

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

(Prerrequisitos: Fórmula de Taylor con una variable. Derivadas parciales. Diferenciales de funciones de una y varias variables)

Introducción

Ya vimos la Fórmula de Taylor (o el desarrollo de Taylor) para funciones reales de una variable real, según la cual los valores de una función $f(x)$ en un cierto entorno de un punto $x = a$ de su dominio, teniendo f derivadas continuas sucesivas hasta la de orden n en el punto a , pueden ponerse como suma de los valores de un polinomio (llamado “polinomio de Taylor de orden n correspondiente al punto a ”) con los valores de otra función (llamada “resto de Taylor de orden n correspondiente al punto a ”), teniendo la particularidad esta última función de tomar valores muy próximos a cero en los puntos del entorno que estén muy cerca de a . Así, teníamos:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + o(h^n) \quad (1)$$

siendo el polinomio de Taylor la parte del segundo miembro que va desde el primer término hasta el penúltimo, y siendo el resto de Taylor en forma infinitesimal el último término. En esta fórmula la única variable es el incremento h de la variable independiente de la función $f(x)$, y se cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$$

o sea que el resto de Taylor de orden n tiende a cero más rápidamente que h^n , cuando $h \rightarrow 0$ (eso es lo que significa la notación $o(h^n)$ utilizada).

De la propiedad del resto de Taylor de tender a cero muy rápidamente cuando $h \rightarrow 0$ resulta la llamada “fórmula de aproximación de Taylor de orden n en el punto $x = a$ ”, válida solamente para $|h|$ suficientemente pequeño:

$$f(a+h) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$$

donde el error cometido al aplicar esta aproximación cumple: $|error| \leq |h|^n$, si el valor absoluto de h es suficientemente pequeño. Vemos que entonces el error disminuye con la disminución de $|h|$ y con el aumento de n .

Basta que hagamos el cambio de variable $a+h=x$, con lo cual hay que sustituir h por $x-a$, y la anterior Fórmula de Taylor queda escrita del siguiente modo equivalente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + o[(x-a)^n]$$

que, en el caso $a=0$, se llama “desarrollo de MacLaurin de orden n de la función $f(x)$ ”.

Pues bien, ahora vamos a establecer la Fórmula de Taylor análoga para funciones reales de dos variables reales y la que corresponde a funciones reales de tres variables reales, todas de gran importancia en aplicaciones.

Desarrollo de Taylor de una función de dos variables

Nos limitaremos al desarrollo de Taylor de orden 3 ($n=3$) para funciones reales de dos variables reales (que, junto al desarrollo más corto de orden 2 análogo, son los más utilizados).

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

TEOREMA DE TAYLOR (desarrollo de orden 3 para funciones reales de dos variables reales): Si la función $f(x, y)$ posee derivadas parciales continuas hasta las de orden tres en un entorno del punto (a, b) interior de su dominio, se tiene:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \cdot [f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k] + \frac{1}{2!} \cdot [f_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2 \cdot f_{xy}(a, b) \cdot hk + f_{yy}(a, b) \cdot k^2] + \frac{1}{3!} \cdot [f_{xxx}(a, b) \cdot h^3 + 3 \cdot f_{xxy}(a, b) \cdot h^2k + 3 \cdot f_{xyy}(a, b) \cdot hk^2 + f_{yyy}(a, b) \cdot k^3] + o \left[\left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3 \right]$$

donde la variable h representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente “ x ” y donde la variable k representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente “ y ”, con la única limitación de que el punto $(a+h, b+k)$ pertenezca al dominio de la función f .

Obsérvese que el orden de la fórmula coincide con el mayor orden de las derivadas parciales que intervienen en la misma.

El último término del desarrollo se llama “resto de Taylor de orden 3 en forma infinitesimal” y sus valores son la diferencia entre los valores de la función en los puntos $(a+h, b+k)$ y los correspondientes valores del “polinomio de Taylor de orden 3”, formado por todos los términos restantes del segundo miembro. Y se demuestra que dicha función tiende a cero más rápidamente que $\left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3$ cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. De ahí su notación como “infinitésimo de orden superior a esta última función”. (Ver Sección 3.4).

Por tanto, para $|h|$ y $|k|$ suficientemente pequeños podremos suponer $\left| \text{resto} \right| \leq \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3$, pero esto no ocurre del mismo modo para todas las funciones (para unas se cumple sin necesidad de que los incrementos sean demasiado pequeños, y para otras empieza a cumplirse solamente cuando los incrementos son ya muy pequeños). Por tanto, nunca estaremos seguros de que se cumpla la anterior desigualdad para unos determinados incrementos fijos que estemos usando. Sólo podremos decir que “posiblemente se cumpla la desigualdad” y debemos saber que, cuanto menores sean los valores absolutos de todos los incrementos que usemos, más probabilidad hay de que se cumpla la desigualdad.

Nótese que hay una gran analogía entre esta última fórmula de Taylor y la (1) que corresponde a funciones de una variable, cuando tomemos ésta con $n = 3$. En efecto, el segundo miembro de esta última empieza por $f(a, b)$ y aquella comenzaba por $f(a)$. El segundo término de ésta puede resumirse en $\frac{df(a,b)}{1!} = \frac{f_x(a,b) \cdot h + f_y(a,b) \cdot k}{1!}$ mientras que el segundo término de (1) era $\frac{df(a)}{1!} = \frac{f'(a) \cdot h}{1!}$. (Ver Sección 6.3). De igual modo, el tercer término de esta última fórmula puede resumirse como $\frac{d^2f(a,b)}{2!}$ y el tercer término de la fórmula (1) se puede escribir $\frac{d^2f(a)}{2!}$. Análogamente, los cuartos términos de ambas fórmulas pueden expresarse en las formas equivalentes $\frac{d^3f(a,b)}{3!}$ y $\frac{d^3f(a)}{3!}$.

Pero además, si escribimos la fórmula (1) con $n = 3$, su resto sería $o(h^3)$. Y el resto de esta última fórmula generaliza el anterior, pues cuando hay un solo incremento h , la expresión dada $o \left[\left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3 \right]$ se reduce a $o \left[\left(\sqrt{h^2} \right)^3 \right] = o(|h|^3)$, que podemos escribir $o(h^3)$ (pues si $|h| \rightarrow 0$ también $h \rightarrow 0$ y viceversa).

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Para justificar lo dicho anteriormente, vemos a continuación las diferenciales segundas y terceras para funciones de una variable y para funciones de dos variables:

“La diferencial segunda” de una función de una variable se establece así:

$$\boxed{d^2 f(x) = d[df(x)] = d[f'(x) \cdot h] = [df'(x)] \cdot h = [f''(x) \cdot h] \cdot h = f''(x) \cdot h^2}$$

y de manera similar se establece “la diferencial segunda” de una función de dos variables:

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d[df(x, y)] = d[f_x(x, y) \cdot h + f_y(x, y) \cdot k] = [df_x(x, y)] \cdot h + \\ &+ [df_y(x, y)] \cdot k = [f_{xx}(x, y) \cdot h + f_{xy}(x, y) \cdot k] \cdot h + [f_{yx}(x, y) \cdot h + f_{yy}(x, y) \cdot k] \cdot k = \\ &= f_{xx}(x, y) \cdot h^2 + f_{xy}(x, y) \cdot kh + f_{yx}(x, y) \cdot hk + f_{yy}(x, y) \cdot k^2 \end{aligned}$$

y como suponemos en el Teorema de Taylor que todas las derivadas segundas son continuas, tenemos que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, con lo cual se concluye (para el Teorema de Taylor):

$$\boxed{d^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot h^2 + 2 \cdot f_{xy}(x, y) \cdot hk + f_{yy}(x, y) \cdot k^2}$$

Esta expresión de “la diferencial segunda” se parece al desarrollo del cuadrado de un binomio, por lo cual se le suele también recordar a través de un cuadrado simbólico así:

$$d^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2}{\partial y^2} k^2\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

De modo análogo, se obtienen “las diferenciales terceras” de una función de una variable y de una función de dos variables, que aparecen en los cuartos términos de los respectivos desarrollos de Taylor, sustituidas en el punto $x = a$ o en el punto (a, b) :

$$\boxed{d^3 f(x) = f'''(x) \cdot h^3} \quad (\text{para una variable})$$

$$\boxed{d^3 f(x, y) = f_{xxx}(x, y) \cdot h^3 + 3 \cdot f_{xxy}(x, y) \cdot h^2 k + 3 \cdot f_{xyy}(x, y) \cdot h k^2 + f_{yyy}(x, y) \cdot k^3}$$

(para dos variables)

Y también se usa para esta última un cubo simbólico así:

$$d^3 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k^3$$

Ahora, de la propiedad del resto de Taylor se deduce la “fórmula de aproximación de Taylor de orden 3 en el punto (a, b) ” para funciones de dos variables, que usando las diferenciales anteriores es:

$$\boxed{f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2 f(a, b)}{2!} + \frac{d^3 f(a, b)}{3!}}$$

válida para incrementos h y k pequeños en valor absoluto (cuanto más pequeños ambos, mejor).

Y se tiene $\boxed{|error| \leq \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3}$, cuando $|h|$ y $|k|$ sean suficientemente pequeños.

Lo anterior ocurre porque el error cometido al aplicar la “fórmula de aproximación” es precisamente el valor del resto (eliminado de la fórmula de Taylor principal, la cual es exacta).

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Nota 1: También podemos escribir la fórmula de Taylor de orden 3 para funciones de dos variables haciendo los cambios de variables $[a + h = x]$ y $[b + k = y]$, con lo cual habrá que sustituir h por $x - a$ así como sustituir k por $y - b$, obteniéndose:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)}{1!} + \dots + o \left[\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \right)^3 \right]$$

Nota 2: Finalmente, la fórmula de Taylor de orden 2 (reducción de la de orden 3 dada anteriormente), tiene como resto de Taylor en forma infinitesimal la siguiente expresión

$$o \left[\left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^2 \right] = o(h^2 + k^2)$$

Por tanto, podemos escribir:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2 f(a, b)}{2!} + o(h^2 + k^2)$$

Y también se puede agrandar la fórmula de Taylor de orden 3 en un punto (a, b) , hasta la de orden n ($n > 3$), siempre que la función $f(x, y)$ admita todas las nuevas derivadas parciales hasta las del orden n inclusive en un entorno de (a, b) , y que sean todas continuas en dicho entorno.

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3 en el punto $(-1, 2)$ correspondiente a la función $z = \ln(x + y) - 3x^2 + 2y^2$. Y utilizarlo para calcular una aproximación del valor de esta función en el punto $(-0.8, 1.9)$, dando una posible cota superior del error cometido.

El dominio de la función es el semiplano definido por la inequación $x + y > 0$, cuyo borde no perteneciente es la recta de ecuación $y = -x$ (bisectriz de los cuadrantes 2º y 4º), el cual incluye todos los puntos del primer cuadrante, entre otros muchos. El punto dado $(-1, 2)$ pertenece a dicho dominio, pues $(-1) + 2 = 1 > 0$. Y como no está en su borde, será punto “interior” del mismo.

Sus derivadas parciales hasta las de orden 3 son:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{x+y} - 6x & ; & & z_y &= \frac{1}{x+y} + 4y & ; & & z_{xx} &= -\frac{1}{(x+y)^2} - 6 & ; \\ z_{xy} &= z_{yx} = -\frac{1}{(x+y)^2} & ; & & z_{yy} &= -\frac{1}{(x+y)^2} + 4 & ; & & z_{xxx} &= \frac{2}{(x+y)^3} \end{aligned}$$

y las demás derivadas parciales de orden 3 son iguales a z_{xxx} . Vemos que existen todas y son continuas (por ser funciones elementales) en un cierto entorno del punto $(-1, 2)$ (podemos tomar un entorno circular de dicho punto, cuyo radio sea un número menor que la distancia del mismo a la recta $y = -x$).

Por tanto, se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema de Taylor (de orden 3, para funciones de dos variables) y entonces podemos aplicarlo:

Los valores de la función y de sus derivadas parciales hasta el orden 3 en el punto dado son:

$$\begin{aligned} f(-1, 2) &= 5 & ; & & f_x(-1, 2) &= 7 & ; & & f_y(-1, 2) &= 9 & ; & & f_{xx}(-1, 2) &= -7 & ; & & f_{xy}(-1, 2) &= -1 & ; \\ f_{yy}(-1, 2) &= 3 & ; & & f_{xxx}(-1, 2) &= f_{xxy}(-1, 2) &= f_{xyy}(-1, 2) &= f_{yyy}(-1, 2) &= 2 \end{aligned}$$

con lo cual el desarrollo de Taylor es:

$$\begin{aligned} f(-1 + h, 2 + k) &= 5 + 7h + 9k + \frac{1}{2}(-7h^2 - 2hk + 3k^2) + \\ &+ \frac{1}{6}(2h^3 + 6h^2k + 6hk^2 + 2k^3) + o \left[\left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

o bien

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

$$f(-1 + h, 2 + k) = 5 + 7h + 9k - \frac{7}{2}h^2 - hk + \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{3}h^3 + h^2k + hk^2 + \frac{1}{3}k^3 + o[(h^2 + k^2)^{3/2}]$$

Utilicemos ahora el anterior desarrollo para obtener una aproximación del valor de la función en el punto $(-0'8, 1'9)$. Se trata de aplicar la correspondiente fórmula de aproximación de Taylor, que resulta de quitar el resto y poner el símbolo \approx de aproximación en vez de $=$ en la fórmula anterior:

Igualando $-1 + h$ con $-0'8$ resulta $h = 0'2$. E igualando $2 + k$ con $1'9$ resulta $k = -0'1$. Se tiene entonces:

$$f(-0'8, 1'9) \approx 5 + 1'4 - 0'9 - \frac{7}{2} \cdot 0'04 + 0'02 + \frac{3}{2} \cdot 0'01 + \frac{1}{3} \cdot 0'008 - 0'004 + 0'002 - \frac{1}{3} \cdot 0'001 = 5'5 - 7 \cdot 0'02 + 0'02 + \frac{0'03}{2} + \frac{0'008}{3} - 0'002 - \frac{0'001}{3} = 5'5 - 6 \cdot 0'02 + 0'015 + \frac{0'007}{3} - 0'002 = 5'5 - 0'12 + 0'013 + 0'00233... = \boxed{5'395333...}$$

Y una posible cota superior del error cometido en valor absoluto es:

$$(\sqrt{h^2 + k^2})^3 = (\sqrt{0'04 + 0'01})^3 = \sqrt{0'05^3} = \sqrt{0'000125} = \boxed{0'011180...}$$

Como los incrementos utilizados son pequeños, puede que el valor absoluto del error verdadero cometido en esta aproximación sea en efecto menor que esta cota, pero pudiese no ser así, ya que no son muy pequeños (la posibilidad de que el valor absoluto del error verdadero sea menor que la cota anterior aumenta cuando disminuyen los valores absolutos de los incrementos utilizados). Veamos: El valor exacto de la función en el punto $(-0'8, 1'9)$, obtenido utilizando una calculadora es $5'395310...$, luego el verdadero error cometido al aplicar la fórmula de aproximación de Taylor es aproximadamente $0'000023$ (y vemos que es mucho menor que la cota $0'011180...$).

Calculemos ahora la nueva aproximación de $f(-0'8, 1'9)$ que se obtiene al aplicar la fórmula de aproximación de Taylor de orden 2, en vez de la de orden 3 como hicimos anteriormente (misma función y mismo punto de referencia, con lo cual tenemos también los mismos incrementos de las variables: $h = 0'2$ y $k = -0'1$, pero ahora es $n = 2$).

La fórmula de aproximación de Taylor de orden 2 en el punto (a, b) es:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + \frac{f_x(a,b) \cdot h + f_y(a,b) \cdot k}{1!} + \frac{f_{xx}(a,b) \cdot h^2 + 2f_{xy}(a,b) \cdot hk + f_{yy}(a,b) \cdot k^2}{2!}$$

°Por tanto, sustituyendo los valores de la función y de las derivadas en $(-1, 2)$, tenemos:

$$f(-1 + h, 2 + k) \cong 5 + 7h + 9k - \frac{7}{2}h^2 - hk + \frac{3}{2}k^2, \text{ siendo posiblemente } |error| \leq h^2 + k^2.$$

Y al sustituir $h = 0'2$ y $k = -0'1$, tenemos:

$$f(-0'8, 1'9) \cong 5 + 1'4 - 0'9 - \frac{7}{2} \cdot 0'04 + 0'02 + \frac{3}{2} \cdot 0'01 = 5'5 - 7 \cdot 0'02 + 0'02 + 0'015 = \boxed{5'395}$$

Siendo una posible cota superior del error cometido en valor absoluto: $h^2 + k^2 = \boxed{0'05}$ (la cota ha crecido respecto al cálculo anterior hecho con $n = 3$). Y como el valor exacto que habíamos obtenido con la calculadora es $5'395310...$, el verdadero error en valor absoluto es en este caso $0'000310...$ (mayor que el cometido en el cálculo aproximado anterior, pero sigue siendo menor que la nueva cota e incluso que la anterior, luego es un resultado muy bueno).

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Otro ejemplo: Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3 en el punto $(\pi/6, \pi/3)$ correspondiente a la función $z = \text{sen}(2x - y) + \cos(x + y) + 2$. Y utilizarlo para calcular una aproximación del valor de esta función en el punto $((\pi/6) - 0'2, (\pi/3) + 0'3)$, dando una posible cota superior del error cometido.

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 , con lo cual el punto dado es “interior” del mismo. Y las derivadas parciales sucesivas hasta las de orden 3 son:

$$\begin{aligned} z_x &= 2 \cdot \cos(2x - y) - \text{sen}(x + y) ; & z_y &= -\cos(2x - y) - \text{sen}(x + y) ; \\ z_{xx} &= -4 \cdot \text{sen}(2x - y) - \cos(x + y) ; & z_{xy} &= 2 \cdot \text{sen}(2x - y) - \cos(x + y) ; \\ z_{yy} &= -\text{sen}(2x - y) - \cos(x + y) ; & z_{xxx} &= -8 \cdot \cos(2x - y) + \text{sen}(x + y) ; \\ z_{xxy} &= 4 \cdot \cos(2x - y) + \text{sen}(x + y) ; & z_{xyy} &= -2 \cdot \cos(2x - y) + \text{sen}(x + y) ; \\ & & z_{yyy} &= \cos(2x - y) + \text{sen}(x + y) \end{aligned}$$

continuas en todo \mathbb{R}^2 , luego lo serán en cualquier entorno del punto $P(\pi/6, \pi/3)$.

Por tanto, se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema de Taylor de orden 3 y lo podemos aplicar:

Los valores de la función y sus derivadas parciales en el punto P son:

$$\begin{aligned} f(P) &= 2 ; & f_x(P) &= 1 ; & f_y(P) &= -2 ; & f_{xx}(P) &= 0 ; & f_{xy}(P) &= 0 ; \\ f_{yy}(P) &= 0 ; & f_{xxx}(P) &= -7 ; & f_{xxy}(P) &= 5 ; & f_{xyy}(P) &= -1 ; & f_{yyy}(P) &= 2 \end{aligned}$$

El desarrollo de Taylor es entonces:

$$f\left(\frac{\pi}{6} + h, \frac{\pi}{3} + k\right) = 2 + h - 2k - \frac{7}{6}h^3 + \frac{5}{2}h^2k - \frac{1}{2}hk^2 + \frac{1}{3}k^3 + o\left[\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3\right]$$

Para calcular valor aproximado de $f(\pi/6 - 0'2, \pi/3 + 0'3)$ usaremos la fórmula de aproximación de Taylor correspondiente al desarrollo anterior con $h = -0'2$ y $k = 0'3$. Así:

$$f\left(\frac{\pi}{6} - 0'2, \frac{\pi}{3} + 0'3\right) \approx 2 - 0'2 - 0'6 + \frac{7}{6} \cdot 0'008 + \frac{5}{2} \cdot 0'012 + \frac{1}{2} \cdot 0'018 + \frac{1}{3} \cdot 0'027 = \boxed{1'257333\dots}$$

Y una posible cota superior del error cometido en valor absoluto es:

$$\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3 = \left(\sqrt{0'04 + 0'09}\right)^3 = \sqrt{0'13^3} = \boxed{0'046872\dots}$$

Los valores de los incrementos son pequeños, pero no demasiado. Por lo tanto, la cota superior del error anteriormente calculada puede que funcione, pero no es seguro. Por lo tanto, podemos estimar que $|error| \leq 0'0469$ (aplicando un redondeo por exceso en la cuarta cifra decimal a la cota obtenida).

En la práctica, normalmente, no se tiene el valor exacto (por algo se aplica el desarrollo de Taylor para obtener una aproximación), por lo cual nos tendríamos que contentar con saber que el valor exacto estará probablemente entre los números

$$\boxed{\text{valor aproximado}} - \boxed{\text{la cota}} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{valor aproximado}} + \boxed{\text{la cota}}$$

En nuestro caso, entre $1'21046\dots$ y $1'30420\dots$, con lo cual, abreviando, podemos concluir que el valor exacto estará probablemente entre $1'21$ y $1'31$.

En nuestro caso la calculadora nos da el resultado exacto $1'255948\dots$, que está efectivamente comprendido entre los valores anteriores. Así podemos ver el valor absoluto del verdadero error cometido, que es $0'00138\dots$ Y comprobamos que se cumplió la acotación $|error| \leq 0'0469$.

Si hubiésemos calculado un valor aproximado de la función dada en un punto más cercano al de referencia $(\pi/6, \pi/3)$, consecuentemente con incrementos h y k menores, el valor de la cota resultaría menor y además habría mayor seguridad de que funcione correctamente, con lo cual podríamos obtener posiblemente varias cifras decimales del resultado exacto).

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Desarrollo de Taylor de una función de tres variables

Nos limitaremos al desarrollo de orden 2 para funciones reales de tres variables reales. Se puede extender este desarrollo a uno de orden 3, obteniéndose una fórmula de Taylor similar a la que establecimos para funciones de dos variables, pero resulta muy larga.

TEOREMA DE TAYLOR (desarrollo de orden 2 para funciones reales de tres variables reales): Si la función $f(x, y, z)$ posee derivadas parciales primeras y segundas continuas en un entorno del punto (a, b, c) interior de su dominio, se tiene:

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + \frac{1}{1!} \cdot [f_x(a, b, c) \cdot h + f_y(a, b, c) \cdot k + f_z(a, b, c) \cdot l] + \frac{1}{2!} \cdot [f_{xx}(a, b, c) \cdot h^2 + f_{yy}(a, b, c) \cdot k^2 + f_{zz}(a, b, c) \cdot l^2 + 2 \cdot f_{xy}(a, b, c) \cdot hk + 2 \cdot f_{xz}(a, b, c) \cdot hl + 2 \cdot f_{yz}(a, b, c) \cdot kl] + o(h^2 + k^2 + l^2)$$

donde la variable h representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente “ x ”; donde la variable k representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente “ y ”, y donde la variable l representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente “ z ”, con la única limitación de que el punto $(a+h, b+k, c+l)$ pertenezca al dominio de la función f .

Obsérvese que el orden de la fórmula coincide con el mayor orden de las derivadas parciales que intervienen en la misma.

Como en los casos anteriores, el último término del desarrollo se llama “resto de Taylor de orden 2 en forma infinitesimal” y tiende a cero más rápidamente que la función $h^2 + k^2 + l^2$, cuando $(h, k, l) \rightarrow (0, 0, 0)$. De ahí su notación como infinitésimo de orden superior al de esa función $h^2 + k^2 + l^2$ cuando $(h, k, l) \rightarrow (0, 0, 0)$.

De la propiedad del resto de Taylor se deduce la “fórmula de aproximación de Taylor de orden 2 en el punto (a, b, c) ” para funciones de tres variables, que es:

$$f(a+h, b+k, c+l) \approx f(a, b, c) + \frac{df(a,b,c)}{1!} + \frac{d^2f(a,b,c)}{2!}$$

válida para incrementos h, k y l pequeños en valor absoluto (cuanto más pequeños mejor).

De hecho se tiene $|error| \leq h^2 + k^2 + l^2$, cuando $|h|, |k|$ y $|l|$ sean suficientemente pequeños.

Esto ocurre porque el error cometido es el valor del resto (que ha sido eliminado). Y el valor $h^2 + k^2 + l^2$ se llama “una posible cota superior del error cometido en valor absoluto”.

Nota: La expresión que aparece en el anterior desarrollo de Taylor multiplicada por $1/1!$ es la diferencial de la función f en el punto (a, b, c) . Y la expresión que aparece multiplicada por $1/2!$ es la diferencial segunda de la función f en ese mismo punto. Con lo cual la fórmula de Taylor anterior se puede resumir así:

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + \frac{df(a,b,c)}{1!} + \frac{d^2f(a,b,c)}{2!} + o(h^2 + k^2 + l^2)$$

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Y para recordar la expresión de la diferencial segunda puede usarse la regla

$$\boxed{d^2 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \right)^2 f(x, y, z)}$$

donde el cuadrado es simbólico y se desarrolla como

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Así, por ejemplo, el cuadrado del símbolo $\frac{\partial}{\partial x} h$ nos da el símbolo $\frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2$, que aplicado a $f(x, y, z)$ nos da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2$. De igual modo, el producto simbólico de $\frac{\partial}{\partial x} h$ por $\frac{\partial}{\partial y} k$ nos da el nuevo símbolo $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} hk$, que aplicado a $f(x, y, z)$ nos da la expresión $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk$. Etc...

También podemos escribir la fórmula de Taylor de orden 2 para funciones de tres variables haciendo los cambios de variables $\boxed{a + h = x}$; $\boxed{b + k = y}$; $\boxed{c + l = z}$, con lo cual habrá que poner $h = x - a$; $k = y - b$ y $l = z - c$, obteniéndose:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(a, b, c) + \frac{f_x(a, b, c) \cdot (x-a) + f_y(a, b, c) \cdot (y-b) + f_z(a, b, c) \cdot (z-c)}{1!} + \\ & + \frac{f_{xx}(a, b, c) \cdot (x-a)^2 + f_{yy}(a, b, c) \cdot (y-b)^2 + f_{zz}(a, b, c) \cdot (z-c)^2}{2!} + \\ & + \frac{2 \cdot f_{xy}(a, b, c) \cdot (x-a) \cdot (y-b) + 2 \cdot f_{xz}(a, b, c) \cdot (x-a) \cdot (z-c) + 2 \cdot f_{yz}(a, b, c) \cdot (y-b) \cdot (z-c)}{2!} + \\ & + o[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 0, 1)$ correspondiente a la función $w = e^{x+2y-z} + 3x^2y - 2yz^2 + xyz - 4$. Y utilizarlo para calcular una aproximación del valor de esta función en el punto $(1'1, -0'2, 0'9)$, dando una posible cota superior del error cometido.

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^3 , luego el punto dado es “interior” del mismo. Y sus derivadas parciales primeras y segundas son:

$$\begin{aligned} w_x &= e^{x+2y-z} + 6xy + yz & ; & & w_y &= 2 \cdot e^{x+2y-z} + 3x^2 - 2z^2 + xz \\ w_z &= -e^{x+2y-z} - 4yz + xy & ; & & w_{xx} &= e^{x+2y-z} + 6y \\ w_{yy} &= 4 \cdot e^{x+2y-z} & ; & & w_{zz} &= e^{x+2y-z} - 4y \\ w_{xy} &= 2 \cdot e^{x+2y-z} + 6x + z & ; & & w_{xz} &= -e^{x+2y-z} + y & ; & & w_{yz} &= -2 \cdot e^{x+2y-z} - 4z + x \end{aligned}$$

que también existen y son continuas en todo \mathbb{R}^3 , luego lo serán en cualquier entorno del punto $P(1, 0, 1)$.

Por tanto, se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema de Taylor (de orden 2, para funciones de tres variables) y entonces podemos aplicarlo:

Los valores de la función y de las derivadas parciales obtenidas, en el punto $P(1, 0, 1)$, son:

$$\begin{aligned} f(P) &= -3 & ; & & f_x(P) &= 1 & ; & & f_y(P) &= 4 & ; & & f_z(P) &= -1 & ; & & f_{xx}(P) &= 1 & ; & & f_{yy}(P) &= 4 & ; & & f_{zz}(P) &= 1 & ; \\ f_{xy}(P) &= 9 & ; & & f_{xz}(P) &= -1 & ; & & f_{yz}(P) &= -5 \end{aligned}$$

Con lo cual el desarrollo de Taylor es:

$$\boxed{f(1 + h, 0 + k, 1 + l) = -3 + h + 4k - l + \frac{1}{2}h^2 + 2k^2 + \frac{1}{2}l^2 + 9hk - hl - 5kl + o(h^2 + k^2 + l^2)}$$

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

Utilicemos ahora el desarrollo anterior para obtener una aproximación del valor de la función en el punto $(1'1, -0'2, 0'9)$. Se trata de aplicar la correspondiente fórmula de aproximación de Taylor, resultante de quitar el resto y poner el símbolo \approx de aproximación en vez de $=$. Igualando $1 + h$ con $1'1$ resulta $\boxed{h = 0'1}$. Igualando $0 + k$ con $-0'2$ resulta $\boxed{k = -0'2}$. E igualando $1 + l$ con $0'9$ resulta así mismo $\boxed{l = -0'1}$. Así:

$$f(1'1, -0'2, 0'9) \approx -3 + 0'1 - 0'8 + 0'1 + \frac{0'01}{2} + 0'08 + \frac{0'01}{2} - 0'18 + 0'01 - 0'1 = \boxed{-3'78}$$

Y una posible cota superior del error cometido en valor absoluto es $h^2 + k^2 + l^2 = 0'06$. Por tanto, podemos estimar que $|error| \leq 0'06$.

En este caso también podemos usar la calculadora para conocer el valor exacto de la función obteniendo $f(1'1, -0'2, 0'9) = -3'78126\dots$ Así, el verdadero error cometido en valor absoluto es $0'00126\dots$ que está por debajo de la posible cota superior dada (a pesar de que los valores absolutos de los tres incrementos no son demasiado pequeños).

Otro ejemplo: Tomemos una función sencilla, para que no sea muy largo, pero hallemos un valor aproximado con incrementos más pequeños (centésimas en vez de décimas).

La función será $w = \text{sen}(2x + 3y - z)$, el punto de referencia $(\pi/6, -\pi/6, 0)$ y queremos valor aproximado de la función en $(\pi/6 - 0'01, -\pi/6 + 0'02, -0'03)$.

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^3 , luego el punto dado es “interior” del mismo. Y sus derivadas parciales primeras y segundas son:

$$\begin{aligned} w_x &= 2 \cdot \cos(2x + 3y - z); & w_y &= 3 \cdot \cos(2x + 3y - z); & w_z &= -\cos(2x + 3y - z) \\ w_{xx} &= -4 \cdot \text{sen}(2x + 3y - z); & w_{yy} &= -9 \cdot \text{sen}(2x + 3y - z); & w_{zz} &= -\text{sen}(2x + 3y - z) \\ w_{xy} &= -6 \cdot \text{sen}(2x + 3y - z); & w_{xz} &= 2 \cdot \text{sen}(2x + 3y - z); & w_{yz} &= 3 \cdot \text{sen}(2x + 3y - z) \end{aligned}$$

que también existen y son continuas en \mathbb{R}^3 , luego lo serán en cualquier entorno del punto de referencia $P(\pi/6, -\pi/6, 0)$.

Por tanto, se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema de Taylor y podemos aplicarlo:

Para calcular los valores de la función y de las derivadas parciales anteriores en el punto P , conviene saber que el valor de $2x + 3y - z$ es $-\pi/6$, con lo cual $\text{sen}(P) = -1/2$ y $\text{cos}(P) = \sqrt{3}/2$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} f(P) &= -1/2; & f_x(P) &= \sqrt{3}; & f_y(P) &= 3\sqrt{3}/2; & f_z(P) &= -\sqrt{3}/2 \\ f_{xx}(P) &= 2; & f_{yy}(P) &= 9/2; & f_{zz}(P) &= 1/2; & f_{xy}(P) &= 3; & f_{xz}(P) &= -1; & f_{yz}(P) &= -3/2 \end{aligned}$$

Y el desarrollo de Taylor es entonces:

$$f\left(\frac{\pi}{6} + h, -\frac{\pi}{6} + k, 0 + l\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}h + \frac{3\sqrt{3}}{2}k - \frac{\sqrt{3}}{2}l + h^2 + \frac{9}{4}k^2 + \frac{1}{4}l^2 + 3hk - hl - \frac{3}{2}kl + o(h^2 + k^2 + l^2)$$

Queremos ahora calcular una aproximación de $f(\pi/6 - 0'01, -\pi/6 + 0'02, 0 - 0'03)$, para lo cual usamos la fórmula de aproximación que se deduce del anterior desarrollo quitando el resto y poniendo el símbolo \approx de aproximación en sustitución del $=$:

FÓRMULA DE TAYLOR CON DOS Y TRES VARIABLES

$$\begin{aligned} f(\pi/6 - 0'01, -\pi/6 + 0'02, -0'03) &\approx \\ &\approx -0'5 - 0'01 \cdot \sqrt{3} + 0'03 \cdot \sqrt{3} + 0'015 \cdot \sqrt{3} + 0'0001 + 0'0009 + \\ &+ 0'000225 - 0'0006 - 0'0003 + 0'0009 = -0'5 + 0'035 \cdot \sqrt{3} + 0'001 + 0'000225 = \\ &= -0'498775 + 0'035 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

Y dando por conocido el valor de $\sqrt{3}$, tenemos finalmente la aproximación $\boxed{-0'438153\dots}$

Una posible cota superior del error cometido en valor absoluto es: $\boxed{h^2 + k^2 + l^2 = 0'0014}$, de donde se concluye que el valor exacto estará entre $-0'438153\dots - 0'0014 = -0'439553\dots$ y $-0'438153\dots + 0'0014 = -0'436753\dots$, con bastante seguridad (dado que los incrementos usados son bastante pequeños). Entonces podemos decir que el valor exacto muy probablemente sea $\boxed{-0'43\dots}$.

Y, efectivamente, obtenido el valor exacto de la función con una calculadora, resulta ser $-0'438203\dots$, con lo cual vemos que el valor absoluto del verdadero error cometido (0'00005 aproximadamente) es mucho menor que la posible cota 0'0014. Por eso el valor aproximado obtenido tiene 3 cifras decimales exactas y no sólo dos (pero no podíamos saberlo basándonos solamente en la cota que teníamos).
