

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

(Prerrequisitos: Derivadas parciales. Diferenciales de funciones de una y varias variables)

Vectores gradiente y derivadas direccionales de funciones de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables reales, cuyo dominio de existencia sea un conjunto A del plano. Y supongamos que dicha función es diferenciable en el subconjunto D de A .

Recordamos que, en cada punto del “dominio de diferenciabilidad” (D), la función f es continua y derivable (o sea, existen las dos derivadas parciales primeras $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en dichos puntos). (Sección 6.3). Entonces:

Se llama “vector gradiente” de la función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b) de D , al vector del plano que tiene por componentes escalares los valores de las dos derivadas parciales de la función en ese punto. Se le representa por $\nabla f(a, b)$.

Por tanto, $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ es una función de dos variables que nos da un vector (no un número) para cada punto del “dominio de diferenciabilidad” D de la función f . Es lo que se llama “un campo vectorial en el plano” definido en D , o también “una función vectorial de dos componentes y dos variables independientes” cuyo dominio es D (no es “función real” sino “función vectorial”, porque sus imágenes son vectores).

Nota 1: El símbolo ∇ se llama “nabla” y se usa mucho en Matemáticas. Combinado con f se lee “gradiente de f ”. Así, $\nabla f(a, b)$ se lee “gradiente de f en (a, b) ”.

Nota 2: Hemos supuesto que en el punto (a, b) la función $f(x, y)$ es “diferenciable” para definir el “vector gradiente” en ese punto. Pero para que exista dicho vector, basta que existan ambas derivadas parciales primeras de la función en el punto, sin necesitar la “diferenciabilidad” de la función en el mismo (recuérdese de la Sección 6.3 que “diferenciable” implica “derivable”, pero “derivable” no implica “diferenciable”).

Si embargo, en la mayoría de las aplicaciones, se utiliza el “vector gradiente” cuando la función correspondiente sea “diferenciable” en el punto considerado (así, en lo que sigue, se verá la importancia de la “diferenciabilidad” de las funciones en la mayoría de las propiedades, empezando por el Teorema que veremos en la página siguiente).

Ejemplo: La función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ tiene por dominio A el círculo de centro el origen y radio 2, incluida la correspondiente circunferencia, siendo “diferenciable” en el mismo círculo excluida la circunferencia (conjunto D contenido en A).

Por tanto, en cualquier punto (x, y) de D , donde se cumplirá $4 - x^2 - y^2 > 0$, existe el “vector gradiente”, que será:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right)$$

En particular, $\nabla f(1, -1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Dados un vector cualquiera $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de módulo 1 (o sea, unitario) y un punto “interior” del dominio A de una función $f(x, y)$, se llama “derivada direccional” de la función f en el punto (a, b) , según la dirección y sentido del vector dado, al resultado del siguiente límite (si existe como número real):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + u_1 \cdot t, b + u_2 \cdot t) - f(a, b)}{t}$$

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

En caso de existir, esa “derivada direccional” se representa con la notación $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) \right]$.

Nota: Suponemos el punto (a, b) “interior” del dominio A de la función, para garantizar que la misma esté definida en el punto cercano $(a + u_1 \cdot t, b + u_2 \cdot t)$, para todo vector $\vec{u}$ que queramos, tomando valores de t suficientemente pequeños.

IMPORTANTE: La “derivada direccional” de $f(x, y)$ en el punto (a, b) según el vector unitario $\vec{u}$ se interpreta como la “razón de cambio” o “velocidad de variación” de la función f en el punto (a, b) , cuando se avanza desde este punto en la dirección y sentido del vector unitario $\vec{u}$.

En efecto, el incremento de la función f (“cambio” o “variación” de f) que aparece en el numerador del cociente incremental en la definición dada, se refiere al paso del primer punto (a, b) al segundo punto $(a + u_1 \cdot t, b + u_2 \cdot t)$, resultante de incrementar las dos coordenadas del primero en las dos componentes del vector $t\vec{u}$ ($t > 0$), de módulo t , con lo cual este segundo punto se obtiene avanzando una longitud t desde (a, b) en la dirección y sentido del vector unitario $\vec{u}$. Y el denominador del cociente incremental en la definición dada es la longitud t recorrida entre los dos puntos mencionados anteriormente. Por tanto, ese cociente incremental representa la “razón media de cambio” o la “velocidad media de variación” de la función entre los dos puntos utilizados.

Y cuando $t \rightarrow 0^+$, el segundo punto tiende al primero, manteniéndose siempre sobre la semirrecta que parte de $P(a, b)$ en la dirección y sentido de $\vec{u}$, siendo el límite obtenido (cuando es un número real) la “razón de cambio en P ” o la “velocidad de variación en P ” de la función f cuando nos movemos en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$.

Y podemos decir:

Si dicho límite es positivo, la función estará creciendo a partir de P en esa dirección y sentido.

Si dicho límite es negativo, la función estará decreciendo del mismo modo anterior.

Y si dicho límite es cero, la función se mantendrá con muy poca variación cerca de P en la dirección y sentido de $\vec{u}$ (pudiendo crecer o decrecer muy débilmente, o bien mantenerse constante).

El siguiente Teorema nos asegura la existencia de todas las “derivadas direccionales” en un punto (a, b) cuando la función sea “diferenciable” en dicho punto. Lo cual no impide que una función pueda tener alguna “derivada direccional” en un algún punto donde no sea “diferenciable” (o sea, que la condición de “diferenciable” es suficiente pero no necesaria para la existencia de alguna derivada direccional en un punto dado).

TEOREMA (existencia de “derivadas direccionales”): Si la función $z = f(x, y)$ es “diferenciable” en un punto (a, b) , existe la “derivada direccional” de esa función en dicho punto, según la dirección y sentido de cualquier vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Y el valor de esa “derivada direccional” es el producto escalar del “vector gradiente” en (a, b) por el vector $\vec{u}$. O sea,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \circ \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot u_2$$

Ejemplo: Dada la misma función del ejemplo de la página anterior, y dado un vector unitario cualquiera $\vec{u} = (u_1, u_2)$, tendremos la “derivada direccional” en cualquier punto (a, b) del círculo de centro el origen y radio 2 que no esté en la correspondiente circunferencia (el cual cumplirá $4 - a^2 - b^2 > 0$), obtenida esa derivada en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$, resultando:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \circ \vec{u} = -\frac{a \cdot u_1}{\sqrt{4 - a^2 - b^2}} - \frac{b \cdot u_2}{\sqrt{4 - a^2 - b^2}} = -\frac{a \cdot u_1 + b \cdot u_2}{\sqrt{4 - a^2 - b^2}}$$

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

En particular, para el punto $(1, -1)$ tenemos $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1) = -\frac{u_1}{\sqrt{2}} + \frac{u_2}{\sqrt{2}} = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}$ para cualquier vector unitario (u_1, u_2) . Y si tomamos el vector unitario $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, se obtiene $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 1$.

Consecuencias muy importantes del Teorema anterior:

1) Teniendo en cuenta que un producto escalar de dos vectores es siempre el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman, y que $|\vec{u}| = 1$, será:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = |\nabla f(a, b)| \cdot \cos \alpha = \sqrt{[f_x(a, b)]^2 + [f_y(a, b)]^2} \cdot \cos \alpha$$

donde α es el ángulo no obtuso que forman el vector gradiente en (a, b) , fijo, y el vector $\vec{u}$ que elijamos.

2) Cuando variemos la dirección del vector unitario $\vec{u}$ de todos los modos posibles, el ángulo α recorrerá todos los valores entre 0 y π (no entre 0 y 2π porque α es el ángulo no obtuso entre los dos vectores), con lo cual el valor máximo de la “derivada direccional” en el punto (a, b) se produce cuando $\alpha = 0$ y es $|\nabla f(a, b)|$ (en ese caso el vector $\vec{u}$ tendrá la misma dirección y sentido que el vector gradiente); así mismo, el valor mínimo de la “derivada direccional” en (a, b) es $-|\nabla f(a, b)|$ y se produce cuando $\alpha = \pi$ (o sea, cuando el vector $\vec{u}$ tenga la misma dirección y sentido contrario que el vector gradiente), y la “derivada direccional” en el punto (a, b) será cero solamente cuando $\vec{u}$ sea perpendicular al vector gradiente (hay dos $\vec{u}$ posibles, con una misma dirección y sentidos contrarios, contenidos en la recta que pasa por (a, b) y es perpendicular al vector gradiente).

Y al ser siempre $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, se tiene $-|\nabla f(a, b)| \leq |\nabla f(a, b)| \cdot \cos \alpha \leq |\nabla f(a, b)|$, o sea que $\boxed{-|\nabla f(a, b)| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) \leq |\nabla f(a, b)|}$ para todo vector unitario $\vec{u}$ del plano.

3) Las “derivadas parciales” de la función en el punto (a, b) son sus “derivadas direccionales” cuando se toman los vectores unitarios $(1, 0)$ y $(0, 1)$. En efecto, sabemos que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = f_x(a, b) \cdot u_1 + f_y(a, b) \cdot u_2}$$

luego si tomamos como vector $\vec{u}$ el $\vec{i} = (1, 0)$, queda $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a, b) = f_x(a, b)}$, y si tomamos como vector $\vec{u}$ el $\vec{j} = (0, 1)$, queda $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a, b) = f_y(a, b)}$.

4) Si consideramos la “curva de nivel” de la función f que pasa por el punto (a, b) , donde f sea “diferenciable”, cuya ecuación cartesiana es $\boxed{f(x, y) = f(a, b)}$, y consideramos uno de los vectores unitarios tangentes a dicha curva en el punto citado (vector unitario en la dirección de la recta tangente a la curva en dicho punto, con cualquiera de los dos posibles sentidos), se tiene que la “derivada direccional” correspondiente a ese vector unitario tangente, calculada por límite como dijimos en la pág. 1, tendrá que valer cero.

En efecto, por la idea de recta tangente a una curva, para valores muy pequeños de la variable t , el punto incrementado en la dirección del vector tangente a la curva estará mucho más próximo a dicha curva de nivel que la distancia t que lo separa del (a, b) , con lo cual los valores de la función f en el numerador del límite tienden a ser iguales, siendo su diferencia en valor absoluto mucho menor que el valor de t . Por tanto, el límite de ese cociente será cero.

Pero, por lo dicho en el apartado 2) anterior cuando f es “diferenciable”, los únicos vectores unitarios que dan “derivada direccional” cero en (a, b) son los dos vectores perpendiculares al vector gradiente en ese punto. Conclusión: El vector unitario tangente a la “curva de nivel” que pasa por el punto (a, b) tiene que ser uno de esos dos vectores perpendiculares al “vector gradiente” en dicho punto, con lo cual el mismo será perpendicular a la curva de nivel en (a, b) . Además, el sentido del vector gradiente en ese punto será hacia la región del plano donde estén

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

los valores mayores de la función, pues en su misma dirección y sentido la “derivada direccional” será positiva y la función entonces será creciente (esa derivada direccional será el módulo de dicho vector gradiente, pues es $\alpha = 0$, como dijimos en el apartado 2).

5) Dada una curva cualquiera del plano de ecuación $\overline{f(x, y) = 0}$, siempre podemos interpretarla como curva de nivel cero de la función $z = f(x, y)$. Pues bien, si $P(a, b)$ es un punto de dicha curva donde la función f sea “diferenciable”, la recta tangente a la curva en P tendrá por ecuación

$$\overline{f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b) = 0}$$

ya que el “vector gradiente” de f en P , de componentes $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$, es perpendicular a dicha recta (en la Sección 8.3 se establece que cuando tenemos una recta que pasa por (a, b) , de ecuación $A(x - a) + B(y - b) = 0$, los coeficientes A y B son las componentes de un vector normal o perpendicular a dicha recta).

Ejemplo importante: En un mapa topográfico de una zona cualquiera, con ciertas curvas de nivel representadas, la función que corresponde a esas curvas de nivel es la altura z (en metros) sobre el nivel del mar de cada punto del terreno, cuyas variables independientes son las coordenadas (x, y) de dichos puntos en ese mapa (los cuales forman el dominio de esa función de dos variables). Si nos situamos, por ejemplo, en un punto P de la curva de nivel de 1.500 metros que corresponda sobre el terreno a una montaña, sabemos que $z(P) = 1.500$. Para fijar ideas, podemos suponer que esa curva de nivel es cerrada y representa sobre el mapa todos los puntos de las laderas de la montaña donde la altura se mantiene a 1.500 metros. Además, la región del mapa encerrada por esa curva de nivel correspondería a la parte de la montaña que tiene mayor altura que 1.500 metros (incluida la cima). Pues bien, el “vector gradiente” de la función altura $z(x, y)$, en el punto P elegido en la curva de 1.500 metros, será perpendicular a dicha curva de nivel en ese punto P y con sentido hacia la región con alturas mayores. Y el módulo de dicho vector gradiente será mayor o menor, según que la “velocidad de variación de la altura” sea mayor o menor cuando empecemos a subir por la ladera a partir de P , perpendicularmente a la curva de nivel (si la pendiente inicial es grande, tendrá un módulo grande, y si la pendiente inicial es pequeña, tendrá un módulo pequeño).

Para seguir la trayectoria de máximo ascenso en todo punto, partiendo de P hacia la cima, hay que iniciar la marcha en la dirección y sentido del citado “vector gradiente” correspondiente al punto P y, luego, a medida que vayamos subiendo, cambiar la dirección de la trayectoria en función de los nuevos “vectores gradientes” de los puntos por donde vayamos pasando (esa trayectoria es la misma que seguiría el agua de la lluvia, en sentido inverso, cuando bajase por la ladera pasando por los puntos de nuestro recorrido y que iría a parar al punto P inicial, ya que el agua sigue la máxima pendiente en todo punto de su recorrido, por gravedad).

Otro ejemplo: Sea la función $z = x^2 + y^2$, cuyo dominio A es todo $\mathbb{R}^2$ (continua en todo el dominio por ser función elemental). Tenemos además $z_x = 2x$ y $z_y = 2y$, que existen y son también continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, al ser continuas sus dos derivadas parciales primeras en cualquier punto del plano, su “dominio de diferenciabilidad” será todo $\mathbb{R}^2$, según una conocida propiedad (ver Sección 6.3).

Entonces el “campo vectorial plano de los vectores gradiente” es: $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, para todo punto (x, y) del plano. Por ejemplo, para el punto $(3, -2)$ el vector gradiente es $\nabla f(3, -2) = (6, -4)$.

Y podemos hacer las siguientes consideraciones:

a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, -2) = (6, -4) \circ \vec{u} = 6 \cdot u_1 - 4 \cdot u_2$, siendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario cualquiera.

Así, por ejemplo, para $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, se tiene: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, -2) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 - 2\sqrt{3}$,

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

luego la función es **decreciente** en el punto dado, en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$ dado. Y su velocidad de decrecimiento es $|-3 - 2\sqrt{3}| = 3 + 2\sqrt{3}$.

b) Si nos piden, por ejemplo, la “derivada direccional” de f en el punto $(3, -2)$ según la dirección y sentido del vector $\vec{v} = (1, -1)$, cuyo módulo es $\sqrt{2}$, habrá que obtener primero el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector dado, para lo cual dividimos las dos componentes de dicho vector por el módulo del mismo. Ese vector unitario es $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ahora sí podemos hallar la “derivada direccional”:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3, -2) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, -2) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

que nos indica función **creciente** en el punto dado, en la dirección y sentido del vector $\vec{v}$ dado, con velocidad de crecimiento $5\sqrt{2}$.

c) El valor máximo de todas las “derivadas direccionales” en el punto $(3, -2)$ es el módulo del “vector gradiente” en ese punto: $\sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$. Y el valor mínimo de todas las “derivadas direccionales” en ese mismo punto es $-\sqrt{52}$. Además, podemos decir que la derivada máxima se obtiene en la dirección y sentido del “vector gradiente” y la derivada mínima se obtiene en la misma dirección, pero en sentido contrario. Nótese que, en efecto, las derivadas direccionales que habíamos calculado están entre este mínimo y este máximo: $-\sqrt{52} < -3 - 2\sqrt{3} < 5\sqrt{2} < \sqrt{52}$.

d) Comprobemos por cálculo que la “derivada direccional” según la dirección y sentido del vector gradiente en $(3, -2)$ da $\sqrt{52}$: Buscamos el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector gradiente $\vec{v} = \nabla f(3, -2) = (6, -4)$. Este es $\vec{u} = \left(\frac{6}{\sqrt{52}}, -\frac{4}{\sqrt{52}}\right)$. Por tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3, -2) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, -2) = \nabla f(3, -2) \circ \vec{u} = (6, -4) \circ \left(\frac{6}{\sqrt{52}}, -\frac{4}{\sqrt{52}}\right) = \frac{36}{\sqrt{52}} + \frac{16}{\sqrt{52}} = \frac{52}{\sqrt{52}} = \sqrt{52}$$

e) La “curva de nivel” de la función f que pasa por el punto $(3, -2)$ es $\boxed{f(x, y) = k}$, donde k tiene que ser el valor de la función en dicho punto (ver Sección 5.1). Por tanto, dicha curva será $\boxed{x^2 + y^2 = 13}$ (circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{13}$). Pues bien, el “vector gradiente” de la función en el punto $P(3, -2)$ será perpendicular a esa curva de nivel.

En efecto, el segmento OP es un radio de la circunferencia, luego será perpendicular a la misma. Por tanto, el vector $\vec{OP} = (3 - 0, -2 - 0) = (3, -2)$ también será perpendicular a la circunferencia. Pero el vector gradiente en el punto P es $(6, -4)$ y, al ser proporcional a $\vec{OP}$, tendrá la misma dirección. En consecuencia, el vector gradiente también será perpendicular a la curva de nivel, como habíamos dicho.

Vectores gradiente y derivadas direccionales de funciones de tres variables

Lo dicho anteriormente para funciones de dos variables puede extenderse a funciones de tres variables de un modo análogo.

El “vector gradiente” en cada uno de los puntos del espacio donde basta que $f(x, y, z)$ sea “derivable” es un vector de tres componentes, las cuales coinciden con los valores de las tres derivadas parciales primeras de f en dicho punto.

Sin embargo, los “vectores gradiente” se consideran casi siempre en puntos donde la función sea “diferenciable” (más que “derivable”) por la importancia de esta propiedad en lo que sigue, como ocurre con las funciones de dos variables.

Entonces el “campo vectorial en el espacio” de los vectores gradiente es

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

para cada punto (x, y, z) donde la función f sea “derivable”. (Este “campo vectorial” es una “función vectorial” de tres componentes y tres variables independientes).

Se define la “derivada direccional” en un punto “interior” (a, b, c) del dominio de $f(x, y, z)$, según la dirección y sentido de un vector unitario cualquiera $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, como un límite análogo al dado para dos variables (pág. 1). Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + t \cdot u_1, b + t \cdot u_2, c + t \cdot u_3) - f(a, b, c)}{t}$$

Y se tiene así mismo el Teorema que garantiza que en cualquier punto (a, b, c) donde f sea “diferenciable”, existe la “derivada direccional” según la dirección y sentido de cualquier vector unitario $\vec{u}$, siendo dicha derivada el producto escalar del “vector gradiente” de f en (a, b, c) por el vector $\vec{u}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \circ \vec{u} = f_x(a, b, c) \cdot u_1 + f_y(a, b, c) \cdot u_2 + f_z(a, b, c) \cdot u_3$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, cumpliendo la condición $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$.

Y al ser entonces $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = |\nabla f(a, b, c)| \cdot \cos \alpha$, donde α es el ángulo no obtuso que forma el “vector gradiente” en (a, b, c) con el vector $\vec{u}$, se tiene que el valor máximo de todas las derivadas direccionales de la función, calculadas en el punto, es el módulo del “vector gradiente” en dicho punto. También que el valor mínimo de todas las derivadas direccionales de la función, calculadas en el punto, es el opuesto del módulo del “vector gradiente” en dicho punto.

Y, como en este caso trabajamos con vectores del espacio, hay infinitos vectores unitarios $\vec{u}$ que son perpendiculares al “vector gradiente” en el punto (a, b, c) , los cuales nos darán “derivadas direccionales” que valen cero (dichos vectores estarán en el plano que pasa por (a, b, c) y es perpendicular al “vector gradiente”).

O sea, también se cumple $-\left|\nabla f(a, b, c)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) \leq \left|\nabla f(a, b, c)\right|$, para todo $\vec{u}$ unitario.

Y en la relación anterior, la igualdad del lado derecho se dará cuando

$$\vec{u} = \left(\frac{f_x(a, b, c)}{|\nabla f(a, b, c)|}, \frac{f_y(a, b, c)}{|\nabla f(a, b, c)|}, \frac{f_z(a, b, c)}{|\nabla f(a, b, c)|} \right)$$

ya que éste es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\nabla f(a, b, c)$.

Mientras que la igualdad del lado izquierdo se dará cuando tomemos el opuesto del vector unitario anterior, que tiene la misma dirección que $\nabla f(a, b, c)$ pero sentido contrario.

Y si consideramos la “superficie de nivel” que pasa por el punto $P(a, b, c)$, donde f se supone “diferenciable” (superficie de ecuación $f(x, y, z) = f(a, b, c)$), resultará que el “vector gradiente” en ese punto P es perpendicular a dicha “superficie de nivel”, y está orientado hacia la región del espacio donde los valores de la función f sean mayores que $f(a, b, c)$.

Por último, dada una superficie del espacio de ecuación $f(x, y, z) = 0$, siempre podemos interpretarla como “superficie de nivel cero” de la función $w = f(x, y, z)$. Entonces, si $P(a, b, c)$ es un punto de dicha superficie donde la función f sea “diferenciable”, el plano tangente a la superficie en P tendrá ecuación:

$$f_x(a, b, c) \cdot (x - a) + f_y(a, b, c) \cdot (y - b) + f_z(a, b, c) \cdot (z - c) = 0$$

ya que el “vector gradiente” de f en P , de componentes $f_x(a, b, c)$, $f_y(a, b, c)$ y $f_z(a, b, c)$, es perpendicular a dicho plano (recuérdese de la Sección 8.7 que si tenemos un plano que pase por (a, b, c) , de ecuación $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$, un vector normal o perpendicular a dicho plano es el de componentes escalares A, B y C).

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

Nota importante: A su vez, una consecuencia de lo anterior es que podemos escribir fácilmente la ecuación del **plano tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto $(a, b, f(a, b))$** de la misma, cuando f sea “diferenciable” en el punto (a, b) de su dominio.

En efecto, dicha gráfica (que normalmente es una región de superficie del espacio) puede interpretarse como “la superficie de nivel cero” de la función de tres variables $w = f(x, y) - z$, cuya ecuación será $f(x, y) - z = 0$ o bien $z = f(x, y)$, siendo $P(a, b, f(a, b))$ un punto de la misma (caso anterior). Pero la función w tiene “vectores gradiente” de la forma $(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$.

Por tanto, el plano tangente a esa superficie en el punto P tiene ecuación:

$$f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b) + (-1) \cdot (z - f(a, b)) = 0$$

que puede escribirse más fácilmente como:

$$z - f(a, b) = f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Obsérvese el parecido con la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función de una variable $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ de la misma, cuando f sea “diferenciable” (o sea, derivable) en $x = a$, la cual es como sabemos $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Ejemplo: Sea la función $w = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$, cuyo dominio A es todo el espacio $\mathbb{R}^3$ (continua en todo punto por ser “función elemental”). Sus derivadas parciales primeras son $w_x = x/2$; $w_y = 2y/9$; $w_z = 2z$. Las cuales existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, luego la función dada es “diferenciable” en todo el espacio. Por tanto, $\nabla w(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 2z\right)$, para todo (x, y, z) del espacio.

Dado ahora el punto $P(0, 3, 0)$, la “superficie de nivel” que lo contiene es: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, pues $w(0, 3, 0) = 1$. Esta superficie es un “elipsoide” de centro el origen y semiejes 2, 3 y 1, donde los tres ejes de coordenadas son ejes de simetría de la superficie y la cortan perpendicularmente, siendo P uno de los puntos de corte con el eje OY (Ver Sección 8.9). Y el “vector gradiente” en P es $\nabla f(0, 3, 0) = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$. Observamos que tiene la dirección del eje OY y sentido concordante con el sentido positivo sobre dicho eje. Por lo tanto, estamos comprobando que el “vector gradiente” en P es perpendicular a la “superficie de nivel” en ese punto y su sentido es hacia la parte exterior del “elipsoide” (donde la función toma valores mayores que 1).

Y si nos preguntan ahora por el posible crecimiento o decrecimiento de la función dada en el punto P dado, en la dirección y sentido del vector $\vec{v} = (-1, 2, -2)$, tendremos que hallar el módulo de este vector y, si no es unitario, tendremos que dividir sus tres componentes entre dicho módulo para obtener el vector unitario $\vec{u}$ que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$. Luego hallaremos la derivada direccional correspondiente y veremos si es positiva, negativa o cero.

Veamos lo que pasa: $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, luego $\vec{u} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Además, sabemos que $\nabla f(P) = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, con lo cual $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \circ \vec{u} = 4/9$. En consecuencia, la función crece en el punto P , en la dirección y sentido del vector $\vec{v}$. Pero además podemos afirmar que la velocidad de crecimiento, cuando estamos en P y comenzamos a desplazarnos en la dirección y sentido de $\vec{v}$ es $4/9$ (unidades de medida de w / unidades de longitud). Por ejemplo, si w nos da la temperatura (en grados centígrados) en cada punto del espacio y estamos midiendo la longitud en centímetros, la velocidad de crecimiento en P cuando nos desplazamos en la dirección y sentido del vector $\vec{v}$ será $\frac{4}{9} = 0'444\dots$ (grados/centímetros).

Otro ejemplo: Sea la función $w = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ de dominio $\mathbb{R}^3$ (continua por ser “función elemental”), cuyas derivadas parciales primeras son:

$$w_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; w_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; w_z = 1$$

VECTORES GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES

las cuales existen y son continuas en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, o sea en todo el espacio menos los puntos del eje OZ. Por tanto, ese es el “dominio de diferenciabilidad” D de la función dada (recuérdese que si las derivadas parciales son continuas en un punto, la función es “diferenciable” en dicho punto; Sección 6.3).

La “superficie de nivel cero” de la función dada es $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (“semisuperficie cónica”, de revolución, de vértice el origen de coordenadas y de cotas no negativas, o sea la mitad superior de la “superficie cónica” de revolución de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; ver sección 8.9).

El origen de coordenadas es punto de esa superficie de nivel, pero la función no es “diferenciable” en dicho punto. Luego no podemos aplicar la ecuación del plano tangente en el origen, que sería

$$w_x(0, 0, 0) \cdot (x - 0) + w_y(0, 0, 0) \cdot (y - 0) + w_z(0, 0, 0) \cdot (z - 0) = 0$$

pues las dos primeras derivadas parciales no existen, pero es que, geométricamente, dicho plano tangente no existe al ser el origen de coordenadas “vértice” de la superficie. En efecto, ningún plano que pase por ese “vértice” cumple las condiciones de ser tangente a la superficie en dicho punto (pues no hay una pequeña región de la superficie que rodee totalmente al “vértice” y una pequeña región del plano que también lo rodee, de modo que todos los puntos de una y otra región estén tan cerca entre sí que prácticamente esas dos regiones parezcan ser la misma).

Sin embargo, en otro punto cualquiera $(a, b, \sqrt{a^2 + b^2})$, con $a \neq 0$ o $b \neq 0$, de la “semisuperficie cónica” mencionada, habrá plano tangente y su ecuación será:

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (x - a) - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (y - b) + 1 \cdot (z - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0$$

Por ejemplo, en el punto $(4, -3, 5)$ de la superficie mencionada, la ecuación del plano tangente será:

$$-\frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y + 3) + (z - 5) = 0$$
