

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

(Prerrequisito: Límites y continuidad con dos y tres variables)

Introducción

Se trata de explicar las razones matemáticas que fundamentan el cálculo de ciertos límites de “funciones elementales” de dos variables (recuérdese la definición de “función elemental”). De un modo análogo puede procederse con funciones de tres variables. Se trata de límites que no son indeterminados, pero tampoco de respuesta inmediata.

Así, en los ejemplos que siguen se tratará siempre de algún límite de cierta “función elemental”, en un determinado punto que no pertenece a su dominio (con lo cual el límite no resulta inmediatamente de la continuidad de la función en ese punto).

Normalmente, el razonamiento se basará en la continuidad de otras “funciones elementales”, quizá en alguna propiedad de las “funciones básicas” (que deben conocerse; ver Sección 2.5), y además en la aplicación de algunas reglas del “álgebra de límites” (se han dado los teoremas correspondientes para funciones de una variable en la Sección 2.4, los cuales siguen siendo válidos para funciones de varias variables, como dijimos en la sección 5.2).

No se trata de una aplicación automática de reglas aprendidas, que pueden ser correctas, pero que normalmente no se acompañan de una explicación. Se trata, justamente, de aprender a explicar en forma sencilla el porqué de esas reglas. Importan más las explicaciones del cálculo que el propio cálculo, que es sencillo.

Ejemplos

EJEMPLO 1: Hallar el límite de la función $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, explicando las razones que lo justifican y precisando el signo del resultado final si es posible, donde

$$f(x, y) = \frac{\ln[(x+2)^2 + (y-1)^4]}{\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” (está en forma explícita, tiene una sola expresión y resulta de operar con “funciones básicas”) y no está definida en el punto dado $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula la expresión que está en el corchete del numerador y sabemos que $\ln 0$ no existe.

Por tanto, el límite pedido no es de respuesta inmediata. Si el punto $(-2, 1)$ hubiese estado en el dominio de la función dada, el límite sería $f(-2, 1)$, porque al ser f “función elemental” sería continua en todo su dominio y entonces lo sería en el punto mencionado, con lo cual el límite coincidiría con el valor de la función en dicho punto.

Analicemos entonces, separadamente, qué ocurre con el numerador y con el denominador de la función dada:

La expresión $(x+2)^2 + (y-1)^4$ corresponde a una “función elemental” que vale cero en el punto $(-2, 1)$. Luego su límite será cero, cuando (x, y) tiende a dicho punto (por continuidad en el mismo). Pero, además, dicha función se mantiene positiva porque si (x, y) tiende a $(-2, 1)$ será $(x, y) \neq (-2, 1)$. Por tanto, la función $\ln[(x+2)^2 + (y-1)^4]$ tendrá límite $-\infty$, cuando (x, y) tiende al punto $(-2, 1)$ (por propiedad muy importante de la “función básica” $y = \ln x$,

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

que tiende a $-\infty$ cuando x tiende a cero por la derecha). Entonces ya sabemos qué le ocurre al numerador de la función dada.

Por otro lado, el denominador de f es la “función elemental” $\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Por tanto, ese será su límite cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Entonces también sabemos qué le ocurre al denominador de la función dada.

Finalmente, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a $-\infty$ y su denominador tiende a $-\pi/6$, el límite del cociente será $+\infty$ (el cociente será positivo, pues tanto el numerador como el denominador se mantendrán negativos).

Conclusión: El límite de la función dada es $+\infty$. (Obsérvese que este límite es de un cociente que no está en la indeterminación $0/0$ ni en la indeterminación ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\ln[(x+2)^2+(y-1)^4]}{\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{-\infty}{-\frac{\pi}{6}} = +\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además operando con ∞ como si fuese un número, lo cual es incorrecto. (En Bachillerato se suele permitir esto, pero en la Universidad se pide explicar: Es el objetivo de estos ejercicios).

EJEMPLO 2: El mismo enunciado del EJEMPLO 1, pero con la función

$$f(x, y) = \frac{\log(2x+8y+6)}{-1+3^{(x+2)^2+(y-1)^4}}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador de f (da $-1 + 3^0 = 0$).

Por tanto, el límite no es de respuesta inmediata (no podemos utilizar la continuidad de la “función elemental” f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería $f(-2, 1)$).

Analicemos entonces, separadamente, qué ocurre con el numerador y con el denominador de la función dada:

El numerador es la “función elemental” $\log(2x + 8y + 6)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\log 10 = 1$ ($\log$ representa logaritmo decimal, no logaritmo neperiano). Por tanto, su límite será 1 cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, como consecuencia de la continuidad en dicho punto. Entonces ya sabemos qué le ocurre al numerador de la función dada.

Por otro lado, el denominador de f es la “función elemental” $-1 + 3^{(x+2)^2+(y-1)^4}$, cuyo valor en $(-2, 1)$ es cero. Y, por razonamiento análogo al anterior, su límite será cero cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$. Entonces también sabemos qué le ocurre al denominador de la función dada.

Finalmente, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a 1 y su denominador tiende a cero, el límite del cociente será infinito. Falta saber si es $+\infty$, si es $-\infty$ o si es $\pm\infty$. Para ello habrá que analizar el signo de $f(x, y)$ cuando el punto variable (x, y) esté suficientemente cerca de $(-2, 1)$, sin coincidir con este punto:

- a) Está claro que el numerador de f será positivo, porque tiende a 1.

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

- b) Pero el límite del denominador de f es cero, lo cual no permite asegurar su signo. Sin embargo, vemos que el valor de la potencia $3^{(x+2)^2+(y-1)^4}$ será siempre mayor que 1, ya que el exponente se mantendrá positivo y la función exponencial de base 3 es estrictamente creciente. Por tanto, el denominador será también positivo.

Conclusión: El límite de la función dada es $+\infty$. (Este ejemplo tampoco ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\log(2x+8y+6)}{3^{(x+2)^2+(y-1)^4}-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además estableciendo la igualdad incorrecta final ($\frac{1}{0} = +\infty$).

EJEMPLO 3: Mismo enunciado de los ejemplos 1 y 2, pero con la función

$$f(x, y) = \frac{\arcsen(x+y)}{1 - \cos(2x+3y+1)}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador de f (da $1 - \cos 0 = 0$).

Por tanto, el límite no es de respuesta inmediata (no podemos utilizar la continuidad de la función elemental f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería $f(-2, 1)$).

Analicemos entonces, separadamente, el límite del numerador y el límite del denominador de la función dada (como en los casos anteriores):

El numerador es la “función elemental” $\arcsen(x+y)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\arcsen(-1) = -\pi/2$. Por tanto, su límite será ese valor cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, por continuidad en dicho punto. Entonces ya sabemos cuál es límite del numerador de la función dada.

Por análogos motivos, el límite de la función denominador será $1 - \cos(0) = 0$, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$. Luego, también sabemos el límite del denominador de la función dada.

Entonces, por el mismo teorema del álgebra de límites aplicado en el ejemplo anterior, el límite de la función $f(x, y)$ es infinito. Falta saber si es $+\infty$, si es $-\infty$ o si es $\pm\infty$.

Para ello debemos conocer el signo de dicha función $f(x, y)$ cuando el punto variable (x, y) esté suficientemente cerca de $(-2, 1)$, sin coincidir con ese punto:

- a) Está claro que su numerador será negativo, porque tiene límite negativo.
- b) Pero el límite del denominador de f es cero, lo cual no permite asegurar su signo. Sin embargo, la función $\cos(2x + 3y + 1)$ es siempre menor o igual que 1 (propiedad de la “función básica” $\cos x$). Pero en este caso (x, y) tiende al punto $(-2, 1)$ sin tocar la recta de ecuación $2x + 3y + 1 = 0$, ya que sus puntos no están en el dominio de $f(x, y)$. Con lo cual, $2x + 3y + 1$ tenderá a cero, pero sin ser cero. Lo cual nos asegura que la función $\cos(2x + 3y + 1)$ será menor que uno y entonces el denominador de la función f será positivo.

Conclusión: El límite de la función dada es $-\infty$. (Este ejemplo no ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\arcsen(x+y)}{1-\cos(2x+3y+1)} = \frac{-\pi/2}{0} = -\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además estableciendo la igualdad incorrecta final ($\frac{-\pi/2}{0} = -\infty$).

EJEMPLO 4: Mismo enunciado de los ejemplos anteriores, pero con la función

$$f(x, y) = \frac{4^{\frac{1}{(x+2)^2+(y-1)^4}}}{\sqrt[3]{2x-3y-1}}$$

Respuesta: Como en los casos anteriores, observamos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador de la fracción que aparece como exponente de la potencia de base 4 que está en el numerador de f .

Como consecuencia, el límite no es de respuesta inmediata (no podemos utilizar la continuidad de la función elemental f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería $f(-2, 1)$).

Debemos entonces averiguar los límites del numerador y del denominador de f , en forma separada, y concluir aplicando algún teorema del “álgebra de límites”.

La expresión $(x+2)^2 + (y-1)^4$ corresponde a una “función elemental” que vale cero en el punto $(-2, 1)$. Luego su límite será cero, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Pero, además, esa función es siempre positiva porque será $(x, y) \neq (-2, 1)$, luego el límite del cociente $\frac{1}{(x+2)^2+(y-1)^4}$ es $+\infty$ (por teorema del “álgebra de límites”). Entonces (aplicando una propiedad muy importante de la “función básica” $y = 4^x$, que tiende a $+\infty$ si su exponente tiende a $+\infty$), la función del numerador también tiende a $+\infty$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$. Por tanto, sabemos el límite del numerador de la función dada.

Por otro lado, la función $\sqrt[3]{2x-3y-1}$ es “elemental” y su valor en el punto $(-2, 1)$ es $\sqrt[3]{-8} = -2$. Por lo tanto, el límite del denominador de $f(x, y)$ será -2 , cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Así sabemos ya el límite del denominador de la función dada.

Ahora, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a $+\infty$ y el denominador tiende a -2 , la función $f(x, y)$ tiene límite $-\infty$.

Conclusión: El límite de la función dada es $-\infty$. (Tampoco este ejemplo ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{4^{\frac{1}{(x+2)^2+(y-1)^4}}}{\sqrt[3]{2x-3y-1}} = \frac{4^{\frac{1}{0}}}{-2} = \frac{4^{+\infty}}{-2} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty$$

donde faltan muchas explicaciones y donde se usa la igualdad incorrecta $\frac{1}{0} = +\infty$ y las igualdades simbólicas $4^{+\infty} = +\infty$ y $\frac{+\infty}{-2} = -\infty$ se usan sin mayores explicaciones (no se puede dividir por cero, ni se puede operar con ∞ como si fuera un número).
