DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE UNA Y VARIAS VARIABLES

(Prerrequisitos: Derivadas de funciones de una variable. Derivadas parciales)

Caso de función con una variable independiente

Para funciones de una variable, la existencia de derivada (ordinaria) en un punto $x = a$ (interior de su dominio) es equivalente a la existencia de recta tangente no vertical a la gráfica de dicha función en el punto correspondiente P $(a\ ,f(a))$. Y recordemos que recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto P es la que, pasando por dicho punto, se ajuste mejor a dicha gráfica, confundiéndose prácticamente con la parte de la misma que está muy cerca del punto P de contacto.

Otra cosa importante, en este caso de una sola variable, es que el acercamiento de un punto variable $a + h$ al punto fijo a sólo es posible en una dirección: La del eje OX donde tomamos ambos puntos. Y la única variante posible es que $a + h$ tienda hacia a por la derecha (cuando tomemos h positivo y con valor absoluto cada vez menor) o que $a + h$ tienda hacia a por la izquierda (cuando tomemos h negativo y con valor absoluto cada vez menor). Y ambas posibilidades producen el mismo resultado cuando la función es derivable:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Se recuerda que entonces la ecuación de la recta tangente en el punto de la gráfica P$(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$. Lo cual nos indica que al tomar $x = a + h$, el incremento de la variable dependiente $y - f(a)$ sobre esta recta tangente, es exactamente $f'(a) \cdot h$.

Destacamos ahora la siguiente propiedad, válida si la función f es derivable en $x = a$: Cuando tomemos un incremento h de la variable independiente suficientemente pequeño en valor absoluto (sea positivo o sea negativo), la diferencia entre el incremento de la variable dependiente dado por la función ($\Delta f = f(a + h) - f(a)$), y el incremento análogo dado por su recta tangente (que es $f'(a) \cdot h$, como dijimos anteriormente), es mucho menor que el valor absoluto de h. (COMPROBAR, SOBRE LA FIGURA DE UNA GRÁFICA CON RECTA TANGENTE NO VERTICAL EN UN CIERTO PUNTO, QUE DICHA DIFERENCIA DE INCREMENTOS ES JUSTAMENTE LA SEPARACIÓN VERTICAL ENTRE LA GRÁFICA Y SU RECTA TANGENTE). Así, cuando se toma un h positivo y pequeño, veremos en la figura que dicha separación vertical (a la derecha del punto P) es menor que el h tomado; pero si h es muy pequeño, la separación anterior ya no se aprecia en la figura pues su valor es casi cero, luego estaremos viendo que esa diferencia es mucho más pequeña que el h tomado. Y lo mismo sucede a la izquierda de P para valores negativos de h que sean suficientemente pequeños en valor absoluto.

Lo dicho anteriormente se expresa en forma matemática así: $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f - f'(a) \cdot h}{h} = 0}$

(el numerador, que es la diferencia entre el incremento dado por la función y el dado por la recta tangente, tiende a cero mucho más rápidamente que el denominador). (Se expresa también diciendo que "el numerador es un infinitésimo de orden superior al denominador").

Lo cual es cierto, porque al ser derivable la función, será $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = f'(a)$, con lo cual el límite de la diferencia $\frac{\Delta f}{h} - f'(a)$ será cero. Pero $\frac{\Delta f}{h} - f'(a) = \frac{\Delta f - f'(a) \cdot h}{h}$.

Por ello, para incrementos h que sean pequeños en valor absoluto, puede escribirse:

$$\boxed{\Delta f \approx f'(a) \cdot h}$$

(si la diferencia de ambos tiende a cero rápidamente, ambos tenderán a parecerse muchísimo).

O sea, tenemos la fórmula de aproximación:

$$\boxed{f(a+h)-f(a) \approx f'(a)\cdot h} \quad (*)$$

muy usada e importante, siendo el valor absoluto del error cometido (diferencia entre los valores del primer miembro y del segundo miembro) menor que $|h|$ (siempre que este valor absoluto se tome suficientemente pequeño), por lo dicho anteriormente.

Concepto de diferencial en el caso de función con una variable independiente

Se llama "diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ ", donde la función se supone "derivable" en el punto, a la nueva función $f'(a)\cdot h$ (de variable independiente h).

Se escribe $\boxed{df = f'(a)\cdot h}$, o bien $\boxed{dy = f'(a)\cdot h}$, y se dice que f es "diferenciable" en el punto $x = a$. Por tanto, para funciones de una variable "derivable" implica "diferenciable" y recíprocamente (o sea, "diferenciable" implica "derivable").

Con esta nueva nomenclatura, podemos escribir la fórmula de aproximación (*) dada en el apartado anterior, así:

$\boxed{\Delta f \approx df}$ o bien $\boxed{\Delta y \approx dy}$ (para valores pequeños de $|h|$)

Nota: Cuando no se especifique el valor de la variable x, la diferencial es función de x y de h, escribiéndose $\boxed{df = f'(x)\cdot h}$, o bien $\boxed{dy = y'\cdot h}$.

Ahora bien, cuando lo anterior se aplica a la función $y = x$ (función identidad) resulta la expresión $\boxed{dx = h}$ (pues será $dy = 1\cdot h = h$, pero como la función es $y = x$, por convenio se escribe $dx = h$).

Combinando la dicho en los dos párrafos anteriores, se obtiene la conocida notación

$$\boxed{dy = y'\cdot dx}$$

que sirve para la escritura de la derivada y' como el cociente $\boxed{\frac{dy}{dx}}$ (notación de Leibniz de la función derivada).

Nota importante: El incremento de la variable independiente de la función $y = f(x)$, que veníamos llamando h, aparece en muchos textos escrito como Δx. Y como existe el convenio que hace $dx = h$, también podemos escribir $dx = \Delta x$, por lo cual se usan indistintamente dx o Δx en muchas fórmulas de Física y Química, siempre que x sea variable independiente.
Sin embargo, para la variable dependiente no puede escribirse $dy = \Delta y$ (ni $df = \Delta f$ cuando aludimos a la función f), pues lo cierto es $\boxed{dy \approx \Delta y}$ o bien $\boxed{df \approx \Delta f}$ como dijimos más arriba.
En conclusión, **puede escribirse $dx = \Delta x$, pero no puede ponerse signo de igualdad entre los dos símbolos dy y Δy (o bien df y Δf) sino signo de aproximación entre los mismos**.

Ejemplo de uso de la diferencial para aproximar el incremento de una función de una variable (uso práctico de la fórmula de aproximación (*) del comienzo de esta página):

Enunciado: Obtener, mediante el uso de una diferencial, la variación aproximada del volumen de una esfera de 3 m. de radio cuando el mismo disminuye en 1 cm.

Respuesta: La función que nos da el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. La variable independiente única es r y la función es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica. Queremos conocer ΔV (variación o incremento del volumen) en forma aproximada, cuando la variable independiente pasa del valor 3 (valor de a en nuestro problema) al valor $3 - 0'01 = 2'99$ (aquí el incremento de la variable independiente, que llamábamos anteriormente h, Δx o dx, es $dr = -0'01$).

Habrá que aplicar la fórmula de aproximación $\Delta V \approx dV$ en el punto $r = 3$ y con el incremento $-0'01$. Necesitamos la derivada $V' = 4\pi \cdot r^2$, ya que $dV = V' \cdot dr$. Se tiene entonces, para $r = 3$ y para el incremento $dr = -0'01$, un incremento de volumen $\Delta V \approx 4\pi \cdot 3^2 \cdot (-0'01)$, o sea $\boxed{\Delta V \approx -0'36\,\pi}$ (m^3). Lo cual nos está diciendo que el volumen habrá disminuido (por ser negativo su incremento) en aproximadamente $0'36\,\pi$ (m^3).

Comprobación: El volumen inicial es $V(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\,\pi$ (m^3). Y el volumen después de disminuir el radio en 1 cm. será $V(2'99) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2'99^3 = 35'641199\ldots\pi$ (m^3). Vemos entonces que el volumen efectivamente ha disminuido, y restando los dos valores se tiene el valor exacto de la variación de volumen en valor absoluto, que es $0'3588013\ldots\pi$ (m^3). Antes obtuvimos $|\Delta V| \approx 0'36\,\pi$ (m^3), que es un resultado muy próximo (pero fue obtenido más rápidamente y con operaciones sencillas que no requieren el uso de una calculadora). Además tenemos:

$$|error| = |valor\ aproximado - valor\ exacto| = 0'0011987\ldots\pi = 0'0037658\ldots$$

con lo cual se está cumpliendo la propiedad dicha cuando establecimos la fórmula de aproximación (*), o sea que el error cometido en valor absoluto es menor que $|h|$, siempre que este valor absoluto sea suficientemente pequeño. Aquí $|h| = |dr| = 0'01$ es bastante pequeño y se cumple efectivamente: $|error| = 0'0037658\ldots < 0'01$.

Caso de función con dos variables independientes

Cuando se tiene una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes y consideramos un punto $(a\,, b)$ interior del dominio D de la función, la aproximación al punto $(a\,, b)$ utilizando otro punto variable de la forma $(a + h\,, b + k)$ se puede hacer en infinitas direcciones, siguiendo rectas diferentes, siguiendo curvas muy variadas o moviendo el punto de modos más complicados. Esto contrasta con lo dicho para funciones de una variable, donde explicábamos que hay una sola dirección de aproximación del punto $a + h$ hacia el punto a, que es siguiendo el eje OX.

Lo anterior representa un cambio radical, que puede traer como consecuencia comportamientos inesperados de algunas funciones de dos variables. Por ejemplo, se sabe que hay funciones de dos variables que son "derivables" en un cierto punto (poseen las dos derivadas parciales primeras en ese punto) y sin embargo no son continuas en dicho punto (comportamiento inesperado, porque esto no ocurre nunca con funciones de una variable, donde "derivable implica continua"; ver ejemplo de la página siguiente al respecto). Y hay otros comportamientos inesperados, uno de los cuales se explica a continuación.

Lo análogo a "la recta tangente" a la gráfica de una función de una variable (que es frecuentemente una curva o un arco de curva en el plano $\mathbb{R}^2$) es "el plano tangente" a la gráfica de una función de dos variables (que es frecuentemente una superficie o una región de superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$). Y entendemos como plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$, en un punto P$(a\,, b\,, f(a\,, b))$ de la misma, el que pasa por dicho punto y se ajusta mejor a dicha gráfica en la cercanía del punto P de contacto, en todas las direcciones posibles, de modo que el plano se confunda prácticamente con la región de la gráfica que está situada muy cerca del punto P (nótese la analogía con la definición de recta tangente dada en la pág.1).

Pues bien, sabemos que si una función de una variable es derivable en un punto $x = a$, su gráfica tiene recta tangente no vertical en el correspondiente punto $\mathrm{P}(a\,,f(a))$. Sin embargo, puede suceder que una función de dos variables sea "derivable" en un punto $(a\,,b)$, interior de su dominio, y su gráfica no tenga plano tangente en el punto correspondiente $\mathrm{P}(a\,,b\,,f(a\,,b))$. (Es otro comportamiento inesperado de las funciones de dos variables). Esto puede ocurrir, por ejemplo, si la función no es continua en $(a\,,b)$, a pesar de ser derivable en ese punto.

Concepto de diferenciable en el caso de función con dos variables independientes

Daremos dos definiciones de función de dos variables "diferenciable" en un punto. Una definición geométrica es la que sigue:

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE "DIFERENCIABLE": Se dice que "la función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto $(a\,,b)$", interior de su dominio, si su gráfica posee plano tangente no vertical en el punto $\mathrm{P}(a\,,b\,,f(a\,,b))$.

Y una definición analítica, que es:

DEFINICIÓN ANALÍTICA DE "DIFERENCIABLE": Se dice que "la función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto $(a\,,b)$ ", interior de su dominio, si es "derivable" en dicho punto y además se cumple

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - [f_x(a\,,b)\cdot h + f_y(a\,,b)\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

siendo $\Delta f = f(a+h\,,b+k) - f(a\,,b)$.

Entonces, cuando la función sea diferenciable en el punto mencionado, se llama "diferencial de f en $(a\,,b)$" a la nueva función de dos variables independientes h y k :

$$\boxed{df = f_x(a\,,b)\cdot h + f_y(a\,,b)\cdot k}$$

Nota 1: Se demuestra que las dos definiciones dadas de "diferenciable" son equivalentes.

Nota 2: Para funciones de una variable, también podríamos haber dado dos definiciones, una geométrica y otra analítica. (La primera diría: "diferenciable es que haya recta tangente no vertical en el punto correspondiente de la gráfica" y la segunda diría: "diferenciable es que sea derivable y que el límite del cociente $\frac{\Delta f - f'(a)\cdot h}{h}$ sea cero, cuando $h \to 0$").
De hecho, basta que f sea "derivable" (que exista la "derivada ordinaria" en el punto), para que se cumplan ambas definiciones, luego su equivalencia es inmediata. Por tanto, se puede decir para funciones de una variable que "derivable" implica "diferenciable".

Nota 3: Sin embargo, para funciones de dos variables esto es falso. En efecto, en la definición analítica de "diferenciable" para estas funciones se pide que la función sea "derivable" (que existan las dos "derivadas parciales" primeras en el punto) y además que el límite mencionado sea cero. Pero hay funciones de dos variables que son derivables, pero dicho límite no existe, con lo cual esas funciones serán "derivables" pero no serán "diferenciables".

Ejemplo: La función definida a trozos $f(x,y) = 0$, si $x = 0$ o bien $y = 0$; $f(x,y) = 1$, si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, es una función "derivable" en $(0\,,0)$, resultando $f_x(0\,,0) = 0$ y $f_y(0\,,0) = 0$, como puede comprobarse fácilmente aplicando las respectivas definiciones de estas derivadas parciales. Y sin embargo, esta función no es continua en $(0\,,0)$ porque su "límite doble" en dicho punto no existe (en efecto, sus "límites direccionales" usando los ejes OX y OY dan cero y los restantes "límites direccionales" dan 1).

Pero el límite del cociente $\frac{f(h,k)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot h+f_y(0,0)\cdot k]}{\sqrt{h^2+y^2}}$, cuando $(h\,,k)\to(0\,,0)$, tampoco existe (como se verá a continuación), luego esta función no es "diferenciable" en $(0\,,0)$.
En efecto, ese cociente se reduce en este caso a $\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, pues $f(0\,,0)=0$ y las derivadas parciales valen 0. Entonces, cuando busquemos el "límite direccional" sobre el eje OX deberemos tomar $k=0$ y tender h a cero, obteniéndose $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{\sqrt{h^2}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{|h|}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$. Cuando busquemos el "límite direccional" sobre el eje OY deberemos tomar $h=0$ y tender k a cero, obteniéndose $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)}{\sqrt{k^2}}=\lim\limits_{k\to 0}\frac{0}{|k|}=\lim\limits_{k\to 0}0=0$. Y cuando busquemos el "límite direccional" sobre una recta oblicua de ecuación $k=m\cdot h$ con $m\neq 0$, se tendrá $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,mh)}{\sqrt{h^2+(mh)^2}}$. Pero el numerador valdrá constantemente 1 (pues $h\neq 0$ y $mh\neq 0$) y el denominador tenderá a cero siendo positivo, con lo cual este límite será $\boxed{+\infty}$. Por tanto, el "límite doble" que habíamos mencionado en la página anterior no existe (pues hay "límites direccionales" diferentes).

Nota 4: Cuando no se especifique el punto $(a\,,b)$, "la diferencial" quedará $\boxed{df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k}$, o si llamamos $z=f(x,y)$ se escribe $\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot k}$ (siendo df o dz una función de las cuatro variables: x, y, h y k).

Nota 5: Si aplicamos lo anterior a la función $z=x$, se tiene $dz=h$, y como es $z=x$, se escribe por convenio $\boxed{dx=h}$. Análogamente, para la función $z=y$, se tiene $dz=k$, y como es $z=y$, se escribe por convenio $\boxed{dy=k}$.

Con estos convenios, la expresión de la diferencial de $z=f(x,y)$ cambia de aspecto. Se escribe:
$\boxed{df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy}$ o bien $\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy}$ o también $\boxed{dz=z_x\cdot dx+z_y\cdot dy}$
Y cuando se especifique el punto:
$\boxed{df=\frac{\partial f}{\partial x}(a\,,b)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a\,,b)\cdot dy}$ o bien $\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}(a\,,b)\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}(a\,,b)\cdot dy}$

Propiedades importantes relacionadas con el concepto de "función diferenciable" cuando hay dos variables independientes frente al caso en que haya una variable independiente

Se demuestran matemáticamente las siguientes propiedades:

1) **Para 2 variables**: "Diferenciable" implica "continua", pero "continua" no implica "diferenciable". **Y para 1 variable**: Mismas propiedades.

2) **Para 2 variables**: "Diferenciable" implica "derivable", pero "derivable" no implica "diferenciable" (acabamos de ver un ejemplo de esto último). **Y para 1 variable**: Ya vimos en la pág. 2 que "diferenciable" implica "derivable" y recíprocamente (o sea, que también "derivable" implica "diferenciable").

3) **Para 2 variables**: "Continua" y además "derivable" no implica "diferenciable". **Y para 1 variable**: Solamente "derivable" (lo cual ya implica "continua") implica "diferenciable" (como acabamos de decir en el apartado anterior).

4) **Para 2 variables**: Si una función $f(x,y)$ es "derivable" en un punto $(a\,,b)$ y sus funciones derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen también en un entorno de $(a\,,b)$, siendo

"continuas" en dicho punto, entonces esa función f es "diferenciable" en $(a\,,b)$. (Propiedad de uso muy frecuente). **Y para 1 variable**: Solamente con que $f(x)$ sea "derivable" en un punto a, ya la función es "diferenciable" en dicho punto (establecido en los apartados 2 y 3).

5) **Para 2 variables**: Si $f(x,y)$ es "diferenciable" en $(a\,,b)$, se puede usar en ese punto la "fórmula de aproximación":

$$\boxed{f(a+h\,,b+k)-f(a\,,b)\approx f_x(a\,,b)\cdot h+f_y(a\,,b)\cdot k} \quad (**)$$

válida solamente para incrementos h y k suficientemente pequeños en valor absoluto.
Además, **el error cometido al aplicar la fórmula anterior**, que es la diferencia entre el valor aproximado obtenido para $f(a+h\,,b+k)$ al despejarlo en (**) y el valor exacto de f en el mismo punto $(a+h\,,b+k)$, cumple la siguiente acotación:

$$\boxed{|error|<\sqrt{h^2+k^2}} \ , \quad \text{si } |h| \text{ y } |k| \text{ son suficientemente pequeños}$$

El valor $\sqrt{h^2+k^2}$ se llama "una cota superior" del valor absoluto del error cometido al usar la fórmula de aproximación (**). Esta cota sólo es segura si los incrementos son suficientemente pequeños en valor absoluto, por lo cual, en caso de tener que usar incrementos dados, que no puedan variarse y no sean muy pequeños en valor absoluto, debe hablarse de "**posible** cota superior" ya que la fórmula de acotación podría fallar en esos casos.

Para 1 variable: La fórmula similar a (**) es la fórmula (*) dada en la pág. 2. Y la fórmula similar a $|error|<\sqrt{h^2+k^2}$, sería $|error|<|h|$ (propiedad mencionada en la misma pág. 2).

Diferenciabilidad de las funciones elementales de una o dos variables independientes

Recordamos que una función se llama "elemental" cuando viene definida explícitamente por una única expresión, resultado de operar con "funciones básicas" (recordarlas en Sección 2.2). Y esto vale para funciones de una variable y para funciones de dos o más variables.

Cuando tengamos una función de una o dos variables que sea "elemental", se tienen unas propiedades especiales, que no cumplen, en general, las demás funciones de una o dos variables (por ejemplo, no las cumplen normalmente las funciones definidas a trozos).

Entre dichas propiedades especiales, tenemos:

1) Toda función "elemental" es continua en su dominio.

2) Las derivadas parciales de una función "elemental" son nuevas funciones "elementales".

3) Como las derivadas parciales de funciones "elementales" son nuevas funciones "elementales", dichas derivadas serán continuas donde existan. Con lo cual, si una función de dos variables es "elemental" y es "derivable" en un punto, también será "diferenciable" en dicho punto (por la propiedad 4 dada en el apartado anterior).
Y para funciones de una variable "elementales" (así como para las "no elementales"), donde sean "derivables" serán "diferenciables".

Uso de la diferencial para obtener un valor aproximado de una función de dos variables mediante el uso de la fórmula (**): Lo explicaremos con un ejemplo. En otros, se procede por analogía.

Enunciado: Hallar valor aproximado de $f(x,y) = ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$ en el punto $(1'03\,, 0'98)$, mediante el uso de la diferencial de esa función en un punto adecuado, dando una posible cota superior del error cometido.

Respuesta: Está claro que la función dada es una "función elemental", cuyo dominio será el conjunto de puntos (x,y) del plano que cumplan las condiciones $y \geq 0$, $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1 > 0$. Este dominio incluye, entre otros puntos del plano, todos los que cumplen $x \geq 1/2$ e $y \geq 1/2$ (llamemos A la región del plano formada por esos puntos), pues entonces $\sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{0'5} \cong 0'7937$ y $\sqrt[4]{y} \geq \sqrt[4]{0'5} \cong 0'8409$, con lo cual $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} > 1$. Así vemos que la región A, limitada por las rectas perpendiculares $x = 1/2$ e $y = 1/2$ y que queda contenida en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, es parte del dominio de la función dada. Por lo cual queda claro que el punto dado $(1'03, 0'98)$, al ser interior de A, es punto interior del dominio de la función f dada. Un punto adecuado (de referencia) para obtener la aproximación pedida tendrá que ser un punto **próximo al dado** (para que los incrementos de las variables cuando pasemos de uno al otro sean pequeños en valor absoluto); que también sea **interior del dominio** donde además **se conozca el valor de la función** o sea muy fácil de hallar, y también **donde la función sea "derivable"** (con lo cual la función será diferenciable por ser "elemental" y entonces podremos aplicar la fórmula de aproximación (**) de la página anterior).
En este caso, un punto evidentemente adecuado sería el $(1\,,1)$, pues está muy cerca del punto dado, es interior de la misma región A contenida en el dominio, donde el valor de la función es $f(1\,,1) = ln(1+1-1) = 0$ y además la función es "derivable" en ese punto, ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$$

las cuales existen en el punto elegido (porque sus denominadores en el mismo valen 3 y 4 respectivamente). Los valores de ambas derivadas parciales en el punto elegido son: $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = \frac{1}{3}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}1) = \frac{1}{4}$. Y los incrementos de las variables x e y para pasar del punto de referencia $(1\,,1)$ al punto dado $(1'03\,, 0'98)$ son $h = 0'03$ y $k = -0'02$ (bastante pequeños en valor absoluto).

Entonces, al ser f "diferenciable" en el punto $(1\,,1)$, podemos aplicar la fórmula de aproximación (**), usando los incrementos pequeños $h = 0'03$ y $k = -0'02$ y se tiene:

$$\boxed{f(1+0'03\,, 1-0'02) - f(1\,,1) \approx f_x(1\,,1)\cdot 0'03 + f_y(1\,,1)\cdot(-0'02)}$$

con lo cual: $\boxed{f\left(1'03\,,0'98\right) \approx f(1\,,1) + \frac{1}{3}\cdot 0'03 + \frac{1}{4}\cdot\left(-0'02\right) = 0'005}$

Así la función dada tiene en el punto indicado un valor aproximado de 0'005.

Y una **posible** cota superior del error cometido es: $\sqrt{(0'03)^2 + (-0'02)^2} \cong 0'0360555$. O sea, que podemos estimar: $\boxed{|error| < 0'0360555}$

Comprobación: Usando calculadora resulta $f(1'03\,, 0'98) \cong 0'0048519$ (vemos el parecido con el valor aproximado obtenido 0'005) y también podemos ver el verdadero error cometido que es, en valor absoluto:

$$|error| = |valor\ aproximado - valor\ exacto| \cong |0'005 - 0'0048519| = 0'0001481$$

el cual, efectivamente, resulta mucho menor que la cota obtenida que era 0'0360555.

Caso de función con tres variables independientes

Cuando tengamos una función $f(x,y,z)$ de tres variables independientes y consideremos un punto $(a\,,b\,,c)$ interior de su dominio, la situación es parecida en muchos aspectos a lo que ocurre con funciones de dos variables. Así, el punto variable (x,y,z), o bien $(a+h\,, b+k\,, c+l)$, podrá aproximarse de infinitas maneras al punto fijo $(a\,,b\,,c)$ (más posibilidades todavía, porque ahora la aproximación es en el espacio $\mathbb{R}^3$ y no en el plano $\mathbb{R}^2$).

Por tanto, son previsibles ahora comportamientos parecidos a los de las funciones de dos variables, con la complicación de que hay una variable independiente más. Por ejemplo, sabemos que la gráfica de una función de tres variables ya no puede representarse geométricamente (y por tanto, no podrá dibujarse), puesto que sus puntos tienen cuatro coordenadas. En cambio, la gráfica de una función de dos variables puede siempre representarse geométricamente, porque como sabemos está en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Cuando la función sea de tres variables, se descarta entonces la "definición geométrica" para el concepto de "diferenciable en un punto": Cuando había una variable, la hubiésemos podido hacer usando "la recta tangente a la gráfica". Y cuando había dos variables, la hicimos usando "el plano tangente a la gráfica" (ver DEFINICIÓN "GEOMÉTRICA" DE DIFERENCIABLE en la pág. 4), pero ahora no podemos hacer una definición geométrica análoga.

Por tanto, para funciones de tres variables utilizaremos solamente la "definición analítica" del concepto de "función diferenciable":

Diremos que "la función $f(x,y,z)$ es diferenciable en el punto $(a\,,b\,,c)$" (interior de su dominio), cuando sea derivable en dicho punto y además se cumpla:

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{\Delta f - [f_x(a,b,c)\cdot h + f_y(a,b,c)\cdot k + f_z(a,b,c)\cdot l]}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = 0$$

siendo $\Delta f = f(a+h\,,b+k\,,c+l) - f(a\,,b\,,c)$.

Además, cuando la función sea diferenciable en el punto, se llama "diferencial de f en $(a\,,b\,,c)$" a la nueva función de tres variables independientes h, k y l siguiente:

$$\boxed{df = f_x(a\,,b\,,c)\cdot h + f_y(a\,,b\,,c)\cdot k + f_z(a\,,b\,,c)\cdot l}$$

Y otra vez, una consecuencia muy importante de la anterior definición es la propiedad $\boxed{\Delta f \approx df}$ (si los tres incrementos se toman pequeños en valor absoluto), lo cual se expresa a través de la fórmula de aproximación análoga a las anteriores:

$$\boxed{f(a+h\,,b+k\,,c+l) - f(a\,,b\,,c) \approx f_x(a\,,b\,,c)\cdot h + f_y(a\,,b\,,c)\cdot k + f_z(a\,,b\,,c)\cdot l} \quad (***)$$

Válida, como decimos, para incrementos h, k y l de las tres variables que sean pequeños en valor absoluto.

Y, para $|h|$, $|k|$ y $|l|$ suficientemente pequeños, se tiene $\boxed{|error| < \sqrt{h^2+k^2+l^2}}$.

También las notaciones, cuando el punto $(a\,,b\,,c)$ sea otro cualquiera (x,y,z) donde f sea diferenciable, son análogas a las dadas para el caso de dos variables. E igualmente se obtienen de un modo análogo las igualdades $\boxed{dx = h}$, $\boxed{dy = k}$ y $\boxed{dz = l}$, con lo cual la expresión de "la diferencial" de una función de tres variables $w = f(x,y,z)$ puede darse como:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{dw = w_x\cdot dx + w_y\cdot dy + w_z\cdot dz}$$

Finalmente y muy importante, las propiedades 1 a 4 que dimos en la pág. 5 para funciones diferenciables de dos variables se siguen cumpliendo de modo análogo para funciones de tres variables. Y lo dicho específicamente para funciones "elementales" en la pág. 6, también se cumple en este caso.

Ejemplo de utilización de "una cierta diferencial" para obtener valor aproximado de una expresión numérica que pueda interpretarse como el valor desconocido de una cierta función de tres variables en un punto de su dominio:

Enunciado: Calcular valor aproximado del número real $A = 1'2^{2'9} - \sqrt[3]{2 \cdot 1'2 - 3 \cdot 2'9 + 5 \cdot 3'1}$ utilizando para ello la diferencial de una cierte función de tres variables, obteniendo además una posible cota superior del error cometido.

Respuesta: Vemos que A puede interpretarse como el valor $f(1'2\,,2'9\,,3'1)$, siendo

$$f(x,y,z) = x^y - \sqrt[3]{2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 \cdot z}$$

cuyo dominio es el semiespacio donde se cumple la inecuación $\boxed{x > 0}$ (la región que está por delante del plano coordenado OYZ, de ecuación $x = 0$, no quedando incluido este plano). Entonces, calcular un valor aproximado de A equivale a calcular un valor aproximado de la función elemental $f(x,y,z)$ en el punto $(1'2\,,2'9\,,3'1)$ de su dominio (pues $1'2 > 0$). Y esto se hace de modo similar a como lo hicimos en el ejemplo dado anteriormente para una función de dos variables.
En primer lugar, debemos elegir un punto adecuado como referencia: En este caso podemos tomar el punto $(a,b,c) = (1,3,3)$, ya que es interior del dominio de f y cercano al $(1'2\,,2'9\,,3'1)$, siendo el valor de la función en dicho punto muy fácil de calcular, pues $f(1,3,3) = -1$, y además la función elegida es "derivable" en ese punto de referencia. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3y+5z)^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot lnx + \frac{1}{\sqrt[3]{(2x-3y+5z)^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{5}{3\sqrt[3]{(2x-3y+5z)^2}}$$

las cuales están definidas en todos los puntos del dominio de la función f (donde ha de ser solamente $x > 0$) y que además cumplan la condición $2x - 3y + 5z \neq 0$. Pues bien, el punto de referencia cumple estas dos condiciones ($1 > 0$ y $2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 8$), luego la función f es "derivable" en el mismo (y al ser "elemental", también será "diferenciable" en ese punto).
Los valores de las tres derivadas parciales primeras de f en el punto de referencia son:

$$f_x(1\,,3\,,3) = \frac{17}{6} \quad ; \quad f_y(1\,,3\,,3) = \frac{1}{4} \quad ; \quad f_z(1\,,3\,,3) = -\frac{5}{12}$$

Y los tres incrementos de las variables, para pasar del punto $(1\,,3\,,3)$ al punto $(1'2\,,2'9\,,3'1)$, son $h = 0'2$, $k = -0'1$ y $l = 0'1$ (son pequeños en valor absoluto, pero no mucho).
Podemos entonces aplicar la fórmula de aproximación (***), utilizando el punto de referencia elegido y los incrementos anteriores. Así se tiene:

$$\boxed{f(1'2\,,2'9\,,3'1) - f(1\,,3\,,3) \approx f_x(1\,,3\,,3) \cdot 0'2 + f_y(1\,,3\,,3) \cdot (-0'1) + f_z(1\,,3\,,3) \cdot 0'1}$$

con lo cual $\boxed{A \approx -1 + (17/3) \cdot 0'1 - (1/4) \cdot 0'1 - (5/12) \cdot 0'1 = -0'5}$

Por tanto, un valor aproximado del número real A es $-0'5$. Y una **posible** cota superior del error cometido, en valor absoluto, es: $\sqrt{0'2^2 + (-0'1)^2 + 0'1^2} = \sqrt{0'06} = 0'2449489\ldots$

Comprobación: El valor de A obtenido con la calculadora es $-0'3985988\ldots$ (parecido al valor aproximado que hemos obtenido, $-0'5$, pero ahora el error cometido es bastante grande comparando con el ejemplo análogo que hemos puesto en el apartado de funciones de dos variables (pues allí los incrementos de las variables eran mucho más pequeños que en este caso).
Sin embargo, gracias a haber obtenido con calculadora el valor exacto de la función, sabemos que el auténtico error cometido en valor absoluto es $0'1014012\ldots$, que es menor que la cota que habíamos hallado 0'2449489… (luego en este caso la acotación del error también se ha cumplido).
