signo e integrando término a término, resultará la antiderivada de $-1/\sqrt{1-x^2}$ que se hace cero para $x = 0$, la cual es $arc\ cos\ x - \frac{\pi}{2}$ (aplicando otra vez el Teorema 3 de la pág. 5). Así

$$arc\ cos\ x - \frac{\pi}{2} = -x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 - \ldots$$

Conclusión: $\boxed{arc\ cos\ x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 - \cdots}$ (válido en $(-1\,,1)$)

Nota: También se demuestra que el intervalo de validez de este desarrollo incluye ambos extremos, como se indicó en el último Teorema dado.

OTROS EJEMPLOS DE OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS:

SERIES DE POTENCIAS

Ejemplo 1: Operando con los desarrollos en serie de MacLaurin dados, comprobar la identidad $ch\, x \equiv \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$, para todo x real.

En efecto, tenemos $e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$ y $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$, ambos válidos para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo cual $e^{x}+e^{-x}=2+2\frac{x^{2}}{2!}+2\frac{x^{4}}{4!}+\cdots$ y entonces $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots$, pero este último desarrollo es el de la función $ch\, x$, válido para todo $x \in \mathbb{R}$. En conclusión: $\boxed{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \equiv ch\, x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Del mismo modo comprobar la identidad $sen\, 2x \equiv 2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x$, para todo x real.

Tenemos $sen\, x=x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120}-\cdots$ y $cos\, x=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}-\cdots$, válidos para todo x real, con lo cual haciendo el producto de Cauchy de ambas series resulta:

$$sen\, x \cdot cos\, x=x+\left(-\frac{x^{3}}{2}-\frac{x^{3}}{6}\right)+\left(\frac{x^{5}}{24}+\frac{x^{5}}{12}+\frac{x^{5}}{120}\right)+\cdots=x-\frac{2}{3}x^{3}+\frac{2}{15}x^{5}-\cdots$$

que al multiplicar por 2 nos da $2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x=2x-\frac{4}{3}x^{3}+\frac{4}{15}x^{5}-\cdots$, válido para todo x real.

Por otro lado, el desarrollo de *sen 2x* se obtendrá del desarrollo de *sen x* sustituyendo *x* por *2x*

$$sen\, 2x=2x-\frac{(2x)^{3}}{6}+\frac{(2x)^{5}}{120}-\cdots=2x-\frac{4}{3}x^{3}+\frac{4}{15}x^{5}-\cdots, \text{ válido para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Y se comprueba que ambos desarrollos coinciden. En conclusión: $\boxed{2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x \equiv sen\, 2x}$

Ejemplo 3: Podemos también comprobar la identidad $cos^{2}x+sen^{2}x \equiv 1$, para todo x real.

Multiplicamos por sí misma la serie $cos\, x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\cdots$ (producto de Cauchy) resultando

$$cos^{2}x=1+\left(-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{2}}{2}\right)+\left(\frac{x^{4}}{24}+\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{4}}{24}\right)+\left(-\frac{x^{6}}{720}-\frac{x^{6}}{48}-\frac{x^{6}}{48}-\frac{x^{6}}{720}\right)+\left(\frac{x^{8}}{40320}+\frac{x^{8}}{1440}+\frac{x^{8}}{576}+\frac{x^{8}}{1440}+\frac{x^{8}}{40320}\right)+\cdots=1-x^{2}+\frac{1}{3}x^{4}-\frac{2}{45}x^{6}+\frac{1}{315}x^{8}-\cdots$$

Y multiplicamos por sí misma la serie $sen\, x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots$ obteniendo

$$sen^{2}x=x^{2}+\left(-\frac{x^{4}}{6}-\frac{x^{4}}{6}\right)+\left(\frac{x^{6}}{120}+\frac{x^{6}}{36}+\frac{x^{6}}{120}\right)+\left(-\frac{x^{8}}{5040}-\frac{x^{8}}{720}-\frac{x^{8}}{720}-\frac{x^{8}}{5040}\right)+\cdots= x^{2}-\frac{1}{3}x^{4}+\frac{2}{45}x^{6}-\frac{1}{315}x^{8}+\cdots$$

Todo lo anterior es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Entonces, sumando ambos desarrollos resulta claramente $cos^2x + sen^2x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De donde resulta la identidad.

Ejemplo 4: Comprobar la identidad $arc\ sen\ x + arc\ cos\ x \equiv \pi/2$, para todo x $\in [-1\ ,1]$.

Basta sumar los desarrollos de las funciones $arc\ sen\ x$ y $arc\ cos\ x$. Obsérvese que en el desarrollo de $arc\ cos\ x$ empieza en $\pi/2$ e incluye a continuación todos los términos del desarrollo de $arc\ sen\ x$ cambiados de signo, luego la suma de las dos series da únicamente $\pi/2$, lo cual es válido para todo $x \in [-1\ ,1]$ (dominio de las dos funciones). De aquí resulta la identidad.

Además, se pueden comprobar fácilmente, usando los respectivos desarrollos en serie de Mac-Laurin y aplicando el Teorema 2 de la pág. 4, que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente: La derivada de e^x es e^x; la derivada de $sen\ x$ es $cos\ x$; la derivada de $cos\ x$ es $-sen\ x$; la derivada de $sh\ x$ es $ch\ x$, y la derivada de $ch\ x$ es $sh\ x$. Y ambién se comprueba que la derivada de $ln(1+x)$ es $(1+x)^{-1}$ para todo $x \in (-1\ ,1)$.

Finalmente, en virtud del Teorema 3 de la pág. 5, cuando no se conozca la integral indefinida de una función $f(x)$ pero sí se conozca el desarrollo en serie de potencias de dicha función (con radio de convergencia no nulo), puede obtenerse el resultado de la integral desconocida integrando término a término la serie de $f(x)$ y sumándole una constante de integración.

Por ejemplo, una integral que no admite solución como función elemental sabemos que es la de e^{x^2}. Pero del desarrollo de e^x podemos obtener el de e^{x^2} sustituyendo x por x^2 :

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \ \text{(válido en todo } \mathbb{R}\text{).}$$

con lo cual:

$$\int e^{x^2}\, dx = K + x + \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots \ \text{(válido en todo } \mathbb{R}\text{)}$$

donde K representa el valor de cada primitiva en $x = 0$.
