FUNCIONES IMPLÍCITAS DE UNA, DOS Y TRES VARIABLES

(Prerrequisitos: Derivadas parciales. Diferenciales de funciones de una y varias variables. Vectores gradiente y derivadas direccionales)

Introducción

Las funciones reales de una variable no siempre admiten una "definición explícita" (con la variable dependiente despejada).
Por ejemplo, veremos en el próximo apartado que la ecuación $x^2 + xy + y^3 = 11$ "define implícitamente" a y como función de x, de modo que la imagen de $x = 1$ sea $y = 2$, pero no tenemos una expresión que nos defina esa función con y despejada, pues la ecuación dada es de tercer grado en esa variable, la cual aparece en dos términos con distinto grado. Por ello, diremos que esa función es "implícita" (no "elemental" ni "definida a trozos").
Sin embargo, hay muchos otros casos en que la variable dependiente es despejable de una ecuación del tipo $F(x,y) = 0$ dada, en cuyo caso diremos que la función **no es "implícita"**, sino que "está definida implícitamente por la ecuación dada", pero la función sería "elemental" (si el despeje conduce una única expresión) o es "definida a trozos" (si el despeje conduce a más de una expresión).

Lo mismo ocurre con las funciones reales de dos o más variables, donde no siempre aparece la variable dependiente despejada, o con posibilidad de despejarse de una ecuación dada del tipo $F(x,y,z) = 0$.
Por ejemplo, veremos en el tercer apartado de esta misma Sección que la ecuación

$$sen\, z + (1 + x^2)^y + y^2 - 2y + z = 0$$

"define implícitamente" a z como función de (x,y), de modo que la imagen del punto $(0\,,1)$ sea $z = 0$, pero tampoco podemos despejar z de la ecuación dada, ya que aparece en dos términos diferentes (una vez en $sen\, z$ y otra vez sola). Por tanto, diremos que esa función de las dos variables (x,y) es "implícita".
Pero, en cambio, la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ "define implícitamente" a z como función de (x,y) de modo que la imagen del punto $(1\,,-2)$ sea $z = -2$, pero en este caso no debe decirse que esa función es "implícita", pues admite la "definición explícita" que resulta de despejar z de la ecuación anterior y elegir la expresión que le corresponde: $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (por ser el valor dado de z negativo). Por tanto, esta función es realmente "elemental".

Sin embargo, en la práctica necesitamos muchas veces conocer las derivadas de ciertas funciones implícitas, muchas de ellas resultantes de resolver "ecuaciones diferenciales ordinarias" de las más sencillas (Sección 7.6). Por ejemplo, para poder comprobar que esas funciones cumplen dichas ecuaciones, hay que saber obtener sus derivadas.

Hemos explicado en la Sección 3.1 cómo pueden obtenerse las derivadas ordinarias de funciones implícitas de una sola variable (dándolas por existentes, sin entrar en las condiciones matemáticas que garanticen esa existencia). Ahora, sin embargo, podemos establecer esas condiciones, no solo para funciones reales de una variable sino también para funciones reales de dos y de tres variables. Además veremos dos modos de obtener las derivadas parciales de estas últimas.

Los conceptos de "entornos" unidimensionales (en $\mathbb{R}$), bidimensionales (en $\mathbb{R}^2$) y tridimensionales (en $\mathbb{R}^3$) que se considerarán en lo que sigue, se suponen conocidos y han sido definidos al comienzo de la Sección 6.1.

Casos de funciones implícitas de una variable independiente

FUNCIONES IMPLÍCITAS DE UNA, DOS Y TRES VARIABLES

Daremos en primer lugar un Teorema que garantiza la existencia de una función de una variable, $y = f(x)$, "definida implícitamente" por una cierta ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, la cual podrá ser una función "verdaderamente implícita" o podrá tener alguna "definición explícita" que se obtendrá despejando la variable y en la ecuación dada.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (caso de funciones reales de una variable real definidas implícitamente):

Sea la ecuación $F(x, y) = 0$, que define la "curva de nivel cero" de la función de dos variables $z = F(x, y)$, y sea $P(a, b)$ un punto "interior" del dominio de F, cumpliéndose las siguientes condiciones:
1) $\boxed{F(a, b) = 0}$, o sea el punto P cumple la ecuación dada.
2) $z = F(x, y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno bidimensional de P.
3) La derivada parcial de $F(x, y)$ respecto a y es diferente de cero en el punto P.

Entonces, **existe una única función $y = f(x)$**, de dominio un cierto entorno unidimensional de $x = a$, "definida implícitamente" por la ecuación $F(x, y) = 0$, la cual tiene las siguientes propiedades:
a) $\boxed{f(a) = b}$, o sea, la gráfica de esta función $y = f(x)$ pasa por el punto $P(a, b)$.
b) La función $y = f(x)$ cumple la ecuación $F(x, y) = 0$, para todo x de su dominio. O sea, se cumple la identidad

$$\boxed{F[x, f(x)] \equiv 0}, \text{ para todo } x \text{ del dominio de } f.$$

c) La función $y = f(x)$ tiene derivada primera continua en un cierto entorno unidimensional de $x = a$ (contenido en su dominio).

Nota 1: La condición 1) de la hipótesis nos garantiza que la mencionada "curva de nivel" existe en $\mathbb{R}^2$ pues incluye al menos el punto P (se ve en la demostración del propio Teorema que entonces hay otros infinitos puntos próximos a P en dicha curva de nivel).
Esto es importante, pues hay ecuaciones de la forma $F(x, y) = 0$ que no admiten ni un solo punto en $\mathbb{R}^2$, como $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Nota 2: La condición 2) de la hipótesis nos garantiza que $z = F(x, y)$ es "diferenciable" en el citado entorno bidimensional de P (o sea, en un cierto "alrededor" de dicho punto, en el plano $\mathbb{R}^2$). Pero entonces, hay recta tangente a la curva de nivel $F(x, y) = 0$ en el punto P de dicha curva, siendo su ecuación

$$\boxed{F_x(a, b) \cdot (x - a) + F_y(a, b) \cdot (y - b) = 0},$$

lo cual también ocurre en otros puntos de dicha curva cercanos a P. (Ver Sección 6.5).

Nota 3: La condición 3) de la hipótesis nos indica que la recta tangente a la curva de nivel en el punto P no es vertical. En efecto, al ser $F_y(a, b) \neq 0$, se puede despejar y en la ecuación dada de la recta tangente, quedando $\boxed{y = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b} \cdot (x - a) + b}$, con lo cual la pendiente de la recta será $\boxed{m = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}}$ y, al tener pendiente, la recta no puede ser vertical.

Nota 4: La propiedad a) de la tesis del Teorema nos dice que el punto P pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$. Pero la condición 1) de la hipótesis establece que P está sobre la "curva de nivel" $F(x, y) = 0$, luego P es punto común entre "gráfica" y "curva de nivel".

Nota 5: La propiedad b) de la tesis del Teorema significa que todos los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ (correspondientes al entorno unidimensional de $x = a$) esán situados también sobre la "curva de nivel" $F(x, y) = 0$ (porque cumplen esta ecuación), o sea que dicha "gráfica" es una parte de la "curva de nivel".

Además, al ser la función $y = f(x)$ solución de la ecuación $F(x, y) = 0$, en caso de que se pueda despejar la variable y de la misma, obtendríamos una "definición explícita" de esa función. Esa "definición explícita" es la que no siempre existirá, pero la función $y = f(x)$ que establece el Teorema **existirá siempre** si se dan las condiciones de la hipótesis; cuando no haya "definición explícita" de esa función, nos limitamos a considerarla "definida implícitamente" por la ecuación $F(x, y) = 0$ y así la manejaremos.

Nota 6: La propiedad c) de la tesis del Teorema implica que la función $y = f(x)$ tendrá recta tangente a su gráfica en el punto P y en los otros puntos del entorno nombrado, variando las pendientes de dichas rectas tangentes poco a poco (sin saltos) al pasar de un punto a otro muy próximo. Pero entonces, al coincidir la gráfica de f con parte de la "curva de nivel" alrededor de P, la tangente a la "curva de nivel" en P coincidirá con la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en ese mismo punto, llegándose a la importante conclusión de que $\boxed{f'(a) = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}}$ puesto que sus pendientes coincidirán (lo habíamos anticipado en la Nota 3, pues $f'(a) = m$). Pero lo mismo sucederá en los restantes puntos alrededor de P, que son también de la "curva de nivel" y de la gráfica de $y = f(x)$, con lo cual tendremos la importante relación $\boxed{f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$, donde en esta expresión es siempre $y = f(x)$ (en efecto, esta expre-sión parece depender de ambas variables, pero sólo depende de x), la cual es válida en el entorno de $x = a$ donde f sea derivable (donde existan las dos derivadas parciales de F y además F_y sea diferente de cero).

Hay ocasiones, como veremos en un ejemplo, en que esa derivada primera es otra vez derivable una o más veces, con lo cual la "función definida implícitamente" $y = f(x)$ tendrá también derivada segunda y quizás otras derivadas de mayor orden.

Ejemplo: Sea la ecuación $x^2 + y^2 - 5 = 0$ y el punto $P(-1\,, 2)$. En este caso $F(x, y)$ es la función $x^2 + y^2 - 5$, cuyo dominio es $\mathbb{R}^2$ (luego P es punto "interior" del mismo). Y la ecuación dada representa la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{5}$ ("curva de nivel cero" de $F(x, y)$).

Veamos si se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema de la Función Implícita:

1) $F(a, b) = F(-1\,, 2) = (-1)^2 + 2^2 - 5 = 0$, que es la identidad $0 \equiv 0$, con lo cual el punto $P(-1\,, 2)$ cumple la ecuación dada.
2) La función $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$, que son $F_x(x, y) = 2x$ y $F_y(x, y) = 2y$, luego serán continuas en cualquier entorno que tomemos del punto $P(-1\,, 2)$.
3) La derivada parcial respecto a y de la función $F(x, y)$, en $(-1\,, 2)$, es diferente de cero, pues $F_y(-1\,, 2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Al cumplirse las tres condiciones de la hipótesis del Teorema, podemos asegurar que **existe una única función** $y = f(x)$ "definida implícitamente" por la ecuación dada, en un cierto entorno unidimensional del punto $x = -1$ y que cumple las tres propiedades mencionadas en la tesis del Teorema. A saber:
a) $f(-1) = 2$.
b) La función cumple la ecuación $F(x, y) = 0$ dada, para todo x del entorno citado anteriormente.
c) La función tiene derivada continua en un cierto entorno de $x = -1$ (contenido en el anterior).

Pero en este caso puede despejarse la variable y de la ecuación dada, así que la función "definida implícitamente" que menciona el Teorema posee "definición explícita". ¿Cuál es? Despejamos esa variable y se obtiene $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$, con lo cual tenemos dos posibilidades: Será $y = +\sqrt{5 - x^2}$ o será $y = -\sqrt{5 - x^2}$, ambas con dominio $\left[-\sqrt{5}\,, \sqrt{5}\,\right]$. Pero, como debe cumplir $f(-1) = 2$, se trata de la primera (valores de la función no negativos). Por tanto, sabemos que la función $y = f(x)$ del Teorema coincide en este caso con $y = +\sqrt{5 - x^2}$, lo cual **nos permite comprobar** las tres propiedades de la tesis (normalmente, en otros ejemplos, no existirá la versión explícita de la función $y = f(x)$ y entonces estas comprobaciones no podrán hacerse, pero las propiedades son ciertas de todas maneras):

a) La propiedad se cumple, pues $f(-1) = 2$.
b) Si sustituimos $y = \sqrt{5 - x^2}$ en la ecuación dada, que es $x^2 + y^2 - 5 = 0$, se obtiene $x^2 + \left(\sqrt{5 - x^2}\right)^2 - 5 = 0$, que operando y simplificando nos da la identidad $0 \equiv 0$, luego la función $f(x)$ cumple la ecuación dada para todo x del entorno $\left[-\sqrt{5}\,, \sqrt{5}\right]$ del punto $x = -1$. Comprobada esta propiedad.
c) Por último, la derivada de esta función es $f'(x) = -x/\sqrt{5 - x^2}$, la cual existe y es continua en el intervalo $\left(-\sqrt{5}\,, \sqrt{5}\right)$, que también es un entorno de $x = -1$ (contenido en el anterior). Luego se cumple también esta propiedad.

Otro ejemplo, donde no puede despejarse la variable dependiente (con lo cual, la función definida es realmente "implícita"):

Demostrar que la ecuación $x^2 + xy + y^3 = 11$ "define implícitamente" a y como función f de x en un entorno de $x = 1$, siendo $f(1) = 2$. Calcular además las derivadas primera y segunda de esa función en $x = 1$.

Respuesta: Nos están dando el punto $P(a\,, b)$ indirectamente: Al decirnos que $f(1) = 2$, será $a = 1$ y $b = 2$. Entonces tenemos la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ y el punto $P(1\,, 2)$, con lo cual podemos verificar que se cumplen las tres condiciones de la hipótesis del Teorema de la Función Implícita (el dominio de $F(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 11$ es $\mathbb{R}^2$, luego P es "interior" del mismo):

1) El punto P debe cumplir la ecuación dada. En este caso $1^2 + 1 \cdot 2 + 2^3 - 11 = 0$, que es la identidad $0 \equiv 0$.
2) La función $F(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 11$ tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$, que son $F_x(x, y) = 2x + y$ y $F_y(x, y) = x + 3y^2$, luego serán continuas en cualquier entorno bidimensional del punto P.
3) La derivada parcial de F respecto a y no se anula en el punto dado: $F_y(1\,, 2) = 1 + 3 \cdot 2^2 = 13 \neq 0$.

Por tanto, se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita y queda demostrado (a través del mismo) que **existe una única función** $y = f(x)$, "definida implícitamente" por la ecuación dada en un cierto entorno de $x = 1$, la cual cumple $f(1) = 2$ (propiedad a) de la tesis del Teorema).

Además, sabemos por la propiedad c) de la tesis del Teorema que la función $f(x)$ es derivable en un cierto entorno del punto $x = 1$, siendo la derivada continua en ese entorno.

Para hallar la derivada primera hay dos procedimientos:

1) El más rápido es usar la relación que vimos en la Nota 6, después del Teorema, que es $\boxed{f'(x) = -F_x(x, y)/F_y(x, y)}$, donde la variable y representa a $f(x)$.

2) El otro camino es más laborioso: Consiste en derivar respecto a x ambos miembros de la ecuación dada, $F(x,y)=0$, e igualar los resultados, pero tomando en cuenta que y representa a la función $f(x)$, con lo cual su derivada será $y'=f'(x)$. Finalmente se despeja y' , lo cual siempre podrá hacerse porque la nueva ecuación obtenida es de primer grado en esa variable y' .

Apliquemos el primer método: Usamos las expresiones de $F_x=2x+y$ y $F_y=x+3y^2$, con lo cual se tiene $\boxed{y'=-\frac{2x+y}{x+3y^2}}$, donde y es $f(x)$.

Apliquemos el segundo método: Derivamos respecto a x los dos miembros de la ecuación dada, que es $x^2+xy+y^3=11$ e igualamos los resultados (se supone que en esa ecuación la variable y está ya sustituída por $f(x)$, por lo cual se está cumpliendo la ecuación, como establece la propiedad b) de la tesis del Teorema; es decir, que la igualdad es una identidad, luego las derivadas de ambos miembros tendrán que ser iguales). Tenemos entonces:

$$2x+(1\cdot y+x\cdot y')+3y^2\cdot y'=0$$

de donde, $xy'+3y^2y'=-2x-y$. Así, sacando factor común y' en el primer miembro y despejando, queda $y'=\frac{-2x-y}{x+3y^2}=-\frac{2x+y}{x+3y^2}$ (el mismo resultado del método anterior).

Por tanto, $\boxed{f'(1)=-\frac{2\cdot 1+2}{1+3\cdot 2^2}=-\frac{4}{13}}$ (pues para $x=1$ es $y=2$). Obsérvese que el denominador anterior es el valor $F_y(1\,,2)$ diferente de cero (condición 3) de la hipótesis del Teorema).

Finalmente, para calcular la derivada segunda, basta derivar como cociente la expresión de y' obtenida anteriormente, pero teniendo en cuenta que y sigue siendo la función $f(x)$. Así tenemos:

$$\boxed{y''=-\frac{(2+y')\cdot(x+3y^2)-(2x+y)\cdot(1+6y\cdot y')}{(x+3y^2)^2}}$$

y para hallar su valor en $x=1$ habrá que sustituir x por 1, y por 2 e y' por $-4/13$. En conclusión, $\boxed{f''(1)=-\frac{426}{2197}}$ (después de hacer operaciones).

Casos de funciones implícitas de dos variables independientes

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (caso de funciones reales de dos variables reales definidas implícitamente):
Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$, que define la “superficie de nivel cero” de la función de tres variables $w=F(x,y,z)$, y sea $P(a,\,b,\,c)$ un punto “interior” del dominio de F, cumpliéndose las siguientes condiciones:
1) $\boxed{F(a,b,c)=0}$, o sea el punto P cumple la ecuación dada.
2) $w=F(x,y,z)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno tridimensional de P .
3) La derivada parcial de $F(x,y,z)$ respecto a z es diferente de cero en el punto P.

Entonces, **existe una única función** $z=f(x,y)$, de dominio un cierto entorno bidimensional de $(a\,,b)$, “definida implícitamente” por la ecuación $F(x,y,z)=0$, la cual tiene las siguientes propiedades:
a) $\boxed{f(a,b)=c}$, o sea, la gráfica de esta función $z=f(x,y)$ pasa por el punto $P(a\,,b\,,c)$.
b) La función $z=f(x,y)$ cumple la ecuación $F(x,y,z)=0$, para todo (x,y) de su dominio. O sea, se cumple la identidad

$\boxed{F[x,y,f(x,y)]\equiv 0}$, para todo (x,y) del dominio de f

c) La función $z=f(x,y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno bidimensional de $(a\,,\,b)$ (contenido en su dominio).

Nota 1: La condición 1) de la hipótesis garantiza que la mencionada "superficie de nivel" existe en $\mathbb{R}^3$, pues tiene al menos el punto P.

Nota 2: La condición 2) de la hipótesis nos garantiza que $w = F(x, y, z)$ es diferenciable en el citado entorno tridimensional de P. Pero entonces hay plano tangente a la "superficie de nivel" $F(x, y, z) = 0$ en el punto P de dicha superficie, siendo su ecuación

$$F_x(a, b, c) \cdot (x - a) + F_y(a, b, c) \cdot (y - b) + F_z(a, b, c) \cdot (z - c) = 0$$

lo cual también ocurre en otros puntos de dicha superficie alrededor de P. (Ver Sección 6.5).

Nota 3: La condición 3) de la hipótesis nos indica que el plano tangente a la "superficie de nivel" en el punto P no es vertical. En efecto, su vector normal tiene como componentes los coeficientes de x, y, z en la anterior ecuación, y entonces dicho vector normal (perpendicular al plano) no es paralelo al plano horizontal OXY pues su tercera componente es diferente de cero, con lo cual tendrá cierta inclinación hacia arriba o hacia abajo (según el signo de dicha componente). Entonces, al no ser el vector normal paralelo a OXY, el plano tangente no será perpendicular a dicho plano coordenado, o sea, no será vertical. (Ver Sección 8.7).

Nota 4: La propiedad a) de la tesis del Teorema nos dice que el punto P pertenece a la gráfica de la función $z = f(x, y)$. Pero la condición 1) de la hipótesis había establecido que P está sobre la "superficie de nivel" $F(x, y, z) = 0$, luego P es punto común entre gráfica y "superficie de nivel".

Nota 5: La propiedad b) de la tesis del Teorema significa que todos los puntos de la gráfica de $z = f(x, y)$ están situados también sobre la "superficie de nivel" $F(x, y, z) = 0$ (porque cumplen esta ecuación), o sea que dicha gráfica es una parte de esa "superficie de nivel".

Además, al ser la función $z = f(x, y)$ solución de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, en caso de que se pueda despejar la variable z de la misma, obtendríamos una definición explícita de esa función (esa definición explícita es la que no siempre existirá, pero la función $z = f(x, y)$ que establece el Teorema **siempre existirá** cuando se den las condiciones de la hipótesis). Enton-ces, cuando no haya definición explícita, nos limitaremos a tener esa función "definida implícitamente" por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ y así la manejaremos.

Nota 6: La propiedad c) de la tesis del Teorema implica que la función $z = f(x, y)$ es diferen-ciable en el entorno de $(a\ ,\, b)$ donde existan sus derivadas parciales continuas (ver Sección 6.5), con lo cual su gráfica tendrá plano tangente en P así como en otros puntos de alrededor, variando dicho plano poco a poco al pasar de un punto a otro muy próximo. Y la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto P es

$$z - f(a, b) = f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

siendo $f(a, b) = c$, como establece la propiedad a) de la tesis. (Sección 6.5). Y el plano tangente a la "superficie de nivel" tiene como ecuación la dada en la Nota 2.
Entonces, como los dos planos son el mismo (por la coincidencia de gráfica y "superficie de nivel" alrededor de P), al despejar en la ecuación de la Nota 2 el factor $z - c$ (cosa que puede hacerse por ser $F_z(a, b, c) \neq 0$) tiene que quedar una expresión coincidente con el segundo miembro de la ecuación anterior (donde está despejado el mismo factor $z - c$). Llegamos así a las importantes conclusiones

$$\boxed{f_x(a, b) = -\frac{F_x(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}} \quad \text{y} \quad \boxed{f_y(a, b) = -\frac{F_y(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}}$$

Pero lo mismo sucederá en los restantes puntos alrededor de P, que son de la "superficie de nivel" y también de la gráfica de $z = f(x, y)$, con lo cual tendremos las relaciones análogas a las anteriores para esos puntos: $\boxed{f_x(x, y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}}$ y $\boxed{f_y(x, y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}}$ (donde aquí es siempre $z = f(x, y)$; por tanto, estas expresiones parecen depender de tres variables pero sólo dependen de x e y). Por supuesto, las fórmulas anteriores serán válidas solamente en el entorno de $(a\ ,\, b)$

donde f sea derivable (para lo cual, tendrán que existir las tres derivadas parciales de F y que F_z sea diferente de cero).

Hay ocasiones en que estas derivadas parciales primeras admiten nuevas derivadas parciales, con lo cual la función $f(x,y)$ tendrá derivadas parciales segundas y quizás otras de mayor orden. Las cuales se obtendrán derivando parcialmente como cocientes las expresiones anteriores de las parciales primeras, pero siempre teniendo en cuenta que z representa $f(x,y)$.

Ejemplo: Demostrar que la ecuación $sen\, z + (1+x^2)^y + y^2 = 2y - z$ define implícitamente a z como función de (x,y) en un cierto entorno del punto $(0\,,1)$, de forma que la imagen de ese punto por la función sea cero. Obtener además expresiones de las derivadas parciales primeras de dicha función en un entorno de $(0\,,1)$, hallando sus valores en ese punto.

Para poder aplicar el Teorema de la Función Implícita escribimos la ecuación dada en la forma $F(x,y,z)=0$, luego queda $\boxed{sen\, z + (1+x^2)^y + y^2 - 2y + z = 0}$. Además, al saber que la función f "definida implícitamente" debe cumplir $f(0\,,1)=0$, el punto P que necesitamos para aplicar el Teorema es el $(0\,,1\,,0)$ ("interior" al dominio de $F(x,y,z)$ que es todo $\mathbb{R}^3$).

Verifiquemos, entonces, que se cumplen las tres condiciones de la hipótesis del Teorema:

1) El punto P verifica la ecuación dada (en ambas formas), pues al sustituir sus coordenadas, por ejemplo, en la última forma de la ecuación, se tiene $sen\, 0 + (1+0^2)^1 + 1^2 - 2\cdot 1 + 0 = 0$, o sea la identidad $0 \equiv 0$.
2) La función $F(x,y,z) = sen\, z + (1+x^2)^y + y^2 - 2y + z$ tiene derivadas parciales continuas en todo el espacio $\mathbb{R}^3$, que son:
$$F_x = 2xy\cdot(1+x^2)^{y-1} \quad ; \quad F_y = (1+x^2)^y \cdot ln(1+x^2) + 2y - 2 \quad ; \quad F_z = cos\, z + 1$$
Por tanto, esas derivadas parciales de F serán continuas en cualquier entorno tridimensional del punto P .
3) $F_z(0\,,1\,,0) = cos\, 0 + 1 = 2 \neq 0$

Las tres condiciones de la hipótesis del Teorema se cumplen, luego **existe una única función** $z = f(x,y)$, "definida implícitamente" por la ecuación dada en un cierto entorno bidimensional del punto $(0\,,1)$, siendo $f(0\,,1)=0$ (propiedad a) de la tesis).

Además, el Teorema establece que la función $z=f(x,y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno del punto $(0\,,1)$. Nos piden sus expresiones y evaluarlas en dicho punto. Otra vez, hay dos maneras de hacer esto:

1) Aplicando directamente las "fórmulas" que relacionan dichas derivadas con las derivadas parciales de la función $F(x,y,z)$, dadas en la Nota 6 después del enunciado del Teorema (página anterior).

2) Por derivaciones parciales directas de los dos miembros de la ecuación dada e igualando resultados (teniendo muy en cuenta que donde aparezca z debe entenderse que está la función $z = f(x,y)$ aunque no la escribamos). Esto es correcto, pues el Teorema asegura que al sustituir la función f en la ecuación ésta se cumple y estaríamos derivando ambos miembros de la identidad correspondiente. (Podemos derivar parcialmente ambos miembros de la ecuación dada, en cualquiera de las formas que tenemos para la misma).

Primer método: $\boxed{z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2xy\cdot(1+x^2)^{y-1}}{1+cos}}$ donde $z = f(x,y)$

$$\boxed{z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{(1+x^2)^y\cdot ln(1+x^2)+2y-2}{1+cos}} \quad \text{donde } z=f(x,y)$$

Segundo método: Al derivar parcialmente respecto a x los dos miembros de la ecuación dada, en su forma inicial, e igualar ambas derivadas, se tiene

$$(\cos z) \cdot z_x + 2xy \cdot (1 + x^2)^{y-1} = -z_x$$

con lo cual podemos despejar z_x y llegamos al mismo resultado anterior. Y al derivar parcialmente respecto a y los dos miembros de la ecuación dada e igualar, se tiene

$$(\cos z) \cdot z_y + (1 + x^2)^y \cdot \ln(1 + x^2) + 2y = 2 - z_y$$

de donde podemos despejar z_y, obteniéndose el mismo resultado anterior.

Finalmente, para hallar los valores de ambas derivadas parciales en el punto $(0 , 1)$, sustituiremos en sus expresiones x por 0, y por 1 y z por 0, obteniéndose $\boxed{z_x(0 ,1) = 0}$ y $\boxed{z_y(0 ,1) = 0}$.

Casos de funciones implícitas de tres variables independientes

Todo lo anterior puede generalizarse al caso de funciones reales de tres variables, que sean "definidas implícitamente", en un entorno de un cierto punto (a , b , c), por una ecuación de la forma $F(x, y, z, w) = 0$, los cuales (la ecuación y el punto) deben cumplir condiciones análogas a las vistas anteriormente en las versiones del Teorema de la Función Implícita para funciones reales de dos variables.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (caso de funciones reales de tres variables reales definidas implícitamente):
Sea la ecuación $F(x, y, z, w) = 0$, cuyo primer miembro corresponde a una función real de cuatro variables $t = F(x, y, z, w)$, y sea $P(a , b , c , d)$ un punto "interior" del dominio de F, cumpliéndose las siguientes condiciones:
1) $\boxed{F(a, b, c, d) = 0}$, o sea el punto P cumple la ecuación dada.
2) La función F tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno del punto P (en el espacio $\mathbb{R}^4$).
3) La derivada parcial de $F(x, y, z, w)$ respecto a w es diferente de cero en el punto P .

Entonces, **existe una única función** $w = f(x, y, z)$, de dominio un cierto entorno tridimensional de (a , b , c), "definida implícitamente" por la ecuación $F(x, y, z, w) = 0$, la cual tiene las siguientes propiedades:
a) $\boxed{f(a, b, c) = d}$.
b) La función $w = f(x, y, z)$ cumple la ecuación $F(x, y, z, w) = 0$, para todo (x, y, z) de su dominio. O sea, se cumple la identidad

$$\boxed{F[x, y, z, f(x, y, z)] \equiv 0} \text{ , para todo } (x, y, z) \text{ del dominio de } f.$$

c) La función $w = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno tridimensional del punto (a, b, c) (contenido en su dominio).

Nota 1: La condición 1) de la hipótesis garantiza que hay al menos un punto de $\mathbb{R}^4$que cumple la ecuación dada (no hablamos de "superficie de nivel" pues estamos en $\mathbb{R}^4$).

Nota 2: La condición 2) de la hipótesis nos garantiza que $t = F(x, y, z, w)$ es diferenciable en el citado entorno de P, lo cual sirve para la demostración del teorema, pero ya no podemos hablar de "plano tangente a la superficie de nivel" pues estamos en $\mathbb{R}^4$.

Nota 3: La condición 3) de la hipótesis va a permitir que la derivada parcial de $F(x, y, z, w)$ respecto a w se mantenga diferente de cero en un cierto entorno del punto P (al ser esa derivada parcial continua en P y diferente de cero, será también diferente de cero en una cierta proximidad de P, por propiedad de las funciones continuas).

Nota 4: La propiedad b) de la tesis del Teorema significa que la función $w = f(x, y, z)$ es solución de la ecuación $F(x, y, z, w) = 0$, con lo cual, si se pudiese despejar de ésta la variable w, obtendríamos una definición explícita de esa misma función f que establece el Teorema.

Nota 5: La propiedad c) de la tesis del Teorema implica que la función $w = f(x, y, z)$ es diferenciable en el entorno de (a, b, c) donde existan sus derivadas parciales continuas. Esto, junto con la diferenciabilidad de $F(x, y, z, w)$ en un entorno del punto P, permite aplicar la Regla de la Cadena a la función compuesta $F[x, y, z, f(x, y, z)]$ que vale constantemente cero, según establece el Teorema en la propiedad b) de la tesis. Entonces, las tres derivadas parciales de la compuesta anterior valdrán cero, por ser esa función constante. Y de ahí, mientras el punto (x, y, z, w) esté en el entorno donde $F_w \neq 0$, resultan las siguientes relaciones:

$$\boxed{f_x(x, y, z) = -\frac{F_x(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)}} \quad ; \quad \boxed{f_y(x, y, z) = -\frac{F_y(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)}} \quad ; \quad \boxed{f_z(x, y, z) = -\frac{F_z(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)}}$$

siendo en las tres expresiones $\boxed{w = f(x, y, z)}$.

Hay ocasiones en que estas derivadas parciales primeras admiten nuevas derivadas parciales, con lo cual la función "definida implícitamente" $f(x, y, z)$ tendrá derivadas parciales segundas y quizás otras de mayor orden.
Pues bien, las derivadas parciales segundas se obtendrán derivando parcialmente como cocientes las expresiones anteriores, pero recordando que donde aparezca w está $f(x, y, z)$, luego al derivar una de las expresiones parcialmente respecto a x (por ejemplo), aparecerá siempre en lugar de w su derivada parcial $w_x = f_x$ (obtenida antes). Y cuando derivemos parcialmente cualquiera de las expresiones anteriores respecto a y (o respecto a z) , aparecerá siempre en lugar de w su derivada w_y (o su derivada w_z).

Ejemplo: Demostrar que la ecuación $3xyz + w^3 + 5zw^2 = 7yw + 2z^2 + w^4y - 5x$ "define implícitamente" a w como función f de (x, y, z) en un cierto entorno tridimensional del punto $(1 , -1 , 1)$, siendo cero la imagen de dicho punto por esa función. Calcular además las derivadas parciales primeras de la "función implícita" $f(x, y, z)$ en el punto dado, así como el valor de la derivada segunda f_{xz} en dicho punto.

Respuesta: Para poder aplicar el último Teorema de la Función Implícita, ponemos la ecuación dada en la forma $F(x, y, z, w) = 0$ y tomamos el punto $P(1 , -1 , 1 , 0)$ de $\mathbb{R}^4$. Entonces tenemos la función $\boxed{F(x, y, z, w) = 3xyz + w^3 + 5zw^2 - 7yw - 2z^2 - w^4y + 5x}$, definida en todo $\mathbb{R}^4$ (por tanto, el punto P es "interior" del dominio).

Veamos si se cumplen las tres condiciones de la hipótesis:

1) $F(1, -1, 1, 0) = -3 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 + 5 = 0$, luego P cumple la ecuación.
2) Las derivadas parciales de $F(x, y, z, w)$ son: $F_x = 3yz + 5$; $F_y = 3xz - 7w - w^4$; $F_z = 3xy + 5w^2 - 4z$; $F_w = 3w^2 + 10zw - 7y - 4w^3y$, continuas en todo $\mathbb{R}^4$, luego lo serán en cualquier entorno de P .
3) $F_w(1 , -1 , 1 , 0) = 0 + 0 + 7 - 0 = 7 \neq 0$.

Por tanto, **existe un única función** $w = f(x, y, z)$, definida implícitamente por la ecuación dada en un cierto entorno del punto $(1 , -1 , 1)$, con las tres propiedades dadas en el Teorema .

Para hallar las derivadas parciales de f sabemos que hay dos métodos.

Primer método:

$$\boxed{f_x(x,y,z) = -\frac{F_x(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)} = -\frac{3yz+5}{3w^2+10zw-7y-4w^3y}} \quad , \quad \text{donde } w = f(x,y,z)$$

$$\boxed{f_y(x,y,z) = -\frac{F_y(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)} = -\frac{3xz-7w-w^4}{3w^2+10zw-7y- \quad {}^3y}} \quad , \quad \text{donde } w = f(x,y,z)$$

$$\boxed{f_z(x,y,z) = -\frac{F_z(x,y,z,w)}{F_w(x,y,z,w)} = -\frac{3xy+5 \quad {}^2-4z}{3w^2+10zw-7y- \quad {}^3y}} \quad , \quad \text{donde } w = f(x,y,z)$$

Que evaluadas en el punto $(1\,,-1\,,1)$, donde es $w = 0$, nos dan:

$$f_x(1,-1,1) = -\frac{-3+5}{7} = -\frac{2}{7} \;;\; f_y(1,-1,1) = -\frac{3}{7} \;;\; f_z(1,-1,1) = -\frac{-3-4}{7} = 1$$

<u>Segundo método</u>: Derivamos parcialmente respecto a x los dos miembros de la ecuación dada, teniendo en cuenta que $w = f(x,y,z)$ e igualamos esas derivadas, obteniendo

$$3yz + 3w^2 \cdot w_x + 10zw \cdot w_x = 7y \cdot w_x + 4yw^3 \cdot w_x - 5$$

de donde se despeja w_x y se llega a la misma expresión obtenida con el primer método.
Derivamos ahora parcialmente respecto a y los dos miembros de la ecuación dada, teniendo en cuenta que $w = f(x,y,z)$ e igualamos esas derivadas, obteniendo

$$3xz + 3w^2 \cdot w_y + 10zw \cdot w_y = 7 \cdot (1 \cdot w + y \cdot w_y) + (4w^3 \cdot w_y \cdot y + w^4 \cdot 1)$$

de donde se despeja w_y y se llega a la misma expresión obtenida con el primer método.
Finalmente, derivamos parcialmente respecto a z los dos miembros de la ecuación dada, teniendo en cuenta que $w = f(x,y,z)$ e igualamos esas derivadas, obteniendo

$$3xy + 3w^2 \cdot w_z + 5 \cdot (1 \cdot w^2 + z \cdot 2w \cdot w_z) = 7y \cdot w_z + 4z + y \cdot 4w^3 \cdot w_z$$

de donde se despeja w_z y se llega a la misma expresión obtenida con el primer método.

Para hallar f_{xz} debemos derivar parcialmente respecto a z la expresión obtenida anteriormente para f_x :

$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{3yz+5}{3w^2+10zw-7y- \quad {}^3y}\right) =$$

$$= -\frac{3y\cdot(3w^2+10zw-7y-4w^3y)-(3yz+5)\cdot[6ww_z+10(1\cdot w+z\cdot w_z)-12w^2w_zy]}{(3w^2+10zw-7y-4w^3y)^2}$$

Y para obtener el valor de la derivada anterior en $P(1\,,-1\,,1)$ habrá que sustituir en la expresión anterior x por 1, y por -1, z por 1, w por 0 y w_z por 1 (valor obtenido antes), con lo cual

$$f_{xz}(1\,,-1\,,1) = -\frac{(-3)\cdot 7-(-3+5)\cdot 10}{7^2} = \frac{41}{49}$$

Versiones del Teorema de la Función Implícita cuando se cambia de variable dependiente

<u>Consideraremos, por ejemplo, el Teorema correspondiente a “funciones reales de dos variables reales definidas implícitamente” (dado en la pág. 5), pero **ahora cambiando la variable dependiente de la función definida**, de modo que esa variable dependiente **no sea z sino que sea y o sea x**</u>. Y de un modo análogo se procederá en los otros dos Teoremas: El que define una función de una variable (dado en la pág. 2, donde la variable dependiente tomada ahora no sea y sino sea x) y el que define una función de tres variables (dado en la pág. 8, donde la variable dependiente tomada ahora no sea w sino sea x , sea y o sea z).

En el caso del Teorema de la pág. 5, la ecuación dada sería otra vez de la forma $F(x,y,z) = 0$ y el punto dado también sería $P(a\,,b\,,c)$ “interior” al dominio de F. Y las condiciones 1) y 2) de la hipótesis del Teorema serían las mismas, pero <u>la condición 3) de la hipótesis sería ahora</u> $\boxed{F_y(a\,,b\,,c) \neq 0}$ <u>si queremos que la variable dependiente sea y , o sería</u> $\boxed{F_x(a\,,b\,,c) \neq 0}$ <u>si queremos que la variable dependiente sea x</u>.

En el primer caso (variable dependiente y), la tesis del Teorema sería que **existe una única función $y = g(x, z)$**, "definida implícitamente" en un entorno bidimensional del punto $(a\,, c)$, la cual cumplirá las propiedades:
a) $g(a\,, c) = b$.
b) Se cumple la identidad $F[x, g(x, z), z] \equiv 0$ para todo (x, z) del entorno del punto $(a\,, c)$.
c) La función $y = g(x, z)$ posee derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno de $(a\,, c)$, siendo sus expresiones $\boxed{g_x = -\frac{F_x}{F_y}}$ y $\boxed{g_z = -\frac{F_z}{F_y}}$, donde la variable y representa a $g(x, z)$.

Y en el segundo caso (variable dependiente x), la tesis del Teorema sería que **existe una única función $x = h(y, z)$**, "definida implícitamente" en un entorno bidimensional del punto $(b\,, c)$, la cual cumplirá las propiedades:
a) $h(b\,, c) = a$.
b) Se cumple la identidad $F[h(y, z), y\,, z] \equiv 0$ para todo (y, z) del entorno del punto $(b\,, c)$.
c) La función $x = h(y, z)$ posee derivadas parciales primeras continuas en un cierto entorno de $(b\,, c)$, siendo sus expresiones $\boxed{h_y = -\frac{F_y}{F_x}}$ y $\boxed{h_z = -\frac{F_z}{F_x}}$, donde la variable x representa a $h(y, z)$.

Ejemplo: Demostrar que la ecuación $x^2yz + 2yz = 3xz^2 - 18$ "define implícitamente" una función $y = g(x, z)$ en un entorno del punto $(1\,, 2)$ de modo que su valor en ese punto sea -1, hallando los valores de sus derivadas parciales primeras en el punto dado.

Aquí es $\boxed{F(x, y, z) = x^2yz + 2yz - 3xz^2 + 18}$ y el punto P es el $(1\,, -1\,, 2)$ ("interior" al dominio de F, que es todo el espacio), pues tenemos $x = 1$, $z = 2$ e $y = -1$.

Verifiquemos las condiciones de la hipótesis del Teorema de la Función Implícita para esta variante:

1) El punto dado cumple la ecuación dada: $1^2 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 \equiv 3 \cdot 1 \cdot 2^2 - 18$, o sea $-6 \equiv -6$.
2) La función $F(x, y, z) = x^2yz + 2yz - 3xz^2 + 18$ tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^3$, luego serán continuas en cualquier entorno tridimensional del punto P , las cuales son:

$$F_x = 2xyz - 3z^2 \quad ; \quad F_y = x^2z + 2z \quad ; \quad F_z = x^2y + 2y - 6xz$$

3) La derivada parcial de F **respecto a y** es no nula: $F_y(1\,, -1\,, 2) = 1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6 \neq 0$.

Por tanto, el Teorema nos asegura que **existe una única función $y = g(x, z)$** "definida implícitamente" en un entorno bidimensional del punto $(1\,, 2)$, siendo $g(1\,, 2) = -1$.

Y esta función tiene las siguientes propiedades:

a) $\boxed{g(1\,, 2) = -1}$, ya mencionada.

b) $g(x, z)$ cumple la ecuación dada para todo punto (x, z) del entorno bidimensional del punto $(1\,, 2)$. O sea, será $\boxed{2x^2z \cdot g(x, z) + 2z \cdot g(x, z) \equiv 3xz^2 - 18}$, para todo (x, z) del entorno.

c) $g(x, z)$ tiene derivadas parciales continuas en un cierto entorno bidimensional del punto $(1, 2)$, contenido en el anterior, las cuales son:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_y(x,y,z)} = -\frac{2xyz - 3z^2}{x^2z + 2z}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{F_z(x,y,z)}{F_y(x,y,z)} = -\frac{x^2y + 2y - 6xz}{x^2z + 2z}}$$

debiendo entenderse que la variable y representa a la función $g(x, z)$ en estas expresiones, con lo cual ambas derivadas no dependen de tres variables independientes sino solamente de dos, que son (x, z). Por tanto, sus valores en el punto $(1\,, 2)$ se obtendrán sustituyendo x por 1, z por 2 e y por -1:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(1\,,2) = -\frac{-16}{6} = \frac{8}{3}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial z}(1\,,2) = -\frac{-15}{6} = \frac{5}{2}}$$

Nota: Al ser en el ejemplo anterior $F_x(1\,,-1\,,2) = -16 \neq 0$, también se podría aplicar el Teorema de la Función Implícita para garantizar que la misma ecuación dada al principio "define implícitamente" otra función $x = h(y,z)$ en un entorno bidimensional del punto $(-1\,,2)$, de modo que la imagen por h de este punto sea $x = 1$.

O sea, que si las tres derivadas parciales de una función $F(x,y,z)$ son diferentes de cero en un punto $P(a\,,b\,,c)$ interior de su dominio, además se cumple $F(a\,,b\,,c) = 0$ y también las tres derivadas parciales de F son continuas en un cierto entorno tridimensional de P, el mismo Teorema de la Función Implícita garantiza la existencia de **tres funciones** $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ y $x = h(y,z)$, "definidas implícitamente" por la misma ecuación $\boxed{F(x,y,z) = 0}$, siendo el dominio de la función f un cierto entorno del punto $(a\,,b)$, siendo el dominio de la función g un cierto entorno del punto $(a\,,c)$ y siendo el dominio de la función h un cierto entorno del punto $(b\,,c)$, de modo que se cumple $f(a\,,b) = c$ en el primer caso, se cumple $g(a\,,c) = b$ en el segundo caso y se cumple $h(b\,,c) = a$ en el tercer caso.
