# DERIVADAS PARCIALES

(Prerrequisitos: Funciones de dos y tres variables. Derivadas de funciones de una variable)

## Entornos de puntos del plano y del espacio

Se llama "entorno circular del punto $(a, b)$ de radio $\delta$" ($\delta > 0$) a un círculo de centro dicho punto y radio el valor de $\delta$ (normalmente, sin incluir los puntos de la correspondiente circunferencia; pero esto no tiene importancia).

Sin embargo, la idea de "entorno de un punto" es más general: Es cualquier subconjunto del plano que incluya al punto y lo "rodee totalmente". Esto se consigue exigiéndole al "entorno" que contenga un cierto "entorno circular" del mismo punto. O sea, un entorno de $(a\,, b)$ es "una cierta proximidad" o "una cierta vecindad" del punto $(a\,, b)$, aunque puede ser muy grande. Así $\mathbb{R}^2$ es el mayor entorno de cualquier punto del plano.

El concepto de "entorno circular" visto anteriormente es análogo en $\mathbb{R}^2$ al concepto que vimos en los Temas de funciones de una variable, el cual era "entorno del punto $x = a$ de radio $\delta$" (válido en $\mathbb{R}$), que se reducía al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

Para puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ el concepto es también análogo: "Entorno esférico del punto $(a, b, c)$ de radio $\delta$" ($\delta > 0$) es una esfera de centro dicho punto y radio el valor de $\delta$ (normalmente, sin incluir los puntos de la correspondiente superficie esférica; pero no tiene importancia si incluimos o no dicha superficie esférica en el "entorno esférico").

Pero también la idea de "entorno" de un punto del espacio $\mathbb{R}^3$ es cualquier subconjunto que incluya al punto y lo "rodee completamente", lo cual se consigue exigiéndole que contenga un cierto "entorno esférico" del mismo punto.

Nota: Es frecuente que al "entorno" unidimensional $(a - \delta\,, a + \delta)$ de un punto $a$ en $\mathbb{R}$ y al "entorno esférico" tridimensional de un punto $(a\,, b\,, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se les llamen también "entornos circulares", por analogía con los entornos verdaderamente "circulares" de un punto $(a\,, b)$ en $\mathbb{R}^2$.

## Derivadas parciales de funciones de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables reales (de ahora en adelante diremos simplemente "una función de dos variables" o "una función") y sea $(a\,, b)$ un "punto interior" de su dominio. (Quiere esto decir que existe algún entorno de dicho punto, completamente contenido en el dominio; lo cual significa que el punto pertenece al dominio y está "totalmente rodeado" por puntos del mismo).

Se llama "derivada parcial respecto a $x$ de la función $f$ en un punto $(a\,, b)$ interior de su dominio" al resultado del límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\,, b) - f(a\,, b)}{h}$$

siempre que dicho resultado sea **un número real**.

Obsérvese que, en el numerador de la fracción, la función $f$ se ha evaluado en primer lugar en un punto con el valor $a$ de la variable $x$ incrementado en $h$, dejando sin modificar el valor $b$ de la variable $y$, para restarle luego el valor de $f$ en el punto $(a\,, b)$; tomando como denominador de la fracción el incremento $h$ de la variable $x$; está claro que esa variable $x$ es la que cuenta para esta derivada parcial, siendo el cociente $\frac{f(a+h\,,b)-f(a\,,b)}{h}$ análogo a lo que llamábamos "cociente incremental" de una función de una sola variable, como si la función $f$ dependiese solamente de la variable $x$ (ver Sección 3.1). En este caso el cociente anterior se llama "cociente incremental respecto a $x$ de la función $f$ en $(a\,,b)$".

Si el límite mencionado anteriormente (recuadro de la página anterior) fuese infinito o no existiese, se dirá que "la derivada parcial respecto a $x$ de la función $f$ en $(a\,,b)$ **no existe**", o bien que "la función $f$ **no es** derivable parcialmente respecto a $x$ en el punto $(a\,,b)$".

Y en caso de existencia del límite anterior **como número real**, se dirá que "la derivada parcial respecto a $x$ de la función $f$ en $(a\,,b)$ **existe**", o bien que "la función $f$ **es** derivable parcialmente respecto a $x$ en $(a\,,b)$" y ese número se representa con la notación $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a\,,b)}$ o bien con la notación $\boxed{f_x(a\,,b)}$ .

---

Ejemplo: Si tomamos $f(x,y)=x^2y-2y^3-5x+8$ siendo $(a\,,b)$ cualquier punto del plano (porque el dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$ y el punto será siempre interior al mismo), se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a\,,b)=\lim_{h\to 0}\frac{[(a+h)^2b-2b^3-5(a+h)+8]-(a^2b-2b^3-5a+8)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a^2b+2ahb+h^2b-2b^3-5a-5h+8)-(a^2b-2b^3-5a+8)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ahb+h^2b-5h}{h}=\lim_{h\to 0}(2ab+hb-5)=2ab-5$$

con lo cual hemos obtenido que la derivada parcial respecto a $x$ de la función dada en el punto $(a\,,b)$ es $\boxed{2ab-5}$ .

A este mismo resultado se llega, con mayor rapidez, derivando normalmente la función dada como si dependiese únicamente de la variable $x$ (e $y$ fuese una constante desconocida o "un parámetro"), para lo cual hay que recordar las derivadas de las "funciones básicas" y aplicar las reglas para derivar sumas, diferencias, productos, cociente y compuestas. Y así tendremos: Derivada de $x^2y$ será $2xy$; derivada de $2y^3$ será cero; derivada de $5x$ será 5, y derivada de 8 será cero. Con lo cual la derivada respecto a $x$ de la función dada será $\boxed{2xy-5}$. Ahora, como la queremos en el punto $(a\,,b)$, sustituimos los valores de las variables y queda $\boxed{2ab-5}$ .

La expresión $2xy-5$ se llama "función derivada parcial respecto a $x$" de la función $f(x,y)$ dada" y se usa para ella la notación $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ o bien $f_x(x,y)$. Obsérvese que usamos las mismas notaciones dadas para la derivada parcial respecto a $x$ en el punto $(a\,,b)$, pero no especificamos el punto y obtenemos así una nueva función de las dos mismas variables.

Pero lo importante es que: Resolviendo nuevamente el límite que definía la derivada parcial respecto a $x$ en $(a\,,b)$, pero tomando el punto libre $(x,y)$ en vez del punto fijo $(a\,,b)$, se obtiene también la "función derivada parcial respecto a $x$" de la función dada. (Este procedimiento de obtención es más largo que el anterior y en la práctica no se utiliza o se utiliza poco).

Sin embargo, con determinadas funciones "no elementales", pudiese haber duda acerca de la existencia o no de la derivada parcial respecto a $x$ en algún punto concreto, siendo entonces el cálculo del límite usado en la definición de la página anterior (recuadro) el procedimiento más seguro para saberlo.

De modo análogo:

Se llama "derivada parcial respecto a $y$ de la función $f$ en un punto $(a\,,b)$ interior de su dominio" al resultado del límite siguiente:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a\,,b+k)-f(a\,,b)}{k}$$

siempre que dicho resultado sea **un número real**.

Obsérvese que ahora, en el numerador de la fracción, la función $f$ se ha evaluado en primer lugar en un punto con el valor $b$ de la variable $y$ incrementado en $k$, dejando sin modificar el valor $a$ de la variable $x$, para restar igualmente el valor de $f$ en $(a\,,b)$; tomando como denominador de la fracción el incremento $k$ de la variable $y$. Está claro que ahora la variable $y$ es la que cuenta para esta derivada parcial, siendo el cociente anterior lo que llamábamos "cociente incremental" de una función de una sola variable (sólo que ahora la variable que consideramos es la $y$). En este caso dicho cociente se llama "cociente incremental respecto a $y$ de la función $f$ en $(a\,,b)$".

Otra vez, si el límite anterior fuese infinito o no existiese, se dice que "la derivada parcial respecto a $y$ de la función $f$ en $(a\,,b)$ **no existe**", o bien que "la función $f$ **no es** derivable parcialmente respecto a $y$ en el punto $(a\,,b)$".

Y si el límite anterior existe como **número real**, se dice que "la derivada parcial respecto a $y$ de la función $f$ en $(a\,,b)$ **existe**", o bien que "la función $f$ **es** derivable parcialmente respecto a $y$ en $(a\,,b)$" y ese número se representa por $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a\,,b)}$ o bien por $\boxed{f_y(a\,,b)}$.

---

Ejemplo: Para la misma función del ejemplo anterior, $f(x,y)=x^2y-2y^3-5x+8$ , y para un punto cualquiera $(a\,,b)$ del plano, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a\,,b)=\lim_{k\to 0}\frac{[a^2(b+k)-2(b+k)^3-5a+8]-(a^2b-2b^3-5a+8)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{[a^2b+a^2k-2(b^3+3b^2k+3bk^2+k^3)-5a+8]-(a^2b-2b^3-5a+8)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{(a^2b+a^2k-2b^3-6b^2k-6bk^2-2k^3-5a+8)-(a^2b-2b^3-5a+8)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{a^2k-6b^2k-6bk^2-2k^3}{k}=\lim_{k\to 0}(a^2-6b^2-6bk-2k^2)=a^2-6b^2$$

con lo cual se ha obtenido que la derivada parcial respecto a $y$ de la función dada en el punto $(a\,,b)$ es $\boxed{a^2-6b^2}$ .

Igualmente a lo dicho para la derivada parcial respecto a $x$, se llega a este mismo resultado con mayor rapidez derivando normalmente la función dada como si tuviese únicamente la variable $y$ (y $x$ fuese una constante desconocida o "un parámetro"), para lo cual hay que recordar las derivadas de las "funciones básicas" y aplicar las reglas para derivar sumas, diferencias, productos, cocientes y compuestas. De esta manera tendremos: Derivada de $x^2y$ será $x^2$; derivada de $2y^3$ será $6y^2$; derivada de $5x$ será cero, y derivada de 8 será cero. Con lo cual la derivada respecto a $y$ de la función será $\boxed{x^2-6y^2}$ . Por tanto, en el punto $(a\,,b)$ se tendrá el valor $\boxed{a^2-6b^2}$ .

La expresión $x^2-6y^2$ se llama "función derivada parcial respecto a $y$" de la función $f(x,y)$ dada, usando para la misma la notación $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ o bien $f_y(x,y)$. Obsérvese que usamos las mismas notaciones dadas para la derivada parcial respecto a $y$ en el punto $(a\,,b)$, pero no especificamos el punto y obtenemos así <u>una nueva función de las dos mismas variables</u>.

Pero nuevamente es importante saber que podríamos haber obtenido esta "función derivada parcial respecto a $y$", hallando el límite que usamos en la definición de dicha derivada parcial en el punto $(a\,,b)$, pero tomando un punto libre $(x,y)$ en vez del punto fijo $(a\,,b)$. Procedimiento más largo, por lo cual no se usa normalmente.

---

<u>Nota</u>: Si se llama $z$ la variable dependiente de la función $f(x,y)$, <u>también se pueden escribir las funciones derivadas parciales así</u>: $\frac{\partial z}{\partial x}$ o bien $z_x$ , en vez de $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $f_x$ , y $\frac{\partial z}{\partial y}$ o bien $z_y$ , en vez de $\frac{\partial f}{\partial y}$ o $f_y$ .

---

Ahora, como las <u>funciones derivadas parciales obtenidas son funciones de las mismas dos variables</u>, podemos obtener <u>nuevas funciones derivadas parciales</u> a partir de éstas, las cuales se llamarán <u>derivadas parciales segundas (o de orden dos) de la función inicial</u> (y las que teníamos se llamarán <u>funciones derivadas parciales primeras de la función inicial</u>). Y así sucesivamente, las funciones derivadas parciales segundas tendrían nuevas funciones derivadas parciales, que se llamarán <u>derivadas parciales terceras (o de orden tres) de la función inicial</u>. Etc…

<u>NOTACIONES DE LEIBNIZ</u> (muy importantes): Si es $z=f(x,y)$, dijimos anteriormente que las funciones derivadas parciales primeras se pueden escribir como $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}$ y $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}$.
Pues bien, de $\frac{\partial z}{\partial x}$ se obtienen $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ , que se escribe abreviadamente como $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$ , y también $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ , que se escribe abreviadamente como $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}}$ (dos de las derivadas segundas).
Y a partir de $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtienen $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ , que se escribe como $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}$ , y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ , que se escribe como $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$ (las otras dos derivadas segundas). En total <u>hay cuatro derivadas parciales segundas</u>.
Una derivada tercera sería $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial^2 x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$ y otra sería $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$ . En total <u>hay ocho drivadas parciales terceras</u>, <u>dieciséis derivadas cuartas</u>, etc…

<u>OTRAS NOTACIONES IMPORTANTES</u> (notaciones con subíndices): Las funciones derivadas parciales primeras sabemos que pueden también representarse por $\boxed{z_x}$ y $\boxed{z_y}$ .
Pues bien, las funciones derivadas parciales segundas se pueden escribir: $\boxed{z_{xx}}$ que viene a ser $(z_x)_x$ ; $\boxed{z_{xy}}$ que viene a ser $(z_x)_y$ ; $\boxed{z_{yx}}$ que viene a ser $\left(z_y\right)_x$ , y $\boxed{z_{yy}}$ que corresponde a $\left(z_y\right)_y$.
Y las funciones derivadas terceras que mencionamos antes serían $z_{xxy}$ (derivación primero respecto a $x$, después respecto a $x$ y luego respecto a $y$) y $z_{xyx}$ (derivación primero respecto a $x$, después respecto a $y$, para terminar con nueva derivación respecto a $x$).
<u>Estas notaciones con subíndices son notablemente más cómodas que las anteriores, pero se usan menos</u> (en muchos textos de materias científicas, como la Física, se usa mucho las notaciones de Leibniz de las derivadas parciales).

<u>Observación</u>: Las llamadas "derivadas parciales mixtas", donde se combinan derivaciones respecto a una variable con derivaciones respecto a la otra variable, <u>quedan muy claras con las notaciones de subíndices, pero no tanto con las notaciones de Leibniz</u>. Por ejemplo, la que se representa por $z_{xy}$ indica que primero se derivó $z$ respecto a $x$ y que esa derivada se derivó luego respecto a $y$ (<u>el orden de los subíndices coincide con el orden de derivación</u>). Sin embargo, esa

misma derivada segunda se representa en notación de Leibniz como $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, donde aparecen las variables en el denominador en orden inverso al de derivación (¡cuidado!).

Vemos que el número de funciones derivadas parciales de un mismo orden puede ser muy grande y crece con dicho orden. Pero, por suerte, no todas son siempre diferentes. Al respecto tenemos los dos teoremas que siguen:

TEOREMA 1: Si todas las derivadas parciales segundas de una función $z = f(x, y)$ son continuas en un punto $(a\ , b)$, los valores de las derivadas mixtas de orden dos, $z_{xy}$ y $z_{yx}$ , coinciden en dicho punto.

Si la función $f$ es "elemental", las derivadas parciales primeras y segundas también serán "elementales", con lo cual serán continuas donde existan. Pero entonces, por el teorema anterior, las funciones $f_{xy}$ y $f_{yx}$ tendrán los mismos valores en todos los puntos donde existan las cuatro derivadas segundas (porque todas serán continuas). Y eso obliga a que las expresiones explícitas de dichas derivadas mixtas coincidan.

Por tanto, tratándose de "funciones elementales", no habrá que calcular las cuatro derivadas parciales segundas, sino solamente tres: $f_{xx}$, $f_{yy}$ y $f_{xy}$ (o bien $f_{yx}$).

---

Ejemplo de cálculo de derivadas parciales primeras por aplicación de las conocidas reglas de derivación de funciones de una variable: Sea la "función elemental" $z = \frac{ln(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, con dominio definido por la inecuación $x - y > 0$ (semiplano limitado por la recta $y = x$, sin incluirla, que contiene la parte positiva del eje OX y a la parte negativa del eje OY). Las derivadas parciales primeras de la función dada son:

$$z_x = \frac{\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^2+y^2} - ln(x-y) \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot (x-y) \cdot ln(x-y)}{(x-y) \cdot (x^2+y^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(nueva "función elemental")}$$

$$z_y = \frac{\frac{-1}{x-y} \cdot \sqrt{x^2+y^2} - l\ \ (x-y) \cdot \frac{2y}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2) - y \cdot (x-y) \cdot ln(x-y)}{(x-y) \cdot (x^2+y^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(nueva "función elemental")}$$

Ambas derivadas parciales existen con tal que sea $x - y > 0$, lo cual implica que $x - y$ no sea cero, lo cual elimina el origen de coordenadas, que es el único punto donde se hace cero $x^2 + y^2$. Por tanto, ambas derivadas existen en todos los puntos del dominio de la función dada (se dice que esa función dada "**es derivable en todo su dominio**"), pues "derivable en un punto o en un conjunto", para funciones de dos variables, es que **existan** las dos funciones derivadas parciales primeras en dicho punto o en dicho conjunto.

---

Ejemplo de igualdad de derivadas parciales segundas mixtas: Sea la "función elemental" de dominio todo el plano $z = 3x^3y^2 - 5x^2y + 3xy^2 + 7x^2 - 4y + 10$ . Tenemos:

$$z_x = 9x^2y^2 - 10xy + 3y^2 + 14x \qquad z_y = 6x^3y - 5x^2 + 6xy - 4$$

$$z_{xx} = 18xy^2 - 10y + 14 \qquad z_{xy} = 18x^2y - 10x + 6y$$

$$z_{yx} = 18x^2y - 10x + 6y \qquad z_{yy} = 6x^3 + 6x$$

---

Para las <u>derivadas parciales terceras de una función de dos variables</u> (que son 8) se tiene:

De la derivada segunda $z_{xx}$ resultan las derivadas terceras de $z$ que podemos representar por $z_{xxx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ y $z_{xxy} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ . De $z_{xy}$ resultan $z_{xyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ y $z_{xyy} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$ . De $z_{yx}$ resultan $z_{yxx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ y $z_{yxy} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$ . Y finalmente de $z_{yy}$ resultan $z_{yyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ y $z_{yyy} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Teniendo un teorema análogo al de la igualdad de $z_{xy}$ con $z_{yx}$:

TEOREMA 2: <u>Si todas las derivadas parciales terceras</u> de una función $z = f(x, y)$ son <u>continuas en un punto</u> $(a\,, b)$, <u>los valores de las derivadas mixtas de orden tres</u> $z_{xxy}, z_{xyx}$ y $z_{yxx}$ <u>coinciden en dicho punto</u>. Y <u>también los valores de las derivadas mixtas de orden tres</u> $z_{yyx}, z_{yxy}$ y $z_{xyy}$ <u>coinciden en dicho punto</u>, pudiendo ser iguales o distintas a las anteriores.

Con lo cual, si la función que vamos a derivar parcialmente es “elemental”, ocurrirá con las derivadas terceras algo parecido a lo que ya habíamos dicho para las derivadas segundas: <u>Habrá que calcular solamente cuatro distintas</u>. Por ejemplo, bastaría calcular $z_{xxx}$ , $z_{xxy}$ , $z_{xyy}$ y $z_{yyy}$ .

<u>Ejemplo</u>: Calculemos las ocho derivadas parciales terceras de la función del ejemplo anterior, donde la función era: $z = 3x^3y^2 - 5x^2y + 3xy^2 + 7x^2 - 4y + 10$ .
De la derivada segunda $z_{xx} = 18xy^2 - 10y + 14$ resultan $z_{xxx} = 18y^2$ y $z_{xxy} = 36xy - 10$. De la derivada $z_{xy} = 18x^2y - 10x + 6y$ resultan $z_{xyx} = 36xy - 10$ y $z_{xyy} = 18x^2 + 6$. De la derivada $z_{yx} = 18x^2y - 10x + 6y$ resultan $z_{yxx} = 36xy - 10$ y $z_{yxy} = 18x^2 + 6$. Y, finalmente, de la derivada $z_{yy} = 6x^3 + 6x$ resultan $z_{yyx} = 18x^2 + 6$ y $z_{yyy} = 0$ . <u>Sólo hay cuatro distintas</u>: $18y^2$ , $36xy - 10$ , $18x^2 + 6$ y $0$.

**Derivadas parciales de funciones de tres variables**

<u>Todo lo anterior se puede extender a funciones de tres o más variables sin complicaciones nuevas, salvo que aumenta el número de derivadas parciales por haber más variables independientes a considerar</u>.

<u>Centrándonos en el caso de tres variables independientes</u>, si tenemos la función real de tres variables reales $w = f(x, y, z)$, de un modo análogo al caso de dos variables <u>podemos definir por límites sus tres derivadas parciales primeras en un punto $(a\,, b\,, c)$ que sea “interior” del dominio de la función</u>. <u>La derivada parcial respecto a $x$ en el punto</u> la representamos por $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)$, por $f_x(a, b, c)$, por $\frac{\partial w}{\partial x}(a, b, c)$ o por $w_x(a, b, c)$. <u>La derivada parcial respecto a $y$ en el punto</u> la representamos por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)$, por $f_y(a, b, c)$, por $\frac{\partial w}{\partial y}(a, b, c)$ o por $w_y(a, b, c)$. Y <u>la derivada parcial respecto a $z$ en el punto</u> la representamos por $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)$, por $f_z(a, b, c)$, por $\frac{\partial w}{\partial z}(a, b, c)$ o por $w_z(a, b, c)$.

Sin olvidar que <u>estas tres derivadas parciales en el punto $(a, b, c)$ son tres números reales</u> (normalmente diferentes, pero que pueden ser iguales), <u>los cuales existen solamente si los respectivos límites que las definen dan esos resultados</u> (límites finitos, los tres). En ese caso se dirá que <u>“la función $f$ **es derivable** en el punto $(a, b, c)$”</u>. Lo cual puede extenderse a <u>“derivable en un conjunto” del espacio $\mathbb{R}^3$, cuando sea derivable en cada uno de sus puntos</u>.

Al respecto, indicamos cómo son los límites que definen las tres derivadas parciales de la función en el punto dado, escribiendo solamente el límite que define "la derivada parcial respecto a $z$ de la función $f(x,y,z)$ en $(a,b,c)$":

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a\,,b\,,c) = \lim_{l\to 0} \frac{f(a\,,b\,,c+l) - f(a\,,b\,,c)}{l}$$

Los otros dos límites, se escriben de modo análogo al caso de dos variables.

MUY IMPORTANTE: Lo más rápido para calcular derivadas parciales de "funciones elementales", como para calcular derivadas ordinarias en el caso de una variable, es conocer las derivadas ordinarias de las funciones básicas y aplicar las reglas para derivar sumas, diferencias, productos, cocientes y compuestas de funciones. En el caso de las derivadas parciales (como sabemos ya para dos variables e igualmente ocurre para tres o más variables), se derivará ordinariamente la función, pero considerando como "única variable" aquella respecto de la cual queramos la derivada parcial, tomando las demás variables como si fuesen constantes (parámetros). Así quedaría calculada cada "función derivada parcial" y luego obtendríamos su valor en el punto dado. (Si ese valor no existiese, la derivada parcial calculada por límite tampoco existirá, siendo este procedimiento mucho más largo).

Ejemplo con tres variables: Sea la función elemental $w = sen(3x + y^2 - e^z) + \frac{ln(3x-2y+6z)}{xyz}$, de dominio el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ donde se cumpla la inecuación $3x - 2y + 6z > 0$ (semiespacio definido por el plano $3x - 2y + 6z = 0$ , que no queda incluido y contiene al semieje positivo OX, al semieje negativo OY y al semieje positivo OZ), quitándole a dicho semiespacio los puntos que tengan $x = 0$ , $y = 0$ o $z = 0$ (puntos pertenecientes a los tres planos coordenados).
Sus tres funciones derivadas parciales primeras son:

$$w_x = 3 \cdot cos(\,3x + y^2 - e^z) + \frac{\frac{3}{3x-2y+6z} \cdot xyz - yz \cdot ln(3x-2y+6z)}{(xyz)^2}$$

$$w_y = 2y \cdot cos(3x + y^2 - e^z) + \frac{\frac{-2}{3x-2y+6z} \cdot xyz - xz \cdot ln(3x-2y+6z)}{(xyz)^2}$$

$$w_z = -e^z \cdot cos(3x + y^2 - e^z) + \frac{\frac{6}{3x-2y+6z} \cdot xyz - xy \cdot ln(3x-2y+6z)}{(xyz)^2}$$

Y sus valores en el punto $(-1\,,1\,,1)$, que pertenece al dominio de la función porque cumple la inecuación $3x - 2y + 6z > 0$, siendo además $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$, son:

$$w_x(-1,1,1) = 3 \cdot cos(-2-e) - 3 \qquad w_y(-1,1,1) = 2 \cdot cos(-2-e) + 2$$

$$w_z(-1,1,1) = -e \cdot cos(-2-e) - 6$$

Vemos que en este caso las tres derivadas parciales dan distintos valores (lo cual es muy natural, aunque no es obligatorio), pero **existen**, luego podemos decir que la función $f(x,y,z)$ dada **es derivable** en el punto $(-1\,,1\,,1)$.

---

Así, como para funciones de dos variables hay un total de 2 derivadas parciales primeras, $2^2 = 4$ derivadas parciales segundas y $2^3 = 8$ derivadas terceras, para funciones de tres variables hay un total de 3 derivadas parciales primeras, $3^2 = 9$ derivadas parciales segundas (o de orden dos) y $3^3 = 27$ derivadas parciales terceras (o de orden 3).

También el teorema de coincidencia de derivadas parciales mixtas puede extenderse a funciones de tres o más variables del siguiente modo:

TEOREMA: Si todas las derivadas parciales de un mismo orden son continuas en un cierto punto, las parciales mixtas que tengan igual orden, que involucren las mismas variables independientes y que coincidan en el número de veces en que éstas intervengan en la derivación, serán iguales en dicho punto.

Así, si todas las derivadas segundas de $w = f(x, y, z)$ son continuas en P$(a, b, c)$, serán iguales en P las siguientes parejas de derivadas segundas: $w_{xy}$ y $w_{yx}$ ; $w_{xz}$ y $w_{zx}$ ; $w_{yz}$ y $w_{zy}$ . Y si todas las derivadas terceras de la misma función son continuas en P, serán iguales en P las 6 derivadas parciales terceras $w_{xyz}$ , $w_{xzy}$ , $w_{yxz}$ , $w_{yzx}$ , $w_{zxy}$ y $w_{zyx}$ ; siendo también iguales en P las derivadas parciales terceras $w_{xyy}$ , $w_{yxy}$ y $w_{yyx}$ ; siendo también iguales en P $w_{xzz}$ , $w_{zxz}$ y $w_{zzx}$ ; siendo también iguales en P $w_{yxx}$ , $w_{xyx}$ y $w_{xxy}$ ; siendo también iguales en P $w_{yzz}$ , $w_{zyz}$ y $w_{zzy}$ ; siendo también iguales en P $w_{zxx}$ , $w_{xzx}$ y $w_{xxz}$ , y siendo también iguales en P $w_{zyy}$ , $w_{yzy}$ y $w_{yyz}$ . (Nótese que, de las 27 derivadas terceras, hay 3 no mixtas, que son $w_{xxx}$ , $w_{yyy}$ y $w_{zzz}$ ; hay 6 derivadas que mezclan las tres variables, cambiando la posición de dichas variables como se ve en los subíndices, y hay 18 que mezclan solamente dos variables, cambiando la posición de las mismas como se ve en los subíndices).

Finalmente, sabemos que si la función $f$ es “elemental”, sus derivadas parciales también serán “funciones elementales”, con lo cual serán continuas donde existan. Pero entonces, por el citado Teorema de coincidencia de derivadas mixtas, cuando $f$ sea “elemental” de tres variables tendrá solamente 6 derivadas parciales segundas diferentes como máximo (de las 9 que hay), en todos los puntos donde las mismas existan (ya que habrá 3 iguales a otras 3, como dijimos anteriormente) y las iguales tendrán expresiones explícitas coincidentes.

Y análogamente, habrá muchas derivadas parciales terceras de una “función elemental” $f$ que coincidirán en los puntos donde todas existan (de las 27 existentes, solamente 10 serán diferentes como máximo, porque las que podrían ser diferentes también coincidirán en muchas ocasiones).

**Interpretaciones de las derivadas parciales**

Las derivadas parciales en un punto $(a, b)$ de una función $f(x, y)$ representan las “razones de cambio” o “velocidades de variación” de la función dada, en dicho punto, según las direcciones paralelas a los ejes de coordenadas.

En efecto, los puntos de esa recta horizontal cercanos al $(a, b)$ son de la forma $(a + h, b)$, siendo $h$ un incremento pequeño de la variable $x$ (incremento positivo o negativo, pero pequeño en valor absoluto). Entonces, la diferencia $f(a + h, b) - f(a, b)$ representa el incremento (“el cambio” o “la variación”) de $f$ al pasar del punto $(a, b)$ al punto $(a + h, b)$. Con lo cual, el cociente $\frac{f(a+h, b)-f(a, b)}{h}$ será entonces una relación entre el incremento de la función y el correspondiente incremento $h$ de la variable independiente $x$ (se llama “razón media de cambio” o “velocidad media de variación” de la función entre los puntos $(a, b)$ y $(a + h, b)$, la cual depende del $h$ tomado). Y el límite del cociente anterior cuando $h \to 0$ (si existe) ya no depende de $h$ y se llama “la razón de cambio” o “la velocidad de variación” de la función en el punto $(a, b)$ **en la dirección horizontal**. Pero sabemos que ese límite es la derivada parcial respecto a $x$ de la función en el punto $(a, b)$.

Análogo razonamiento concluye que la derivada parcial respecto a $y$ de la función en el punto $(a, b)$, será “la razón de cambio” o “la velocidad de variación” (como queramos decir) de la función $f$ en el punto $(a, b)$ **en la dirección vertical** (cuando nos movamos cerca del punto sobre la recta vertical que pasa por el mismo, que tiene la misma dirección que el eje OY).

De modo que si la derivada parcial respecto a $x$ es positiva, la función "es **creciente en $(a , b)$ en esa dirección horizontal**", pues la función $f(x, y)$ se comporta en esa dirección como una función $g(x)$ de la única variable $x$ y la derivada parcial de $f$ respecto a $x$ en $(a , b)$ coincide con la derivada ordinaria de $g(x)$ en $x = a$ (entonces, cuando aumentemos poco los valores de $x$ a partir de $a$, dejando el valor de $y$ fijo en $b$, aumentará $z$, y cuando disminuyamos poco los valores de $x$ a partir de $a$, dejando el valor de $y$ fijo en $b$, disminuirá $z$). También, si la derivada parcial respecto a $x$ es negativa, la función "es **decreciente en $(a , b)$ en esa dirección horizontal**", por el mismo motivo anterior (cuando aumentemos poco los valores de $x$ a partir de $a$, dejando el valor de $y$ fijo en $b$, disminuirá $z$, y cuando disminuyamos poco los valores de $x$ a partir de $a$, dejando el valor de $y$ fijo en $b$, aumentará $z$). Y, por el mismo motivo, si la derivada parcial respecto a $x$ es cero, la función **mantiene una estabilidad de sus valores cerca del punto $(a , b)$ en dirección horizontal** (dando valores casi iguales al de la función en el punto, sin poder asegurar crecimiento ni decrecimiento de los mismos, que en caso de darse serán muy débiles; pero que en ocasiones la función pasa de "ser creciente" a "ser decreciente" o viceversa cuando se pasa de un lado al otro del punto $(a , b)$ en la dirección horizontal; recuérdese los comportamientos de las funciones $y = x^2$ e $y = x^3$ en un entorno pequeño del punto $x = 0$, donde tienen derivada nula).

Podemos decir lo análogo si nos referimos a la derivada parcial respecto a $y$: Cuando sea positiva, la función será **creciente en $(a , b)$ en la dirección vertical**; cuando sea negativa, la función será **decreciente en $(a , b)$ en esa misma dirección**, y cuando sea cero, **habrá estabilidad de sus valores cerca del punto $(a , b)$ al movernos en dirección vertical**.

Además, cuanto mayor sea el valor absoluto de una derivada parcial de la función $f$, tanto mayor será la velocidad de "crecimiento" o "decrecimiento" de $f$ (según el signo que tenga) al pasar por el punto en la dirección horizontal (si es parcial respecto $x$) o al pasar por el punto en dirección vertical (si es parcial respecto a $y$).
En efecto, para valores pequeños de $|h|$ se tendrá que el cociente $\Delta f / h$ será muy próximo al valor $f_x(a , b)$, con lo cual podemos escribir $\Delta f \approx f_x(a , b) \cdot h$, siendo $\Delta f = f(a + h , b) - f(a , b)$. Pero entonces $\boxed{|\Delta f| \approx |f_x(a , b)| \cdot |h|}$, con lo cual, para un mismo $|h|$, el valor absoluto de la variación de la función, $|\Delta f|$, será tanto mayor cuanto más grande sea el valor absoluto de la derivada parcial respecto a $x$ de la función en $(a , b)$.
Y análogamente, cuando tomemos valores pequeños de $|k|$: Será $\boxed{|\Delta f| \approx |f_y(a , b)| \cdot |k|}$, siendo ahora $\Delta f = f(a , b + k) - f(a , b)$. Con lo cual, para un mismo $|k|$, el valor absoluto de la variación de la función, $|\Delta f|$, será tanto mayor cuanto más grande sea el valor absoluto de la derivada parcial respecto a $y$ de la función en $(a , b)$.

---

Y análogamente, para una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ y un punto P$(a, b, c)$ interior de su dominio, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)$ representa "la velocidad de variación" de la función en P, según la dirección del eje OX (cuando nos movamos en la recta que pasa por P y es paralela a OX); la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)$ representa lo mismo en la dirección del eje OY (cuando nos movamos pasando por P paralelamente a dicho eje), y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)$ representa lo mismo en la dirección del eje OZ.

---

Ejemplo 1: En el ejemplo de la función de tres variables de la pág. 7, donde era

$$w = sen(3x + y^2 - e^z) + \frac{ln(3x-2y+6z)}{xyz}$$

se obtuvo $w_x(-1 , 1 , 1) = 3 \cdot cos(-2 - e) - 3 = \boxed{-2'98232\ldots}$ : Esto significa que, alrededor del punto $(-1 , 1 , 1)$, modificando solamente un poco el valor $-1$ de $x$, la función tendrá valores un poco **mayores** que $f(-1 , 1 , 1)$ en **puntos anteriores** de la forma $(-1 - \delta , 1 , 1)$, con $\delta$ positivo muy pequeño, y tendrá valores un poco **menores** que $f(-1 , 1 , 1)$ en **puntos posteriores**

al $(-1\,,1\,,1)$ de la forma $(-1+\delta\,,1\,,1)$, con $\delta$ también positivo muy pequeño (esto es porque $f$ es "decreciente" en $(-1\,,1\,,1)$ en la dirección del eje OX).
Comprobación: La variación de la función en valor absoluto es $|\Delta f| \approx |w_x(-1\,,1\,,1)| \cdot |h| \cong 2'9823 \cdot \delta$. Así para $\delta = 0'01$, por ejemplo, la variación deberá ser aproximadamente 0'029823.
Veamos valores de $f$ en $(-1\,,1\,,1)$ y en $(-1-0'1,1\,,1)$ para compararlos:

$$f(-1\,,1\,,1) = sen(-2-e) = 0'99998\ldots$$

$$f(-1'01\,,1\,,1) = sen(-2'03-e) + \frac{\ln\ '97}{-1'01} = 1'02951\ldots$$

Se ve que este último valor es mayor que el anterior, pues hemos disminuido el valor de $x$ en 0'01, siendo la diferencia en valor absoluto entre ellos de 0'0295… (muy próxima a 0'0298 , como habíamos dicho).
Por el otro lado, el valor de $f$ en el punto $(-1+0'1,1\,,1)$ es:

$$f(-0'99\,,1\,,1) = sen(-1'97-e) + \frac{ln\ \ '03}{-0'99} = 0'96985\ldots$$

Y se ve que este valor es menor que el valor de la función en $(-1\,,1\,,1)$, pues hemos aumentado el valor de $x$ en 0'01, siendo la diferencia en valor absoluto entre ellos de 0'0301… (muy próxima a 0'0298, como habíamos dicho).

---

Ejemplo 2: Sea $w = xyz$ , de dominio $\mathbb{R}^3$. Y sea el punto $(-1\,,0\,,2)$ donde la función vale cero. Es $w_x(-1\,,0\,,2) = 0 \cdot 2 = 0$, $w_y(-1\,,0\,,2) = (-1) \cdot 2 = -2$ y $w_z(-1\,,0\,,2) = (-1) \cdot 0 = 0$, lo cual significa que la función dada varía muy poco alrededor del punto dado, haciendo pequeños desplazamientos en las direcciones de OX y OZ, mientras que la función "es decreciente" cuando hacemos pequeños desplazamientos a partir del punto dado en la dirección del eje OY.
Comprobemos con algunos valores:
$f(-1-0'1\,,0\,,2) = 0$ , $f(-1\,,0\,,2) = 0$ y $f(-1+0'1\,,0\,,2) = 0$ (la función es constante en la dirección de la recta paralela al eje OX, alrededor del punto).
$f(-1\,,0-0'1\,,2) = 0'2$ , $f(-1\,,0\,,2) = 0$ y $f(-1\,,0+0'1\,,2) = -0'2$ (la función decrece en la dirección de la recta paralela al eje OY, alrededor del punto).
$f(-1\,,0\,,2-0'1) = 0$ , $f(-1\,,0\,,2) = 0$ y $f(-1\,,0\,,2+0'1) = 0$ (la función es constante en la dirección de la recta paralela al eje OZ, alrededor del punto).

Nota: Cuando una derivada parcial vale cero, la función de dos variables o de tres variables no tiene que permanecer constante alrededor del punto en la dirección correspondiente, sino que podrá variar muy débilmente (como lo hace, por ejemplo, la función de una variable $f(x) = x^2$ alrededor del punto $x = 0$, en la dirección del eje OX, pues su derivada en el punto es cero pero la función no es constante alrededor del punto). Ver el siguiente ejemplo.

---

Ejemplo 3: Sea $w = 2x + y^2 - 4z$ , de dominio $\mathbb{R}^3$. Y sea el punto $(1\,,0\,,-2)$ donde la función vale 10. Tenemos $w_x(1\,,0\,,-2) = 2$ , $w_y(1\,,0\,,-2) = 2 \cdot 0 = 0$ y $w_z(1\,,0\,,-2) = -4$ . Lo cual significa que la función "crece" a velocidad 2 en la dirección de OX, la función varía muy poco en la dirección del eje OY y la función "decrece" a velocidad 4 en la dirección del eje OZ.
Veamos algunos valores:
$f(0'9,0\,,-2) = 9'8$ , $f(1\,,0\,,-2) = 10$ , $f(1'1,0\,,-2) = 10'2$ (crecimiento).
$f(1\,,-0'1\,,-2) = 10'01$ , $f(1\,,0-2) = 10$ , $f(1\,,0'1\,,-2) = 10'01$ (estabilidad).
$f(1\,,0\,,-2'1) = 10'4$ , $f(1\,,0\,,-2) = 10$ , $f(1\,,0\,,-1'9) = 9'6$ (decrecimiento).
Obsérvese que estamos tomando, a partir de las tres coordenadas del punto dado, incrementos de $-0'1$ y de $0'1$. Y los incrementos correspondientes de la función han resultado $-0'2$ y 0'2 en la dirección de OX (crecimiento de velocidad 2: los incrementos de $w$ son el doble de los de $x$ y los signos coinciden); han resultado $0'01$ y $0'01$ en la dirección de OY (estabilidad: los incrementos de $w$ se reducen mucho en valor absoluto respecto a los de $y$), y han resultado $0'4$ y $-0'4$ en la dirección de OZ (decrecimiento de velocidad 4: los incrementos de $w$ son el cuádruple de los de $z$ y los signos quedan cambiados).

# DERIVADAS PARCIALES

**Dominio de derivabilidad de una función elemental de dos o de tres variables**

Se llama "dominio de derivabilidad de una función de varias variables" al conjunto de puntos de su dominio de existencia donde dicha función sea "derivable" (o sea, que todas sus derivadas parciales primeras existan en dichos puntos).

1) Para calcular el dominio de derivabilidad de una "función elemental", lo primero que se hace es obtener el dominio de ésta (ver Sección 5.1).

2) Como los puntos donde puedan existir las derivadas parciales tienen que ser interiores del dominio de la función, a este dominio (que suponemos ya obtenido) hay que quitarle los puntos de su "borde" que formen parte del propio dominio . (El "borde" o "frontera" del dominio está formado por los puntos que separan dicho conjunto del resto del plano si hay dos variables o del resto del espacio si hay tres variables). Pero a veces, el borde del dominio no está incluido en el mismo; otras veces el dominio incluye partes de su borde, y en otras ocasiones el dominio incluye todos los puntos que están en su propio borde.

Ejemplos: 1) Si la función es de dos variables y su dominio es todo el plano, no tiene borde. 2) Si la función es de dos variables y su dominio es una región elíptica (región "interior" a una elipse), el borde es la propia elipse; pero ésta puede estar incluida en el dominio o no estarlo. 3) Si el dominio de una función de dos variables es medio círculo, su borde está formado por la media circunferencia asociada y el diámetro correspondiente; pues bien, puede suceder (entre otras muchas posibilidades) que ningún punto del borde pertenezca al dominio, que los puntos de la semicircunferencia pertenezcan al dominio pero los puntos del diámetro no pertenezcan (o viceversa), o bien que todo el borde forme parte del dominio. 4) Si la función es de tres variables y su dominio es la región del espacio limitada por el "paraboloide de revolución vertical" $z = x^2 + y^2$ la cual contiene al semieje positivo OZ, su borde es dicho "paraboloide", pero éste puede estar incluido o no en ese dominio. (Ver Sección 8.9).

3) Una vez que tengamos el dominio de la función sin su borde, calculamos sus funciones derivadas parciales primeras (dos en el caso de dos variables y tres en el caso de tres variables, como sabemos) y buscamos posibles puntos (entre los que queden) donde alguna de las derivadas parciales no exista. Quitados esos puntos (si los hay) lo que queda del dominio inicial es el "dominio de derivabilidad" de la función dada.

Ejemplos:

1) Sea la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Su dominio es todo $\mathbb{R}^2$, porque la inecuación $x^2 + y^2 \geq 0$ se cumple siempre. Por tanto, no tenemos borde y entonces no hay que quitarlo. Las derivadas parciales son: $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Observamos que en el punto $(0\,,0)$ dichas derivadas no existen, luego habrá que quitar este punto. En conclusión: El "dominio de derivabilidad" es todo el plano menos el origen de coordenadas.

2) Sea la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Su dominio es el conjunto de puntos del plano que cumplan la inecuación $4 - x^2 - y^2 \geq 0$: Es el círculo de centro el origen y radio 2, con su circunferencia incluida. Por tanto, ahora sí tenemos borde, que es esa circunferencia, la cual forma parte del dominio. Entonces habrá que quitarle al dominio obtenido los puntos de la circunferencia, quedando los demás puntos del círculo de centro el origen y radio 2. Las derivadas parciales son:

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \qquad z_y = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Observamos que los puntos donde se hacen cero los denominadores (donde no existirán las derivadas parciales) son los de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, que ya han sido quitados. Por tanto, no hay que quitar puntos adicionales. En conclusión: El “dominio de derivabilidad” es el círculo de centro el origen y radio 2, sin los puntos de su circunferencia.

3) Sea la función $z = \sqrt[3]{x^2 - y^2} + ln(x+1)$. Su dominio es el conjunto de puntos del plano que cumplan la inecuación $x + 1 > 0$: Es el semiplano limitado por la recta vertical $x = -1$, que incluye al origen de coordenadas, sin incluir los puntos de la recta mencionada (a la derecha de ésta). El borde del dominio es entonces esa recta vertical, que como no pertenece al dominio no es necesario quitarla. Las derivadas parciales son:

$$z_x = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-y^2)^2}} + \frac{1}{x+1} \qquad z_y = \frac{-2y}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-y^2)^2}}$$

Observamos que $z_x$ no existe cuando se cumpla $x + 1 = 0$. Pero eso lo cumplen los puntos de la recta vertical $x = -1$ que no forma parte del dominio. Por tanto, no hay nada que quitar por este motivo. Pero también observamos que ambas derivadas no existen en los puntos que cumplan $x^2 - y^2 = 0$. Y estos puntos son los de las dos rectas $y = x$ e $y = -x$, que se cortan perpendicularmente en el origen de coordenadas (son las bisectrices de los ángulos que forman los ejes). Pues bien, parte de esos puntos no están en el dominio de la función, pues quedan a la izquierda de la recta vertical $x = -1$, pero la mayor parte (incluyendo el propio origen) sí están en el dominio, luego habrá que quitarlos. En conclusión: El “dominio de derivabilidad” es el semiplano a la derecha de la recta vertical $x = -1$, sin incluirla, quitándole a este semiplano los puntos que estén en la recta $y = x$ y también los que estén en la recta $y = -x$.

4) Sea la función de tres variables $w = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 9}$ . Su dominio es el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que cumplan la inecuación $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 9 \geq 0$ , que son el exterior de la esfera de centro el punto $(2, -3, 0)$ y radio 3, incluidos los puntos de la superficie esférica correspondiente. El borde de este dominio es justamente la superficie esférica mencionada, luego para buscar el dominio de derivabilidad habrá que quitar sus puntos. O sea, nos quedamos con los puntos del espacio que cumplan $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 9 > 0$ . Las derivadas parciales son:

$$w_x = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+z^2-9}} \quad ; \quad w_y = \frac{y+3}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+z^2-9}} \quad ; \quad w_z = \frac{z}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+z^2-9}}$$

que existen en la parte del dominio que ha quedado. Por tanto, ese es el “dominio de derivabilidad” de la función dada (el exterior de la esfera de centro $(2, -3, 0)$ y radio 3, no incluida la correspondiente superficie esférica).

5) Sea la función $w = ln(2x + 3y - z - 6)$ . Su dominio es el subconjunto del espacio definido por la inecuación $2x + 3y - z - 6 > 0$ , que es el semiespacio limitado por el plano de ecuación $2x + 3y - z - 6 = 0$ , que no incluye al origen de coordenadas ni a los puntos de dicho plano (el cual corta al eje OX en 3, corta al eje OY en 2 y corta al eje OZ en $-6$). El borde de este dominio es dicho plano, que no está contenido en el mismo, luego no habrá que quitarle nada para ver dónde es derivable la función. Las derivadas parciales son:

$$w_x = \frac{2}{2x+3y-z-6} \quad ; \quad w_y = \frac{3}{2x+3y-z-6} \quad ; \quad w_z = \frac{-1}{2x+3y-z-6}$$

que existen en el dominio de la función dada, pues al ser $2x + 3y - z - 6 > 0$ , los denominadores de las derivadas no se anulan. Por tanto, la función es “derivable” en todo su dominio, luego éste es su “dominio de derivabilidad”.