SERIES NUMÉRICAS

(Prerrequisitos: Sucesiones numéricas. Integrales impropias de una variable)

Introducción

En la introducción de la Sección 3.8 ("Sucesiones numéricas") indicábamos que las palabras "sucesión" y "serie" se usan en el lenguaje común como sinónimos (se habla por ejemplo de una cola como una sucesión de personas o como una serie de personas, indistintamente). Pero allí explicábamos que, matemáticamente, una sucesión de números reales es una función real de variable real cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales: A cada natural n le corresponde como imagen un número real $f(n)$, representado como sabemos por una letra minúscula con subíndice n (por ejemplo a_n) al que se llama "término general" de la sucesión, de modo que para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc…, esas imágenes son el "primer término" a_1 , el "segundo término" a_2 , el "tercer término" a_3 , etc… de dicha sucesión, los cuales suelen escribirse en forma ordenada

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.. , a_n, \ldots. \quad \text{o bien, con notación abreviada } \{a_n\}$$

Y decíamos también en esa introducción que en Matemáticas "una serie numérica" es la suma indicada de los infinitos términos de una cierta sucesión numérica. Así, de la sucesión anterior se obtiene la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, representada abreviadamente por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (donde los "términos de la sucesión" pasan a ser "términos de la serie").

Lo dicho anteriormente puede extenderse a sucesiones y a series de números complejos, pero en todo lo que sigue cuando digamos "serie" o "serie numérica" nos estaremos refiriendo a las de números reales solamente.

Lo que principalmente interesa de una sucesión numérica es **su límite** cuando la variable independiente n tiende a $+\infty$. El límite puede ser un número real (caso de las "sucesiones convergentes") o bien puede ser infinito (caso de las "sucesiones divergentes"). Y cuando el límite no exista la sucesión se llama "oscilante".

¿Y qué interesa de una serie? **El valor de la suma indicada en su propia expresión**, si es que este valor existe (el cual no puede obtenerse de un modo directo, pues no acabaríamos nunca de sumar). La idea entonces es obtener la suma de un número finito, cada vez mayor, de términos sucesivos de la serie dada, y ver si los valores de dichas "sumas parciales" se aproximan a algún valor real único a medida que vamos agregando nuevos sumandos. Si es así, la serie se llamará "convergente" y "su valor" será ese número real único al que tienden sus sumas parciales sucesivas (o sea, que **el valor de una serie es el límite de la sucesión formada por sus sumas parciales**). Pero puede suceder que esas sumas parciales no se aproximen a un valor real, sino que sus valores absolutos crezcan llegando a superar a cualquier número positivo dado, con lo cual la serie se llamará "divergente" y no tendrá valor numérico, o bien puede suceder que las sumas parciales tengan un comportamiento diferente a los dos anteriores, con lo cual la serie no será "convergente" ni "divergente" y en ese caso diremos que es "oscilante" (también sin valor numérico).

Finalmente, como en este tema se van a usar mucho las relaciones que hay entre "los órdenes" de **varias sucesiones divergentes notables**, estudiadas en la Sección 3.8, recordaremos aquí el resumen correspondiente que allí aparece, donde el símbolo $\ll$ significa "de menor orden que" (o sea que la sucesión que aparece a la izquierda de este símbolo tiene menor orden que la sucesión que aparece a su derecha): $\boxed{log_a n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n}$ (donde $a > 1$ y $p > 0$)

En todos los casos, el cociente de una sucesión divergente de menor orden entre otra de mayor orden tiene límite cero, y si invertimos numerador y denominador de dicho cociente, el límite será infinito. Y recuérdese también que cuando el cociente de dos sucesiones divergentes tenga límite finito diferente de cero, las sucesiones se llamaban "del mismo orden". Y en particular, llamábamos "equivalentes" a dos sucesiones cuyo cociente tiene límite 1, con lo cual ambas tendrán el mismo límite (finito o infinito) o ambas serán oscilantes con un comportamiento cada vez más parecido a medida que n crece.

Notaciones básicas

Como hemos dicho, dada una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, podemos considerar la serie de números reales que tiene esos mismos términos, como la expresión

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \text{ (o en forma resumida: } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

(a_1 es "el primer término de la serie", a_2 es "el segundo término de la serie" y así sucesivamente, siendo a_n "el término general de la serie" porque los representa a todos, donde a_n es la imagen del número natural n en una cierta función, que puede definirse "de forma explícita" con una sola expresión o con varias expresiones, o bien puede definirse "de forma recurrente").

A su vez, para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consideraremos "la sucesión de sumas parciales asociada" $\{S_n\}$, definida en forma recurrente así: $\boxed{S_n = S_{n-1} + a_n}$, siendo $\boxed{S_1 = a_1}$. O sea, que tendremos $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, etc… De manera que el término general será entonces en forma explícita: $\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$.

Pues bien, "el carácter" de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (es decir, su condición de "convergente", "divergente" u "oscilante") viene dado por "el carácter" de su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$. Y en caso de ser ésta "convergente", llamamos "valor de la serie" al límite de S_n cuando $n \to +\infty$. O sea, que si $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$, podemos escribir $\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$.

También, si el límite de S_n fuese infinito ($+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$), la serie se llamará "divergente", y si ese límite de S_n no existiese como número real ni como infinito, la serie se llama "oscilante". En ambos casos, la serie no tiene valor.

Ejemplo 1: Sea la serie cuyos términos son todos iguales ($k + k + k + \cdots$). Aquí es $a_n = k$ para todo n (definición explícita con una sola expresión).

Si es $k = 0$, la serie es convergente de valor cero, pues en este caso es $S_n = 0$ para todo n. Si es $k > 0$, la serie es divergente a $+\infty$, pues es $S_n = n \cdot k$, con lo cual $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Y si es $k < 0$, la serie es divergente a $-\infty$, pues sigue siendo $S_n = n \cdot k$, pero ahora $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.

Ejemplo 2: Sea la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a^{n-1} = b + b \cdot a + b \cdot a^2 + \cdots + b \cdot a^{n-1} + \cdots$ así llamada porque sus términos están en progresión geométrica de razón a. Aquí es $a_n = b \cdot a^{n-1}$ para todo n (definición explícita con una sola expresión; pero podría haberse definido "de forma recurrente" como $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot a}$, para todo $n > 1$, y $\boxed{a_1 = b}$).

Se demuestra fácilmente que la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica es igual al último término multiplicado por la razón, menos el primero, dividido el resultado anterior entre la razón menos 1 (suponemos la razón diferente de 1, porque en caso contrario la serie tendría todos sus términos iguales, como el ejemplo anterior, y supondremos también $b \neq 0$ porque de lo contrario la serie sería $0 + 0 + 0 + \cdots$ ya vista anteriormente). Por tanto, en este caso

$$S_n = b + b \cdot a + b \cdot a^2 + \cdots + b \cdot a^{n-1} = \frac{(b \cdot a^{n-1}) \cdot a - b}{a-1} = \frac{b \cdot a^n - b}{a-1}$$

Veamos el límite de S_n :
Si $-1 < a < 1$, el límite de a^n será cero, con lo cual el límite de S_n será $\boxed{b/(1-a)}$ (serie convergente de valor el número anterior).
Si $a > 1$, el límite de a^n será $+\infty$ y el límite de S_n será $+\infty$ (si $b > 0$) o será $-\infty$ (si $b < 0$) (serie divergente a $+\infty$ o a $-\infty$).
Si $a < -1$, el límite de a^n será $\pm\infty$ y el límite de S_n también será $\pm\infty$ (serie divergente a $\pm\infty$),
Y si $a = -1$, la serie será $b - b + b - b + \cdots$ cuyas sumas parciales son b , 0 , b , 0 , b , ….. (entonces, como hemos supuesto $b \neq 0$, tenemos una sucesión de sumas parciales oscilante, luego la serie será oscilante).

Ejemplo 3: Una serie podría ser $a_1 + a_2 + \cdots + a_p + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$. O sea, que tenga todos sus términos iguales a cero desde uno en adelante ($a_n = 0$, para todo $n > p$). Y en este caso la serie es convergente y equivale a la suma de sus términos no nulos (suma de un número finito de sumandos). En efecto, sus sumas parciales a partir de S_p son todas iguales, luego la sucesión S_n será convergente de límite S_p y entonces la serie será convergente de valor $S_p = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$.

Ejemplo 4: Una serie puede ser $1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 0 + 4 + \cdots + a_n + \cdots$, siendo $a_n = \frac{n+1}{2}$, si n es impar y $a_n = 0$, si n es par (definición explícita "a trozos", con dos expresiones, del término general). Obsérvese que si n es impar, $n + 1$ será par y entonces el cociente $(n + 1)/2$ será un entero, que coincide con el valor que aparece en la serie, como puede comprobarse fácilmente (así $a_1 = \frac{1+1}{2} = 1$; $a_3 = \frac{3+1}{2} = 2$; $a_5 = \frac{5+1}{2} = 3$, etc…). Para esta serie se tiene $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 3$, $S_4 = 3$, $S_5 = 6$, $S_6 = 6$, $S_7 = 10$, $S_8 = 10$, etc… Vemos que las sumas parciales crecen como las sumas de números naturales consecutivos, luego serán cada vez mayores, llegando a superar a cualquier número positivo K que queramos dar. Luego esta serie es divergente a $+\infty$.

TEOREMA FUNDAMENTAL: Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se cumple necesariamente $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$ (es decir, condición necesaria para que una serie sea convergente es que su término general tenga límite cero cuando $n \to \infty$).

Pues al ser la serie convergente, se tendrá $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, con lo cual también tendrá que ser $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$. Pero entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = L - L = 0$.

NOTA IMPORTANTE: La condición dada en el Teorema anterior no es suficiente para la convergencia. O sea, puede ser $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y no ser convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Un ejemplo notable es la llamada "serie armónica" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente a pesar de que el límite de su término general sea cero. En efecto, su suma parcial S_n es $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ y en la Sección 3.8 vimos que la suma anterior es una sucesión equivalente a la sucesión de término general $log_e n$ (logaritmo neperiano de n), lo cual implica que tienen el mismo límite. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, pues $\lim_{n\to\infty} log_e n = +\infty$.

Veremos más adelante otros casos similares a éste, donde la serie no es convergente a pesar de que el límite de su término general sea cero.

SERIES NUMÉRICAS

Propiedades generales de las series

Las series numéricas tienen las siguientes propiedades generales:

1) Si se añaden o suprimen un número finito de términos a una serie (términos consecutivos o no consecutivos), la misma no cambia su carácter y, en caso de ser convergente, su valor se verá modificado en la suma de los términos añadidos o suprimidos.

2) Si se multiplican todos los términos de una serie por un mismo número real $k \neq 0$, resulta otra serie con el mismo carácter: En caso de convergencia, su valor será el de la serie inicial multiplicado por k, y en caso de divergencia de la primera a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, la nueva serie será divergente respectivamente a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$ si $k > 0$ y será divergente respectivamente a $-\infty$, $+\infty$ o $\pm\infty$ si $k < 0$.

3) En una serie que sea convergente o divergente, se puede sustituir por su suma efectuada cualquier grupo finito de términos consecutivos, repitiendo esta operación todas las veces que se quiera, sin que la nueva serie cambie de carácter (ni cambie de valor en caso de convergencia).

   Nota: Pero si en una serie oscilante se hace lo dicho anteriormente, la nueva serie puede haber cambiado de carácter (por ejemplo, si en la serie oscilante $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ sumamos cada dos términos consecutivos todas las veces, resulta la serie $0 + 0 + 0 + \cdots$ que es convergente).

4) Si se suman (o restan) todos los términos que ocupan igual lugar de dos series convergentes, la nueva serie formada con dichas sumas (o restas) será convergente y su valor será la suma (o resta) de los valores de las dos series dadas.
   O sea, si se tiene $A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ y se tiene $B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$, se tendrá $A + B = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots$ y se tendrá $A - B = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots$
   Si una de las series sumadas (o restadas) es divergente y la otra es convergente, la suma (o resta) de ambas será divergente.
   Y si las dos series sumadas (o restadas) son divergentes, la nueva serie puede tener cualquier carácter, con algunas excepciones importantes: Si las dos series dadas divergen a $+\infty$ la resultante de sumarlas divergerá a $+\infty$; si las dos series dadas divergen a $-\infty$ la resultante de sumarlas divergerá a $-\infty$, y si una de las dos series dadas diverge a $+\infty$ y la otra diverge a $-\infty$, la diferencia de ambas será divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$, según el orden en que las restemos: Simbólicamente lo podemos expresar $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$ así como $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$).

Series de términos positivos

Son un tipo muy importante de series, pues el estudio de otros tipos se reduce muchas veces a éstas, como veremos más adelante. No se estudian las series de términos negativos porque una de este tipo puede considerarse el producto de la constante -1 por una serie de términos positivos, luego el carácter de ésta determinará el carácter de aquélla, según establece la propiedad 2 anterior.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE ESTE TIPO DE SERIES: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada $\{S_n\}$ será **estrictamente creciente**. Hay entonces **dos únicas posibilidades para su carácter**: O bien, dicha sucesión está acotada superiormente y entonces será convergente (por el Teorema Fundamental de las Sucesiones Monótonas, visto en la Sección 3.8), con lo cual la serie también lo será, o bien $\{S_n\}$ no está acotada superiormente y entonces será divergente a $+\infty$, con lo cual la serie también lo será.

Por tanto, una serie de términos positivos será siempre convergente (con un valor positivo) o será divergente a $+\infty$.

Ejemplo 1: La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ es de términos positivos convergente, por ser una serie geométrica de razón $1/2$ (ver ejemplo 2 de la pág. 2). Su valor es $\frac{1}{1-1/2}=2$, pues en este caso es $b=1$ y $a=1/2$. Aquí el límite del término general es cero, como es obligatorio en cualquier serie convergente.

Ejemplo 2: La serie $1+1+1+\cdots+1+\cdots$ es de términos positivos claramente divergente a $+\infty$, pues $S_n=n$ (aquí el límite del término general de la serie es 1, luego no cumple la condición necesaria de convergencia y entonces sólo podía ser divergente).

Ejemplo 3: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n}$ es de términos positivos divergente a $+\infty$, pues $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$ (diferente de cero). (Al no cumplir la condición necesaria de convergencia, tiene que ser divergente).

Ejemplo 4: La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(\pi/4)^n$ es convergente, pues es geométrica de razón $a=\pi/4$, cumpliéndose $-1<\frac{\pi}{4}<1$ (ver ejemplo 2 en pág. 2). En este caso es $b=3$ y por tanto el valor de la serie es $\frac{3}{1-\frac{\pi}{4}}$.

Ejemplo 5: La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}$ es divergente a $+\infty$, pues no cumple la condición necesaria de convergencia, ya que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1\neq 0.$

IMPORTANTE: Como las series de términos positivos que cumplen la condición necesaria de convergencia pueden ser convergentes o divergentes, hace falta algún criterio que determine su carácter.

Hay varios criterios al respecto y, según sea el término general de la serie, se aplicarán unos u otros. A continuación damos esos criterios con muchos ejemplos de su uso.

CRITERIO GENERAL DE COMPARACIÓN: Si dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ cumplen la condición $\boxed{a_n\leq b_n}$ para todo n, la primera se llama "minorante" de la segunda y la segunda se llama "mayorante" de la primera. Pues bien, si la mayorante es convergente, la minorante también lo será. Y si la minorante es divergente, la mayorante también lo será.

Nota: Este Criterio también es válido si la condición $a_n\leq b_n$ se cumple solamente desde un cierto $n>1$ en adelante (pues si suprimimos de las dos series los términos iniciales que no cumplen la condición $a_n\leq b_n$, las nuevas series obtenidas tendrán el mismo carácter que las iniciales, como dijimos en la propiedad 1 de la pág. 3).

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ se llama serie armónica general. La serie armónica es el caso particular que corresponde a $p = 1$ y sabemos que es divergente. Si tomamos un $p < 1$, será $n^p < n$ para todo $n > 1$, luego se tendrá $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ también para todo n mayor que 1 (para $n = 1$ los valores coinciden). Con lo cual, la serie armónica general para un $p < 1$ será "mayorante" de la serie armónica. Y como ésta última es divergente, la otra también lo será por el Criterio General anterior.
Por tanto, hay infinitas series armónicas que son divergentes y en todas ellas ocurre que el límite de su término general es cero (ocurre para los infinitos valores de p positivos menores que 1).
En cambio, para $p > 1$ la serie armónica general es "minorante" de la serie armónica ($n^p > n$ si $n > 1$, luego $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n}$ desde el segundo término en adelante), pero al ser ésta divergente no podemos concluir nada a través del anterior Criterio General. Veremos en la pág. 10, con otro criterio, que la serie armónica general es convergente para todo $p > 1$).

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es "minorante" de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, pues se sabe que la sucesión divergente n^n es de mayor orden que la sucesión $n!$ (ver pág. 1). En el ejemplo 1 del Criterio de D'Alembert (más abajo) veremos que la última serie nombrada es convergente, luego la primera también será convergente por el Criterio General dado.

Ejemplo 3: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log_e(n+e)}{n}$ es de términos positivos pues $log_e(n+e) > log_e e = 1$ para todo n, y además es "mayorante" de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente, luego también será divergente a $+\infty$ por el anterior Criterio General.

CRITERIO DE D'ALEMBERT o del cociente: Si en una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ el límite del cociente a_n/a_{n-1} es un número real L, se tiene que dicha serie es convergente cuando $L < 1$; dicha serie es divergente cuando $L > 1$, y no puede asegurarse su carácter si $L = 1$ (caso de duda). Además, si el límite de a_n/a_{n-1} es $+\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es divergente.

Nota: Jean le Rond D'Alembert fue un matemático francés del siglo XVIII.

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ cumple la condición necesaria de convergencia ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$), pero además el cociente $a_n/a_{n-1} = (n-1)!/n! = 1/n$ tiene límite cero (menor que 1), luego la serie es convergente por el Criterio anterior.

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ no cumple la condición necesaria de convergencia, luego será divergente por ese motivo. Y el Criterio del Cociente nos dice lo mismo, ya que $a_n/a_{n-1} = 3$ luego su límite es 3 (mayor que 1).

Ejemplo 3: La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sabemos que es divergente. Pero el Criterio del Cociente no nos dice nada en este caso, ya que $a_n/a_{n-1} = (n-1)/n$, luego su límite es 1 (caso de duda).

Ejemplo 4: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2}$ cumple la condición necesaria de convergencia y el cociente $a_n/a_{n-1} = (3^{n-1}-2)/(3^n-2) = (3^{-1} - 2 \cdot 3^{-n})/(1 - 2 \cdot 3^{-n})$ tiene límite 3^{-1} (menor que 1), luego la serie dada es convergente. (Obsérvese que si el denominador del término general fuese 3^n solamente, la serie dada sería geométrica de razón $1/3$, pero tal como está no es serie geométrica).

Ejemplo 5: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ cumple la condición necesaria de convergencia, porque $n!$ es divergente de mayor orden que n^p para cualquier p positivo, por grande que este sea (ver pág. 1), con lo cual a_n tiende a cero. Y si p es cero o negativo, n^p vale 1 o tiende a cero, luego también a_n tendrá límite a cero.

Aplicamos el Criterio de D'Alembert: El cociente a_n/a_{n-1} es en este caso

$$\frac{n^p \cdot (n-1)!}{(n-1)^p \cdot n!} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^p \cdot \frac{1}{n}$$

que tiene límite $1^p \cdot 0 = 0$ (menor que 1), luego la serie es convergente.

CRITERIO DE CAUCHY o de la raíz: Si en una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ es un número real L, se tiene que dicha serie es convergente cuando $L < 1$; dicha serie es divergente cuando $L > 1$, y no puede asegurarse su carácter si $L = 1$ (caso de duda). Además, si el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ es $+\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es divergente.

Nota 1: Augustin Louis Cauchy fue un gran matemático francés del siglo XIX. Uno de los más importantes de ese siglo.

Nota 2: En la Sección 3.8 ("Sucesiones numéricas") se vio que para una sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos, al existir el límite de a_n/a_{n-1} también existirá el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ y ambos coinciden. Por ello, si para una serie de términos positivos funciona el Criterio de D'Alembert (existe el límite de a_n/a_{n-1}) es inútil aplicar el Criterio de Cauchy (ya que dirá lo mismo). Sin embargo, puede ocurrir que funcione el Criterio de la Raíz y no funcione el Criterio de la Razón (o sea más difícil de aplicar). Esto nos indica que debemos intentar aplicar el Criterio de Cauchy solamente cuando veamos que no existe el límite de la razón o sea difícil de calcular (en general, es aconsejable aplicar el Criterio de Cauchy inicialmente cuando el término general de la serie sea una potencia de exponente n).

Ejemplo 1: Vimos anteriormente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es convergente porque es "minorante" de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (cuya convergencia se comprobó por el Criterio de la Razón). Pero el Criterio de Cauchy nos dice directamente que la primera serie es convergente, ya que $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}$ tiene límite cero (menor que 1). Obsérvese que en este caso la aplicación directa el Criterio de la Razón es más incómoda, pues conduce al límite de $\frac{1/n^n}{1/(n-1)^{n-1}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, el cual es menos sencillo. Pero vemos que resulta $0 \cdot e^{-1} = 0$ (ver explicación en la Sección 3.8).

Ejemplo 2: A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$ le debemos aplicar inicialmente el Criterio de Cauchy, pues el término general es una potencia de exponente n de otra potencia de exponente n. Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ que tiene límite e^2 (explicado también en la Sección 3.8). Como ese límite es mayor que 1, la serie dada es divergente a $+\infty$.

Ejemplo 3: Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(log_e n)^n}$.

Al ser el término general una potencia de exponente n, aplicamos el Criterio de Cauchy. Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{log_e n}$ que tiene límite cero (menor que 1), luego la serie es convergente.

Ejemplo 4: Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$.

Al ser $n!$ infinito de mayor orden que 10^n (ver pág. 1), el límite del término general será $+\infty$, con lo cual no se cumple la condición necesaria de convergencia y la serie será divergente a $+\infty$. Y el Criterio de Cauchy nos da el mismo resultado, ya que $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{10}$ tiene límite $+\infty$, porque $\sqrt[n]{n!}$ es equivalente a n/e, que tiende a $+\infty$ (ver la Sección 3.8 donde se demuestra dicha equivalencia).

Ejemplo 5: Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$.

Se cumple la condición necesaria de convergencia: Pues si es $a < 1$, el numerador del término general tiende a cero mientras el denominador tiende a $+\infty$; si es $a = 1$, el numerador será siempre 1 y el denominador tiende a $+\infty$, y si es $a > 1$, tenemos un límite indeterminado ∞/∞ pero la sucesión divergente del numerador es de menor orden que la del denominador (ver pág. 1), luego el límite será cero. Apliquemos ahora el Criterio de Cauchy: Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}}$ que tiene límite cero, porque dijimos en el ejemplo anterior que $\sqrt[n]{n!}$ tiende a $+\infty$. Al ser el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ menor que 1, la serie es convergente.

Obsérvese que si el límite del cociente a_n/a_{n-1} es 1, el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ también será 1 y no salimos del caso de duda. Por eso hace falta otro criterio, como el Criterio de Raabe, para resolver estas dudas:

CRITERIO DE RAABE: Se aplica para salir del caso de duda del Criterio de D'Alembert. Cuando el límite de $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ es igual a uno, se calcula el límite del producto indeterminado $n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. Si dicho límite es mayor que 1 (incluido $+\infty$), la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; si dicho límite es menor que 1, la serie dada es divergente, y si ese límite es 1, subsiste la duda respecto al carácter de dicha serie.

Nota: Joseph Ludwig Raabe fue un profesor y matemático suizo del siglo XIX.

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ cumple la condición necesaria de convergencia. Le aplicamos el Criterio de D'Alembert: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n}}{\frac{1}{(n-1)^2+2(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+2n} = 1$ (caso de duda)

Le aplicamos ahora el Criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{n^2-1}{n^2+2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n} = 2$$

y como este límite es mayor que 1, la serie dada es convergente.

Ejemplo 2: En cambio, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que cumple la condición necesaria de convergencia y está en caso de duda por el criterio de D'Alembert, vuelve a dar caso de duda por el Criterio de Raabe. En efecto: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

y también $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$

(Recuérdese que la demostración de que la serie armónica es divergente la hicimos en la pág. 3 basándonos en que su suma parcial S_n es un infinito equivalente a $log_e n$).

Ejemplo 3: Sea la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$, cuyos primeros términos son $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots$. No es fácil conocer el límite de su término general. Pero le aplicamos el Criterio de D'Alembert: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}} = \frac{2n-1}{2n}$ y esta razón tiene límite 1 (caso de duda).

Aplicamos ahora el Criterio de Raabe: $n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = n\left(1 - \frac{2n-1}{2n}\right) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Y al ser este límite menor que 1, la serie dada es divergente.

Consideramos ahora una relación sencilla entre algunas series de términos positivos y ciertas integrales impropias de primera especie en el intervalo $[1, +\infty)$ cuyo integrando sea positivo. Y esa relación se produce cuando el término general a_n de la serie pueda interpretarse como el valor, para $x = n$, de la función integrando $f(x)$ de la integral impropia, o sea cuando $\boxed{a_n = f(n)}$ para todo n.

Pues bien, para esos casos, existe un criterio específico:

CRITERIO DE LA INTEGRAL: Sea una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyo término general a_n pueda considerarse la restricción al conjunto ℕ de los números naturales de una función real de variable real $f(x)$, que se mantenga continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$. Será entonces $a_n = f(n)$ para todo n. Se trata de conocer el carácter de la serie por comparación con el carácter de la integral impropia $\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$. Pues bien, si la integral impropia es convergente también lo será la serie. Y si la integral impropia es divergente también lo será la serie.

Nota: En la Sección 4.5 ("Integrales impropias") se explica que el carácter de la integral mencionada se obtiene hallando el límite cuando $t \to +\infty$ de la integral definida $\int_0^t f(x)\,dx$, la cual es una función de la variable real t. Si ese límite es un número positivo, la integral es convergente, y si ese límite es $+\infty$, la integral es divergente.

Ejemplo 1: Hemos dicho que la serie armónica general es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Y hemos establecido anteriormente que es divergente para todo valor del parámetro p que sea menor o igual a 1 (pág. 6), pero no sabemos qué pasará para valores de p mayores que 1.

Al observar que su término general puede considerarse restricción a ℕ de la función real de variable real $f(x) = \frac{1}{x^p}$, la cual es continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$, pues su derivada $\frac{-p}{x^{p+1}}$ es negativa en $(0, +\infty)$, podemos aplicarle el Criterio de la Integral a este caso.

Ahora bien, si es $p \neq 1$, se tiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{-p+1}-1}{-p+1}\right)$$

Y ese límite es $\frac{1}{p-1}$ cuando $p > 1$, pues $-p+1$ será negativo y entonces t^{-p+1} tiende a cero cuando $t \to +\infty$. Por tanto, tenemos que la serie armónica general es convergente cuando $p > 1$.

Pero también vemos que el límite anterior es $+\infty$ cuando $p < 1$, pues entonces será $-p+1$ positivo y la potencia t^{-p+1} tiende a $+\infty$. Luego hemos vuelto a probar que la serie armónica general es divergente cuando $p < 1$.

Y para $p = 1$ (caso de la serie armónica), la integral impropia es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} [\, ln|x| \,]_1^t = \lim_{t\to+\infty} ln\, t = +\infty$$

luego tenemos otra demostración de que la serie armónica es divergente.

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot log_e(n+1)}$ tiene un término general que es restricción a $\mathbb{N}$ de la función real de variable real $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot log_e(x+1)}$, la cual es continua, positiva y estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$, pues se puede comprobar que su derivada es negativa en $(0, +\infty)$.

Consideramos entonces la integral impropia de primera especie

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{(x+1)\cdot log_e(x+1)}\, dx$$

donde la integral definida del segundo miembro se resuelve fácilmente usando el cambio de variable $log_e(x+1) = u$, pudiendo comprobar que su resultado es $log_e\left(\frac{log_e(t+1)}{log_e 2}\right)$. Entonces, cuando $t \to +\infty$, su límite es $+\infty$, luego la integral impropia es divergente. Por tanto, la serie dada también será divergente por el Criterio anterior.

(Este es otro ejemplo de serie que cumple la condición necesaria de convergencia y sin embargo es divergente).

Hay también un Criterio de Comparación por Límite para series de términos positivos (basado en el Criterio General de Comparación que dimos en la pág. 5 y muy parecido al que dimos en la Sección 4.5 para integrales impropias de primera especie que tengan integrandos positivos), el cual dice lo siguiente:

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE: Dadas dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, podemos calcular el límite del cociente de sus términos generales a_n/b_n cuando n tiende a $+\infty$.

1) Si dicho límite es cero o un número positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también será convergente.

2) Si dicho límite es $+\infty$ o un número positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también será divergente.

Ejemplo: Tomemos las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$ para compararlas. Calculamos el límite de $\left(\frac{1}{3^n+5n}\right) / \left(\frac{7}{2^n}\right)$ que es $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{7\cdot(3^n+5n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{7\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{5n}{2^n}\right]} = 0$, porque $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ tiende a $+\infty$ (ya que la base de la potencia es mayor que 1) y $\frac{5n}{2^n}$ tiende a cero (por ser el denominador una sucesión divergente de mayor orden que la del numerador; ver pág.1). Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$ es una serie geométrica de razón $1/2$, luego es convergente. En conclusión, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ será también convergente por este Criterio de Comparación por Límite.

(La serie dada no es geométrica por culpa del sumando $5n$ del denominador, pero es minorante de la geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, que también converge por tener razón $1/3$, luego tenemos también la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ razonando de otro modo).

Pues bien, un caso particular importante del anterior Criterio de Comparación por Límite se obtiene tomando $b_n = 1/n^p$, con lo cual el cociente a_n/b_n se verá como el producto $\boxed{n^p \cdot a_n}$ y el criterio que se obtiene se llama Criterio de Pringsheim:

CRITERIO DE PRINGSHEIM (Comparación por límite entre una serie de términos positivos dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la serie armónica general $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$): Consiste en buscar el valor de p que haga **finito y diferente de cero** el límite del producto $\boxed{n^p \cdot a_n}$, en cuyo caso el carácter de la serie dada coincidirá con el que posea la serie armónica general para ese valor de p (como sabemos, si $p > 1$ es convergente y si $p \leq 1$ es divergente). Y si lo anterior no es posible, servirá **un valor de p mayor que 1 que haga cero** el límite de $\boxed{n^p \cdot a_n}$ (en cuyo caso la serie dada será convergente), o bien servirá **un valor de p menor o igual que 1 que haga "más infinito"** el límite anterior (en cuyo caso la serie dada será divergente).

Nota: Alfred Pringsheim fue un matemático polaco-alemán que vivió en la transición del siglo XIX al XX.

Ejemplo 1: Hallar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Cumple la condición necesaria de convergencia, luego puede ser convergente pero también puede ser divergente. El producto $n^p \cdot a_n$ es en este caso $\frac{n^p}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ y se comprueba fácilmente que para el valor de $p = 1/2$ el límite de la expresión anterior es $1/2$ (finito y no cero). Por tanto, la serie dada es divergente (como la armónica general para $p = 1/2$).

Ejemplo 2: Hallar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2 n}{n^2}$.

Cumple la condición necesaria de convergencia, pues al tender *n* a $+\infty$, el numerador de a_n oscila, pero permanece acotado entre 0 y 1, mientras su denominador tiende a $+\infty$, luego el límite del término general es cero. El producto $n^p \cdot a_n$ es en este caso $\frac{n^p \cdot sen^2 n}{n^2}$ y no hay un valor de p que haga finito y diferente de cero el límite de dicha expresión (si tomamos $p \geq 2$ el límite no existirá por la oscilación permanente de $sen^2 n$ y para $p < 2$ el límite será siempre cero). Tomando entonces un p entre 1 y 2 (por ejemplo $p = 3/2$) , se tendrá que **el límite es cero con un p mayor que 1**, luego la serie dada es convergente.

Ejemplo 3: Hallar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+log_e n}$.

Cumple la condición necesaria de convergencia. El producto $n^p \cdot a_n$ es en este caso $\frac{n^p}{1+log_e n}$ y tampoco hay un valor de p que haga finito y diferente de cero el límite de dicha expresión (para $p \leq 0$ el límite es cero y para $p > 0$ el límite será $+\infty$, pues tendremos la indeterminación ∞/∞ con el numerador de mayor orden que el denominador; ver pág. 1). Tomando entonces un p entre 0 y 1 (por ejemplo $p = 1/2$), se tendrá **límite "más infinito" con un p menor que 1**, luego la serie dada es divergente.

Ejemplo 4: Hallar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot \sqrt{3n^4-2}}$.

Cumple la condición necesaria de convergencia, pues el numerador del término general es un infinito (sucesión divergente) de orden 1 y su denominador es un infinito de orden 3. El producto $n^p \cdot a_n$ es $\frac{n^p \cdot (n+1)}{n \cdot \sqrt{3n^4-2}}$, siendo el numerador de orden $p+1$ y el denominador de orden 3. Para que el límite correspondiente sea finito y no cero, tendrá que ser $p+1=3$, luego deberá ser $p=2>1$. Por tanto, esta serie es convergente (como la armónica general para $p=2$).

Ejemplo 5: Hallar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log_e n}{n^3}$.

Cumple la condición necesaria de convergencia pues el denominador es un infinito de mayor orden que el numerador (ver pág. 1). El producto $n^p \cdot a_n$ es $\frac{n^p \cdot log_e n}{n^3}$. Si tomamos $p \geq 3$, el límite será $+\infty$, y si tomamos $p<3$, el límite será cero. Luego no hay un valor de p que nos haga el límite finito distinto de cero. Pero podemos tomar p entre 1 y 3 (por ejemplo $p=2$), de modo que **el límite será cero con un p mayor que 1**. Por tanto, la serie dada es convergente.

IMPORTANTE: A veces nos dan una serie de términos positivos sin la expresión de su término general, indicándonos solamente un número suficiente de términos iniciales (igual que ocurre al definir muchas sucesiones). Para poder saber el carácter de la serie en estos casos, debemos deducir la expresión de su término general basándonos en los valores de los términos dados, suponiendo que los demás siguen la misma ley de formación.

Esto también sucede muchas veces con otros tipos de series (no necesariamente de términos positivos).

Ejemplo 1: Determinar el carácter de la serie $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots$.

Observamos que todos los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 1 y denominadores que son cuadrados de ciertos números naturales que están en progresión aritmética de diferencia 3, siendo el primero 4. Por tanto, deducimos que el término general es $a_n=\frac{1}{(3n+1)^2}$ (debemos escribir la expresión que creamos y luego la debemos comprobar para $n=1$, $n=2$, $n=3$ y $n=4$, porque nos han dado los cuatro primeros términos de la serie). Vemos que esta serie es minorante de la serie armónica general $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente ($p=2>1$). Luego la serie dada también es convergente por el Criterio general de Comparación.

Ejemplo 2: Determinar el carácter de la serie $\frac{3}{\sqrt[3]{1}}+\frac{3}{\sqrt[3]{2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+\cdots$.

Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 3 y denominadores que son raíces cúbicas de números naturales sucesivos, comenzando en 1. Por tanto, el término general de esta serie será $a_n=\frac{3}{\sqrt[3]{n}}$. Vemos que la serie dada es mayorante de la serie armónica general $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, que es divergente ($p=1/3<1$). (También puede considerarse que es esa serie multiplicada por 3). Luego la serie dada es divergente por el Criterio General de Comparación.

Ejemplo 3: Determinar el carácter de la serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$.

Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 1 y denominadores que son el producto de n números naturales sucesivos (un factor en a_1, dos factores en a_2, tres en a_3, etc…), empezando siempre por el número $n+1$ (que es 2 para a_1, que es 3 para a_2, que es 4 para a_3, etc…). Por tanto, el término general de esta serie será $a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n}$. Vemos que es una serie que cumple la condición necesaria de convergencia. Le aplicamos el Criterio de la Razón, obteniendo

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot 2n}=\frac{n}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{4n-2}$$

que tiene límite cero (menor que 1). Por tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 4: Determinar el carácter de la serie $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{5}{4\cdot 6}+\cdots$.

Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a $n+1$ (2 para a_1, 3 para a_2, 4 para a_3, etc…) y denominadores que son productos de dos números naturales que se diferencian en 2 unidades, empezando siempre por el número n (1 para a_1, 2 para a_2, 3 para a_3, etc…). Por tanto, el término general de esta serie será $a_n=\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}$. Vemos que es una serie que cumple la condición necesaria de convergencia. Aplicándole el Criterio de Pringsheim obtenemos $n^p\cdot a_n=\frac{n^p\cdot(n+1)}{n^2+2n}$. Y vemos que para $p=1$ el límite será 1 (finito y no cero). Por consiguiente, esta serie es divergente (como la serie armónica).

Ejemplo 5: Determinar el carácter de la serie $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{5^4}+\cdots$.

Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a n y denominadores iguales a $(n+1)^n$. Por tanto, el término general de esta serie es $a_n=\frac{n}{(n+1)^n}$ (cumple la condición necesaria de convergencia). Le aplicamos el Criterio de Cauchy: Tenemos $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$, que tiene límite cero, pues $\sqrt[n]{n}$ tiende a 1 (tiene el mismo límite que $\frac{n}{n-1}$). En consecuencia, esta serie es convergente.

Propiedades de las series de términos positivos

Además de cumplir las cuatro propiedades generales de las series (ver pág. 4) excluyendo en ellas as posibilidades de ser divergente a $-\infty$, ser divergente a $\pm\infty$ o ser oscilante, las series de tér-minos positivos cumplen otras propiedades específicas (además de las mencionadas como crite-rio general de comparación, criterio del cociente, criterio de la raíz, criterio de Raabe, criterio de la integral, criterio de comparación por límite y criterio de Pringsheim) que son las siguientes:

1) Se puede alterar arbitrariamente el orden de los términos de una serie de términos positivos sin que se altere su carácter (ni su valor, en caso de ser convergente).

2) En una serie de términos positivos podemos descomponer cualquiera de sus términos en un número finito de sumandos positivos, repitiendo esta operación tantas veces como

queramos, sin que la serie cambie de carácter (ni cambie de valor en caso de convergencia).

3) Dadas dos series convergentes de términos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $\boxed{c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_2 + a_n \cdot b_1}$, es convergente y su valor es el producto de los valores de las dos series dadas.
Y si una de las dos series dadas es divergente (o lo son ambas), la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ será divergente.
Por tanto, la serie producto de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ comenzará así:

$$a_1 \cdot b_1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) +$$

$$+ (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) + (a_1 \cdot b_5 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_2 + a_5 \cdot b_1) + \cdots$$

Series alternadas

Son todas las que presenten términos positivos y negativos de forma alternativa. Por ejemplo, los términos de índice impar podrían ser positivos y los de índice par negativos. O viceversa.

TEOREMA DE LEIBNIZ: Toda serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo que los valores absolutos de sus términos formen una sucesión estrictamente decreciente y cumpliendo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, es convergente.

Además, cualquier suma parcial S_n de la serie representa una aproximación del valor total de la misma, con un error menor que el valor absoluto del primer término no incluido en S_n, que es a_{n+1}. Y dicha suma parcial es una aproximación por defecto del valor total de la serie si el término a_n (último incluido en S_n) es negativo y es una aproximación por exceso si dicho último término es positivo.

Nota: Gottfried Leibniz fue un gran matemático y filósofo alemán del siglo XVII. Se le considera junto al gran Isaac Newton, físico y matemático inglés del mismo siglo, fundador de lo que modernamente llamamos Cálculo Infinitesimal o Cálculo Diferencial e Integral, muchos de cuyos elementos ya existían en su época, obtenidos por otros matemáticos importantes de siglos anteriores y del mismo siglo.

Ejemplo 1: La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$ es alternada, donde los valores absolutos de sus términos forman una sucesión estrictamente decreciente y además cumple la condición necesaria de convergencia. Por tanto, es convergente, según el Teorema de Leibniz. Además la primera aproximación del valor total de la serie, con error menor que 0’1, será la suma parcial $S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$, puesto que el primer término no incluido en dicha suma es $-\frac{1}{10}$ de valor absoluto 0’1 (además esa aproximación S_9 es por exceso, ya que el último sumando que interviene en esa suma parcial es positivo). Pero entonces, la suma parcial S_{10} es la primera aproximación por defecto del valor total de la serie, con error menor que 0’1 (ya que su error es menor que $1/11$ y el último sumando que interviene en S_{10} es negativo). O sea, llamando S al valor total de la serie alternada, podemos escribir: $\boxed{S_{10} < S < S_9}$ (obsérvese que la diferencia $S_9 - S_{10}$ es el valor $1/10$; por eso $S_9 - S < 0'1$ y también $S - S_{10} < 0'1$). Calculados los valores de ambas sumas parciales, resulta: $S_9 \cong 0'74563492$ y $S_{10} \cong 0'64563492$. Así que, abreviando, el valor S de la serie alternada estará entre 0'645 y 0'746.

Del mismo modo, tomando una suma parcial que incluya suficiente número de términos podremos saber el valor de la serie con tanta precisión como queramos. Por ejemplo, para saber el valor de la serie anterior con error menor que una milésima (lo cual nos da una aproximación que tendrá al menos las dos primeras cifras decimales exactas y la tercera exacta o con diferencia de una unidad en más o en menos respecto de la exacta) calcularíamos el valor de $S_{999} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{999}$ (si quisiésemos una aproximación por exceso) o el valor de $S_{1000} = S_{999} - \frac{1}{1000}$ (si quisiésemos una aproximación por defecto). Calculadas las sumas parciales anteriores resulta $S_{999} = 0'6936474\ldots$ así como $S_{1000} = 0'6926474\ldots$, luego un valor aproximado de la serie dada puede escribirse como 0'69, con todas sus cifras exactas (recuérdese que en el párrafo anterior dijimos que ese valor estaría entre 0'645 y 0'746).

EN GENERAL: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es alternada cumpliendo las condiciones del Teorema de Leibniz, para obtener una aproximación de su valor con error menor que un ϵ positivo dado, buscaremos el primer término de la serie que tenga valor absoluto menor o igual a ϵ y tomaremos como aproximación de la serie la suma parcial que incluya hasta el término anterior al encontrado.

Ejemplo 2: Sea la serie alternada $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ (obsérvese que el primer valor de n que se usa en el sumatorio es 2 y no 1). Los denominadores crecen constantemente (pues n crece mucho más rápido que $\sqrt{n}$), luego los valores absolutos de los términos de la serie forman una sucesión estrictamente decreciente y además se cumple la condición necesaria de convergencia, ya que $n - \sqrt{n}$ tiende a $+\infty$. Por tanto, en virtud del Teorema de Leibniz, la serie es convergente. Y si nos piden una aproximación de su valor S con error menor que 0'01, buscamos el primer término de la serie cuyo valor absoluto sea menor o igual a $1/100$, lo cual se cumplirá cuando $n - \sqrt{n} \geq 100$. Se puede comprobar que esto ocurre a partir de $n = 111$ inclusive (en efecto, $|a_{111}| = \frac{1}{111-\sqrt{111}} \cong 0'00995 < 0'01$; en cambio $|a_{110}| = \frac{1}{110-\sqrt{110}} \cong 0'01005$ no es menor que 0'01). Por tanto, podemos decir que:

$$\boxed{S \cong \sum_{n=2}^{100} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{4-\sqrt{4}} - \frac{1}{5-\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{100-\sqrt{100}}}$$

siendo esta aproximación por exceso, ya que el último término incluido es positivo. Y para obtener aproximación por defecto en menos de 0'01, agregaríamos el término siguiente que es $-\frac{1}{101-\sqrt{101}}$

Ejemplo 3: La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ es alternada pero no cumple las condiciones de la hipótesis del Teorema de Leibniz, pues los valores absolutos de sus términos forman la sucesión $1, 1, 1, 1, \ldots$ (constante), luego no es estrictamente decreciente, y además el término general, que en este caso es $a_n = (-1)^{n+1}$, no tiene límite cuando $n \to \infty$. Por tanto, no puede ser convergente. Pues bien, si analizamos las sumas parciales sucesivas tenemos $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, etc… Luego la serie es oscilante, pues la sucesión S_n no tiene límite.

Series de términos positivos y negativos

Se trata de series que tienen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, intercalados en cualquier orden, lo cual incluye a las series alternadas como un caso particular.

Si una serie tuviese solamente un número finito de términos negativos, la descompondremos en la suma de una cierta cantidad de sus términos iniciales (donde queden incluidos todos sus términos negativos) más la serie de términos positivos restante (que determinará el carácter convergente o divergente a $+\infty$ de la serie dada). Y si una serie tuviese solamente un número finito de términos positivos, la descompondremos en la suma de una cierta cantidad de sus términos iniciales (donde queden incluidos todos sus términos positivos) más la serie de términos negativos restante (que es el producto de $k=-1$ por la serie de términos positivos que forman sus valores absolutos, la cual determinará el carácter convergente o divergente a $-\infty$ de la serie dada).

Por tanto, en general, en una auténtica serie de términos positivos y negativos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, podremos considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que forman sus términos positivos y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ que forman los valores absolutos de sus términos negativos (ambas de términos positivos). Pues bien, dada una suma parcial S_n de la serie dada, con n suficientemente grande, existirán números naturales n_1 y n_2 de forma que $S_n = S'_{n_1} - S''_{n_2}$, donde $n = n_1 + n_2$, siendo S'_{n_1} una cierta suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y siendo S''_{n_2} una cierta suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (estamos suponiendo que en la suma S_n de la serie dada hay n_1 términos positivos y n_2 términos negativos). Además, cuando $n \to +\infty$ ocurrirá que $n_1 \to +\infty$ y también $n_2 \to +\infty$.

Pero entonces tenemos el siguiente RESUMEN de situaciones posibles:

1) Si las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son convergentes de valores B y C, será
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n_1\to\infty} S'_{n_1} - \lim_{n_2\to\infty} S''_{n_2} = B - C$$
y la serie dada es convergente de valor $B - C$.

2) Si la primera serie es divergente a $+\infty$ y la segunda es convergente, será $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ y la serie dada es divergente a $+\infty$.

3) Si la primera es convergente y la segunda es divergente a $+\infty$, será $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ y la serie dada es divergente a $-\infty$.

4) Si ambas series son divergentes a $+\infty$, el límite de S_n estará en la indeterminación $\infty - \infty$ y puede suceder cualquier cosa con el carácter de la serie dada.

Nota 1: En el caso 1) de convergencia de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama "incondicionalmente convergente", pues alterando el orden de sus términos sigue siendo convergente y sigue teniendo el mismo valor $B - C$. Ya que ese cambio de orden entre sus términos implicará cambio de orden entre los términos de alguna de las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o cambio de orden en ambas (que son de términos positivos), con lo cual no se alterará el carácter de ambas ni sus respectivos valores B y C, como se dijo en la propiedad 1 de la pág. 14.

Nota 2: En el caso 4) de divergencia de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **podría ser convergente** solamente si se cumple la condición necesaria $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, lo cual obliga a que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y a que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Pero esto no tiene por qué ocurrir. Y en caso de convergencia, se dirá que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es "condicionalmente convergente", pues alterando el orden de sus términos podría perderse la convergencia o podría cambiar el valor de la serie.

De hecho, en este último caso de "convergencia condicional", cambiando convenientemente el orden de los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, puede lograrse otra serie que tenga una suma prefijada (la que queramos), que sea divergente a $+\infty$, que sea divergente a $-\infty$ o que sea oscilante, de muchos modos posibles (ver la Nota del ejemplo 4 de la página siguiente).

Ejemplo 1: La serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{49}+\cdots$ no es alternada, pero es de términos positivos y negativos. La serie de sus términos positivos es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (convergente, por ser la armónica general con $p=2>1$) y la serie de los valores absolutos de sus términos negativos es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (divergente, por ser la armónica), luego la serie dada es divergente a $-\infty$ (caso 3) del resumen de la página anterior).

Ejemplo 2: La serie $1^{-3/2}+2^{-3/2}-3^{-3/2}-4^{-3/2}+5^{-3/2}+6^{-3/2}-7^{-3/2}-\cdots$ no es alternada, pero es de términos positivos y negativos. La serie de sus términos positivos es $\frac{1}{1^{3/2}}+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{5^{3/2}}+\frac{1}{6^{3/2}}+\cdots$ (convergente, por ser minorante de la serie armónica general con $p=3/2>1$) y la serie de los valores absolutos de sus términos negativos es $\frac{1}{3^{3/2}}+\frac{1}{4^{3/2}}+\frac{1}{7^{3/2}}+\frac{1}{8^{3/2}}+\cdots$ (convergente, por ser también minorante de la serie armónica general con $p=3/2$), luego la serie dada es convergente ("incondicionalmente convergente": caso 1) del resumen de la página anterior).

Ejemplo 3: La serie $1/4-3/6+5/8-7/10+9/12-11/14\ldots$ es alternada, pero no cumple la condición necesaria de convergencia, ya que su término general es $(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2n+2}$ y el mismo no tiene límite cuando $n\to\infty$ (los términos impares tienden a 1 y los términos pares tienden a -1). Por tanto, esta serie no puede ser convergente. La serie de sus términos positivos es $1/4+5/8+9/12+\cdots$, de término general $b_n=\frac{4n-3}{4n}$ (que tiene límite 1, luego esta serie es divergente a $+\infty$) y la serie de los valores absolutos de sus términos negativos es $3/6+7/10+11/14+\cdots$, de término general $c_n=\frac{4n-1}{4n+2}$ (que también tiene límite 1, luego esta serie también es divergente a $+\infty$). Entonces, la serie dada está en el caso 4) del resumen de la página anterior y es oscilante, ya que sus sumas parciales aumentan y disminuyen sucesivamente en valores cada vez más próximos a 1.

Ejemplo 4: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$ es alternada y cumple las condiciones del Teorema de Leibniz, luego es convergente. La serie de sus términos positivos es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$, luego es divergente a $+\infty$ por serlo la armónica. Y la serie de los valores absolutos de sus términos negativos es $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$ de término general $c_n=\frac{1}{2n-1}$ y por el Criterio de Pringsheim resulta ser divergente a $+\infty$ (el límite de $n^p\cdot c_n=\frac{n^p}{2n-1}$ es $1/2$, finito y no cero, para $p=1$). Por tanto, las dos series $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ son divergentes (caso 4) del resumen de la página anterior). Sin embargo, en este caso la serie no es oscilante como en el ejemplo anterior, pues al tender a cero ambos términos generales, las sumas parciales aumentan y disminuyen sucesivamente en cantidades cada vez menores, estabilizándose alrededor de un cierto número real, que es el valor de la serie. Esta serie es "**condicionalmente convergente**".

NOTA IMPORTANTE: Si quisiésemos obtener una serie convergente de valor prefijado $S>0$ a partir de la serie dada anteriormente (mediante cambio de orden de sus términos), tomaríamos inicialmente suficientes términos positivos consecutivos de la misma, con el orden que tenían, hasta que su suma fuese mayor que S (no más de los necesarios para esto, si es que se necesitan pues S puede ser un valor pequeño); luego empezaríamos a agregar términos negativos consecutivos, con el orden que tenían, hasta que la nueva suma parcial llegue a ser menor que S (tampoco tomaríamos más de los necesarios); a continuación volveríamos a agregar términos positivos consecutivos que no hubiésemos tomado anteriormente (en el mismo orden y no más de los necesarios) de forma que esa tercera suma parcial vuelva a superar el valor S; etc… De este modo, la sucesión de las nuevas sumas parciales conseguidas se irán aproximando al valor S prefijado, estando cada vez más cerca de dicho valor (porque a medida que avancemos en este proceso, tanto los términos positivos como los términos negativos que agreguemos son cada vez más pequeños en valor absoluto, por tender todos a cero).

Y de un modo similar se puede proceder si tomásemos S cero o negativo. (Si el valor prefijado S fuese negativo, habrá que comenzar tomando términos negativos hasta obtener una suma parcial inferior a S, para luego agregar términos positivos en cantidad suficiente, etc…). (Y si el valor prefijado fuese $S = 0$, el primer término positivo ya nos daría una suma parcial superior a S, al cual agregaríamos términos negativos, etc…).

Así mismo, podremos reordenar los términos de la serie dada para que resulte una serie divergente a $+\infty$, para que resulte una serie divergente a $-\infty$ o para que resulte una serie oscilante (como decíamos en el recuadro de la Nota 2 de la pág. 17).

Por ejemplo, si quisiésemos una nueva serie que fuese divergente a $+\infty$, tomaríamos inicialmente suficientes términos positivos consecutivos hasta que su suma supere por ejemplo al número 10 (no más de los necesarios); luego incluiremos suficientes términos negativos consecutivos hasta que la suma parcial obtenida sea menor que 10 (no más de los necesarios); a continuación volvemos a agregar suficientes términos positivos consecutivos hasta que la nueva suma parcial supere el número 100 (no más de los necesarios); etc… Así la sucesión obtenida de sumas parciales llegará a superar $10, 100, 1000$, etc… con lo cual tendrá límite $+\infty$, pues siguiendo así, a partir de alguna suma parcial, todas llegarán a superar a cualquier número positivo K por grande que este sea.

Y de modo análogo se procede para lograr que la serie sea divergente a $-\infty$, buscando una primera suma parcial menor que -10, agregando algunos términos positivos para subir de -10 y luego agregando negativos hasta obtener una suma parcial menor que -100, etc…

Y para lograr una nueva serie que sea oscilante a partir de la dada, con sumas que oscilen alrededor de cualquier valor K, elegimos un cierto $H > 0$ y, tomando los términos iniciales de la serie dada que nos convenga (todos positivos o todos negativos según el signo de $K + H$), buscaremos una primera suma parcial superior a $K + H$; luego agregaremos suficientes términos negativos nuevos de la serie dada para llegar a una suma parcial menor que $K - H$; a continuación agregaremos nuevos términos positivos para llegar a otra suma parcial superior a $K + H$; luego agregaremos otra vez nuevos términos negativos para llegar a una suma parcial menor que $K - H$; etc… Así la sucesión obtenida de sumas parciales no tendrá límite, pues quedará oscilando indefinidamente entre valores reales cada vez más cercanos a $K - H$ y $K + H$ (que distan entre sí $2H > 0$).

Otro procedimiento muy utilizado para analizar el carácter de una serie de términos positivos y negativos es considerar la nueva serie formada por los valores absolutos de todos los términos de la dada, en el mismo orden que estaban. Al respecto, tenemos el siguiente Teorema:

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA ABSOLUTA: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y negativos. Si su serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, la serie dada también será convergente (se le llama “absolutamente convergente”).

Y si la serie de valores absolutos es divergente a $+\infty$ (la serie dada se dice “absolutamente divergente”), no puede asegurarse el carácter de la serie dada.

En efecto, al ser convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, serán necesariamente convergentes las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (formada por los términos positivos de la serie dada) y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (formada por los valores absolutos de sus términos negativos de la serie dada), pues sus respectivas sumas parciales serán menores que ciertas sumas parciales suficientemente avanzadas de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (las que incluyan todos los términos de las anteriores), pero éstas últimas estarán acotadas superiormente por el valor de esta serie de valores absolutos, con lo cual las sucesiones de sumas parciales de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ también estarán acotadas superiormente por ese mismo valor y entonces dichas series serán convergentes, de valores respectivos B y C. Pero, según el apartado 1) del resumen de la pág. 17, la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos y negativos dada (la llamábamos "incondicionalmente convergente") y su valor será $B - C$.

Por tanto, vemos que "absolutamente convergente" implica "incondicionalmente convergente".

Y recíprocamente, si la serie dada es "incondicionalmente convergente", tendrá que estar en el apartado 1) del resumen de la pág. 17 y entonces ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serán convergentes de valores B y C respectivamente, con lo cual la serie de los valores absolutos será también convergente (ya que las sumas parciales de esta última serán el resultado de sumar entre sí sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, con lo cual su límite será $B + C$).

Por tanto, vemos también que "incondicionalmente convergente" implica "absolutamente convergente".

CONCLUSIÓN IMPORTANTE: Las denominaciones "convergencia absoluta" y "convergencia incondicional" son equivalentes.

En cambio, si la serie de valores absolutos diverge, necesariamente alguna de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ será divergente, luego estaremos en los apartados 2), 3) o 4) del resumen de la pág. 17 y entonces la serie dada será divergente a $+\infty$ (apartado 2), o la serie dada será divergente a $-\infty$ (apartado 3) o bien no puede asegurarse el carácter de la serie dada (apartado 4). Y en este último caso cabe la posibilidad de que la serie dada sea convergente (si cumple la condición necesaria para ello), pero entonces la llamaremos "condicionalmente convergente".

De los ejemplos vistos en la pág. 18, ¿cuáles corresponden a series "absolutamente convergentes" y cuáles a series "absolutamente divergentes"?

La del ejemplo 1) era divergente a $-\infty$ (caso 3 del resumen de la pág. 17) y entonces será "absolutamente divergente". En efecto, su serie de valores absolutos diverge, pues sus sumas parciales de índices múltiplos de 6 son superiores a ciertas sumas parciales de la serie armónica de índices múltiplos de 3, las cuales llegarán a ser tan avanzadas como queramos (y por tanto sus valores tan grandes como queramos, porque tienden a $+\infty$). En efecto, llamando S a las sumas parciales de la serie de valores absolutos de la dada y llamando S' a las sumas parciales de la serie armónica, vemos claramente que $S_6 > S'_3$, $S_{12} > S'_6$, $S_{18} > S'_9$, y en general $S_{6n} > S'_{3n}$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_{6n} = +\infty$, con lo cual el límite de toda la sucesión de sumas parciales S_n también será $+\infty$, porque dicha sucesión es estrictamente creciente.

La del ejemplo 2) era "incondicionalmente convergente" (caso 1 del resumen de la pág. 17), luego tendrá que ser "absolutamente convergente" (y efectivamente lo es, pues su serie de valores absolutos es la armónica general con $p = 3/2$).

La del ejemplo 3) era oscilante (caso 4 del resumen de la pág. 17), luego será también "absolutamente divergente" (en efecto, su serie de valores absolutos tiene término general $|a_n| = \frac{2n-1}{2n+2}$, por lo cual $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, y al no ser convergente será divergente a $+\infty$).

Y la del ejemplo 4) era convergente, pero estaba también en el caso 4) del resumen de la pág. 17, luego se trataba de una "convergencia condicional" y tendrá que ser "absolutamente divergente" (en efecto, su serie de valores absolutos es la armónica).

Finalmente, daremos el Teorema que se refiere al producto de dos series absolutamente convergentes:

TEOREMA: Sean dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ "absolutamente convergentes", de valores respectivos A y B.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $\boxed{c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_2 + a_n \cdot b_1}$ es "absolutamente convergente" y su valor es $A \cdot B$.

Nota: Se había establecido ya este Teorema para series de términos positivos convergentes (propiedad 3 de la pág. 15) y ahora se extiende a series de términos positivos y negativos que sean "absolutamente convergentes".

Ejemplo: El producto de la serie $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \cdots$ (absolutamente convergente, pues su serie de valores absolutos es geométrica de razón $1/2$) por la serie $-5 + \frac{5}{3} - \frac{5}{9} + \frac{5}{27} - \frac{5}{81} + \cdots$ (absolutamente convergente, pues su serie de valores absolutos es geométrica de razón $1/3$) tiene primer término $3 \cdot (-5) = -15$, tiene segundo término $3 \cdot \frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-5) = \frac{25}{2}$, tiene tercer término $3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{5}{3} + \frac{3}{4} \cdot (-5) = -\frac{95}{12}$, tiene cuarto término $3 \cdot \frac{5}{27} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot (-5) = \frac{325}{72}$, etc…

Por tanto, la serie producto empieza $-15 + \frac{25}{2} - \frac{95}{12} + \frac{325}{72} - \cdots$. Además, la primera serie dada tiene valor 2 (pues es geométrica de razón $-1/2$ con primer término 3) y la segunda tiene valor $-15/4$ (pues es geométrica de razón $-1/3$ con primer término -5), luego esta serie producto tendrá valor $-15/2$.
