

# INTEGRALES TRIPLES

(Prerrequisitos: Integrales definidas. Integrales dobles. Planos y rectas en el espacio. Las cuádricas)

## Introducción

Así como existen integrales de funciones reales de una variable real e integrales de funciones reales de dos variables reales (llamadas integrales dobles), hay integrales de funciones reales de tres variables reales (que se llaman integrales triples).

Para entender este tema es fundamental el conocimiento de la Sección 7.1 (Integrales dobles), así como el conocimiento de las Secciones 8.7 (Planos y rectas en el espacio), 8.8 (Las cuádricas) y 8.9 (Resumen de Cuádricas verticales).

Así como la integral de una función  $y = F(x)$  sobre un intervalo  $[a, b]$  se representa con la notación  $\int_a^b F(x) dx$  y la integral doble de  $z = F(x, y)$  sobre una región plana  $D$  se representa con la notación  $\iint_D F(x, y) dx dy$ , la integral triple de una función  $w = F(x, y, z)$  sobre una región  $D$  del espacio  $\mathbb{R}^3$  se representa por

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz$$

(la función  $F$  se llama “integrando” y  $D$  se llama “región de integración”).

Una integral triple no siempre existe, igual que ocurre con las integrales dobles y las integrales de funciones de una variable. Al respecto se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA: Si  $F(x, y, z)$  es continua en la región  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  y esta región es “cerrada” y “acotada”, está garantizada la existencia de la integral triple de  $F$  sobre  $D$ , que será un único número real (positivo, negativo o cero).

Nota 1:  $D$  es región “cerrada” en  $\mathbb{R}^3$  si incluye todos los puntos de su “borde” o “frontera”. O sea,  $D$  no es región cerrada desde que haya algún punto situado en el borde de  $D$  que no pertenezca a  $D$ . Y el borde de  $D$  es el conjunto de puntos que limitan  $D$ , o que separan  $D$  del resto del espacio.

Nota 2:  $D$  es región “acotada” en  $\mathbb{R}^3$  si existe alguna esfera o paralelepípedo donde  $D$  esté completamente contenida. Podemos suponer que el centro de la esfera o del paralelepípedo es el origen de coordenadas, pero esto no es necesario.

Nota 3: Una integral triple puede existir aunque su integrando no sea una función continua en la región de integración. Por ejemplo, cuando dicha región (cerrada y acotada) esté descompuesta en un número finito de subregiones (cerradas y acotadas) y la función integrando esté definida a trozos permaneciendo constante en cada una de dichas subregiones (constantes distintas, con lo cual el integrando no es función continua en toda la región de integración).

## La integral triple como límite de un triple sumatorio

Así como “la integral de una función real de una variable real sobre un intervalo  $[a, b]$ ” se definía en la Sección 4.2 mediante el límite de un sumatorio, y “la integral doble de una función real de dos variables reales sobre un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ ” se definía en la Sección 7.1 mediante el límite doble de un doble sumatorio, “la integral triple de una función real de tres variables reales sobre un paralelepípedo  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  del espacio”, se define como el límite triple de un triple sumatorio (ver la definición precisa en esta misma página).

## INTEGRALES TRIPLES

“El paralelepípedo”  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  está formado por el conjunto de puntos del espacio  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas  $(x, y, z)$  pertenezcan a los intervalos escritos en ese mismo orden, o sea,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$ ,  $z \in [e, f]$  (se dice que el paralelepípedo es el producto cartesiano de los tres intervalos). Dicho conjunto se llama también “prisma recto rectangular” de caras paralelas a los planos coordenados (tiene un total de seis caras que son rectángulos: dos caras paralelas a OXY, dos caras paralelas a OXZ y dos caras paralelas a OYZ). El conjunto es como el interior de una caja incluida la misma. También tiene doce lados (cuatro paralelos a OX, cuatro paralelos a OY y cuatro paralelos a OZ) y ocho vértices. Si las longitudes de los tres intervalos dados coincidiesen, el paralelepípedo sería un cubo (o exaedro). El volumen del paralelepípedo es el producto de las longitudes de los tres intervalos que lo definen:  $V = (b - a) \cdot (d - c) \cdot (f - e)$ . Conviene hacer un dibujo en perspectiva del paralelepípedo (para mayor facilidad recomendamos tomar los tres intervalos que lo definen sobre las partes positivas de los ejes, con lo cual el conjunto quedará en el primer octante y se verá mejor)

Definición de la integral triple de la función  $F(x, y, z)$  en el paralelepípedo  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ : Sea la función real de tres variables reales  $w = F(x, y, z)$  continua sobre el paralelepípedo dado. Sea  $P_1$  una partición de  $m + 1$  puntos equidistantes  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  del intervalo  $[a, b]$ , sea  $P_2$  otra partición de  $n + 1$  puntos equidistantes  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  del intervalo  $[c, d]$  y sea  $P_3$  una tercera partición de  $p + 1$  puntos equidistantes  $\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$  del intervalo  $[e, f]$ . Llamemos  $h_1$  “el paso” de la partición  $P_1$  (con lo cual sus puntos serán  $x_0 = a$ ,  $x_1 = x_0 + h_1$ ,  $x_2 = x_1 + h_1$ , etc...); llamemos  $h_2$  “el paso” de la partición  $P_2$  (con lo cual sus puntos serán  $y_0 = c$ ,  $y_1 = y_0 + h_2$ ,  $y_2 = y_1 + h_2$ , etc...), y llamemos  $h_3$  “el paso” de la partición  $P_3$  (con lo cual sus puntos serán  $z_0 = e$ ,  $z_1 = z_0 + h_3$ ,  $z_2 = z_1 + h_3$ , etc...). Se tendrá entonces:  $\boxed{h_1 = (b - a)/m}$ ;  $\boxed{h_2 = (d - c)/n}$  y  $\boxed{h_3 = (f - e)/p}$ .  
Pues bien:

$$\boxed{\iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow +\infty}} h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p F(t_i, u_j, v_k)}$$

donde  $t_i$  es un punto cualquiera del subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de la partición  $P_1$  (con  $i$  variando de 1 a  $m$ ), donde  $u_j$  es un punto cualquiera del subintervalo  $[y_{j-1}, y_j]$  de la partición  $P_2$  (con  $j$  variando de 1 a  $n$ ) y donde  $v_k$  es un punto cualquiera del subintervalo  $[z_{k-1}, z_k]$  de la partición  $P_3$  (con  $k$  variando de 1 a  $p$ ).

Nota 1: El paralelepípedo  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  es una región “acotada” del espacio pues está contenido en sí mismo y es una región “cerrada” del espacio pues incluye todo su “borde”, formado por los puntos situados sobre todas las caras (incluidos lados y vértices). En efecto, los puntos de las caras tienen una coordenada correspondiente a alguno de los extremos de los intervalos, estando esos extremos incluidos pues los intervalos son cerrados: Dos de las caras cumplen  $x = a$  y  $x = b$  (las paralelas a OYZ); otras dos cumplen  $y = c$  e  $y = d$  (las paralelas a OXZ), y las dos restantes cumplen  $z = e$  y  $z = f$  (las paralelas a OXY).

Nota 2: La partición  $P_1$  del intervalo  $[a, b]$  tiene  $m - 1$  puntos intermedios y determina por cada uno de esos puntos un plano perpendicular al eje OX, cortando dichos planos al paralelepípedo en un total de  $m$  partes (como las “rebanadas de un pan cuadrado o de molde”). Así mismo, la partición  $P_2$  del intervalo  $[c, d]$  tiene  $n - 1$  puntos intermedios y determina por cada uno de esos puntos un plano perpendicular al eje OY, cortando dichos planos a cada una de las partes anteriores en  $n$  nuevas partes más pequeñas (habría ya  $m \cdot n$  pedazos del paralelepípedo inicial). Por último, la partición  $P_3$  del intervalo  $[e, f]$  tiene  $p - 1$  puntos intermedios y determina por cada uno de esos puntos un plano perpendicular al eje OZ, cortando dichos planos a cada una de las partes anteriores en  $p$  partes más pequeñas todavía (habríamos llegado a  $m \cdot n \cdot p$  pedacitos del paralelepípedo inicial, cada uno de los cuales es un nuevo paralelepípedo de volumen  $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$ ).

## INTEGRALES TRIPLES

Pues bien, el triple sumatorio tiene por tanto  $m \cdot n \cdot p$  sumandos (uno por cada pequeño sub-paralelepípedo obtenido haciendo los cortes descritos anteriormente), de modo que cada sumando corresponde al valor de la función  $F$  en un cierto punto elegido en el correspondiente sub-paralelepípedo. Cuando  $m$ ,  $n$  y  $p$  crecen, el número de sumandos crece mientras el producto  $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$  tiende a cero, de modo que se demuestra matemáticamente que el límite mencionado existe y da un número real único, que puede ser positivo, negativo o cero. El signo depende de los valores que tome la función  $F$  en  $D$ : Si son todos positivos, la integral será un número positivo; si son todos negativos, la integral será un número negativo; pero si hay valores de  $F$  con signos diferentes en  $D$ , la integral podrá ser positiva, negativa o cero.

Nota 3: Si la función integrando fuese la constante 1, todos los sumandos del triple sumatorio valdrían 1, con lo cual ese triple sumatorio daría  $m \cdot n \cdot p$  (número de sumandos). Pero entonces el producto de  $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$  por el resultado del triple sumatorio resultaría  $\frac{b-a}{m} \cdot \frac{d-c}{n} \cdot \frac{f-e}{p} \cdot m \cdot n \cdot p = (b-a) \cdot (d-c) \cdot (f-e)$ , que es el volumen del paralelepípedo (constantemente, para todo  $m$ , para todo  $n$  y para todo  $p$ ). Por tanto, el límite daría esa misma constante. En conclusión:

$$\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = V_D \text{ (la integral nos da el volumen de } D \text{).}$$

Se demuestra que esto también ocurre cuando  $D$  sea una región cerrada y acotada cualquiera del espacio. Es la propiedad análoga a la que cumplían las integrales dobles, donde teníamos para cualquier región  $D$  cerrada y acotada del plano que  $\iint_D 1 \, dx \, dy = A_D$  (área de  $D$ ).

Nota 4: La definición dada de integral triple puede extenderse a regiones que no sean paralelepípedos, con tal que sean “cerradas” y “acotadas”. Para ello se toma un paralelepípedo del tipo anterior  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  que contenga a la nueva región de integración  $D$  (lo cual es posible por ser  $D$  acotada) y se extiende la función integrando fuera de  $D$  hasta el borde del citado paralelepípedo, asignándole el valor cero en todos los puntos que no sean de  $D$  (manteniendo sus valores iniciales sobre los puntos de  $D$ ). Entonces se toman las tres particiones de los segmentos  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  y  $[e, f]$  como explicamos antes y consideramos el mismo triple sumatorio, donde los sumandos serán como los de la anterior definición (si los puntos  $(t_i, u_j, v_k)$  pertenecen a  $D$ , tomamos en esos sumandos los correspondientes valores de  $F$ , y si esos puntos no pertenecen a  $D$  tomamos el valor cero, con lo cual esos sumandos desaparecen). Se demuestra que en estas condiciones el límite triple de  $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$  multiplicado por el valor del triple sumatorio sigue existiendo: Ese es el valor de la integral triple sobre la nueva región  $D$  tomada.

Obsérvese que este es otro caso en que el integrando utilizado en la integral sobre el paralelepípedo puede no ser continuo sobre el mismo (por salto entre los valores en  $D$  del integrando original y el valor cero fuera de  $D$ ) y sin embargo la integral triple existe.

### Cálculo de la integral triple sobre un paralelepípedo de caras paralelas a los planos de coordenadas

El cálculo de una integral triple sobre un paralelepípedo de caras paralelas a los planos coordenados se hace mediante tres integraciones simples consecutivas (llamadas también “integrales iteradas”):

TEOREMA: Si  $F(x, y, z)$  es continua sobre  $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , el cálculo de la integral triple de  $F$  sobre  $D$  puede hacerse mediante “integrales iteradas” así:

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_e^f \left( \int_c^d \left( \int_a^b F(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

Donde la primera integral simple es la que está dentro de los dos paréntesis (integración parcial de  $F$  respecto a la variable  $x$ , con las otras dos variables como parámetros), la siguiente integral simple es la que está dentro del paréntesis externo (integración parcial del resultado obtenido en

## INTEGRALES TRIPLES

la anterior, respecto a la variable  $y$ , quedando la variable  $z$  como parámetro) y la tercera integral simple es la externa (integración del último resultado, respecto a la variable  $z$ ).

O bien, cambiando el orden entre las tres integraciones sucesivas de todas las maneras posibles (equivale a cambiar el orden entre las tres variables de integración). En total, hay seis ordenaciones posibles, dando todas el mismo resultado numérico.

Nota: Cada integral simple tiene que realizarse con los límites de integración que le corresponden. Por tanto, al cambiar el orden de integración, los límites quedarán cambiados en el orden correspondiente. Por ejemplo: Si la primera integral es en  $z$ , la segunda es en  $x$  y la tercera es en  $y$ , escribimos:

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx dy dz = \int_c^d \left( \int_a^b \left( \int_e^f F(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy$$

Ejemplo: Calcular  $\iiint_D (2x + 3y - z) \, dx dy dz$ , siendo  $D$  el paralelepípedo definido por el producto cartesiano  $[-1, 1] \times [2, 5] \times [-3, -1]$ .

$$\begin{aligned} \iiint_D (2x + 3y - z) \, dx dy dz &= \int_{-3}^{-1} \left( \int_2^5 \left( \int_{-1}^1 (2x + 3y - z) \, dx \right) dy \right) dz = \\ &= \int_{-3}^{-1} \left( \int_2^5 [x^2 + 3yx - zx]_{-1}^1 dy \right) dz = \int_{-3}^{-1} \left( \int_2^5 (6y - 2z) \, dy \right) dz = \\ &= \int_{-3}^{-1} [3y^2 - 2zy]_2^5 dz = \int_{-3}^{-1} (63 - 6z) \, dz = [63z - 3z^2]_{-3}^{-1} = 150 \end{aligned}$$

### Regiones verticales del espacio

Estas regiones son lo análogo en el espacio  $\mathbb{R}^3$  a las “regiones verticales del plano” (vistas cuando estudiábamos integrales dobles en la Sección 7.1). Y una cualquiera de esas “regiones verticales del plano”, que era “cerrada” y “acotada”, estaba siempre limitada lateralmente por dos rectas verticales que pasaban por los extremos de un intervalo  $[a, b]$  (cerrado y acotado) y la región estaba limitada superior e inferiormente por las gráficas de dos funciones  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , continuas en el intervalo  $[a, b]$  (siendo  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  de  $[a, b]$ ).

Pues bien, una “región vertical del espacio”  $D$  será un conjunto “cerrado” y “acotado” de  $\mathbb{R}^3$  que estará limitado lateralmente por la “superficie cilíndrica” que forman por las infinitas rectas verticales que pasan por los puntos del borde de una región  $D_{xy}$  “cerrada” y “acotada” del plano OXY, y ese conjunto quedará limitado superior e inferiormente por las gráficas de dos funciones continuas en  $D_{xy}$  que podemos llamar  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  (siendo  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , para todo  $(x, y)$  de  $D_{xy}$ ).

Por tanto,  $D_{xy}$  será la proyección de  $D$  sobre el plano OXY y podemos escribir matemáticamente esa “región vertical del espacio”  $D$  así:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D_{xy} ; g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

Nota 1: Vimos en esa Sección 7.1 que el volumen de esta “región vertical del espacio”  $D$  venía dado por la integral doble  $\iint_{D_{xy}} [f(x, y) - g(x, y)] \, dx dy$  (lo cual era una de las aplicaciones de las integrales dobles a la Geometría).

Nota 2: Las rectas verticales que pasan por los puntos del borde de la región  $D_{xy}$  constituyen una “superficie cilíndrica vertical” (como un “tubo” vertical alargado indefinidamente en ambas direcciones). Es decir, que una “región vertical  $D$  del espacio” es muchas veces como un “cuerpo cilíndrico vertical”, de superficie lateral parecida a la de un cilindro vertical ordinario (pero tam-

## INTEGRALES TRIPLES

bién puede ser como la superficie lateral de un prisma, con caras planas formando ángulos), estando dicho “cuerpo cilíndrico” limitado superiormente por una superficie (la gráfica de la función  $z = f(x, y)$  o parte de la misma) y limitado inferiormente por otra superficie (la gráfica de la función  $z = g(x, y)$  o parte de la misma).

Pero puede ocurrir que las superficies que limitan superior e inferiormente a  $D$  se corten en los puntos del borde de  $D_{xy}$  o en una curva del espacio que se proyecte sobre el borde de  $D_{xy}$ , quedando  $D$  definida solamente por las superficies que la limitan superior e inferiormente, con lo cual  $D$  no tendría aspecto de “cuerpo cilíndrico vertical” (ver ejemplo 3 de los que siguen). En este caso, la superficie cilíndrica también existe, pero pasa por la curva del espacio en que se cortan las dos superficies, no formando parte de la superficie de  $D$  (como ocurría cuando una “región vertical plana”  $D$  quedaba definida únicamente por las curvas que la limitaban superior e inferiormente, las cuales se cortan en dos puntos del plano que se proyectan en los extremos del intervalo  $[a, b]$  sobre el que la región está definida, en cuyo caso las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  no forman parte del perímetro de la región  $D$ ).

Nota 2: Así como una “región vertical del plano” no puede tener “huecos”, o sea que incluye todos los puntos del plano comprendidos entre sus bordes laterales, superior e inferior, una “región vertical del espacio” cumple lo mismo: Incluye todos los puntos del espacio que se proyecten en los puntos de  $D_{xy}$  y cuyas cotas (valores de  $z$ ) sean cualquier valor entre los dados por  $g(x, y)$  y por  $f(x, y)$ . Lo cual está claramente reflejado en la definición matemática dada en la página anterior.

### Ejemplos:

1) Una “región vertical del espacio” es un cilindro de revolución vertical (cuerpo conocido) de base, por ejemplo, el círculo de centro el origen y radio  $a$ , en el plano  $OXY$ ; siendo la otra base el círculo de centro  $(0, 0, b)$  y radio  $a$ , situado en el plano horizontal  $z = b$  ( $b > 0$  es la altura del cilindro). El cilindro dado incluye su interior, sus bases y su superficie lateral, la cual está contenida en la “superficie cilíndrica” que determinan las rectas verticales que pasan por los puntos de las dos circunferencias de las bases. La región plana  $D_{xy}$  en este caso es el círculo que hace de base inferior, y las funciones que limitan superior e inferiormente la región son  $z = b$  y  $z = 0$  (planos que contienen a las dos bases).

2) Un paralelepípedo  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  es también una “región vertical del espacio”, donde la región plana  $D_{xy}$  es el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  en el plano  $OXY$  y las funciones que limitan superior e inferiormente la región son  $z = f$  y  $z = e$  (planos que contienen a las dos bases, que son rectángulos como  $D_{xy}$  pero situados en esas cotas). Así, las rectas verticales que pasan por los puntos de los bordes de ambas bases forman en este caso la “superficie cilíndrica vertical” correspondiente, la cual contiene las cuatro caras verticales del “paralelepípedo”.

3) Otra “región vertical del espacio” es la limitada inferiormente por  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$  (“paraboloide elíptico” de vértice el origen y que abre hacia  $OZ$  positivo) y la limitada superiormente por el plano  $z = 1$ . La curva intersección del paraboloides y el plano es la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  situada en dicho plano  $z = 1$ . Entonces, la superficie que limita inferiormente esta región  $D$  es la parte del paraboloides que va desde su vértice hasta la curva de corte con el plano  $z = 1$ , y la superficie que limita superiormente a  $D$  es la parte del plano anterior que queda encerrada por esa curva intersección (región elíptica correspondiente, definida por  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  con  $z = 1$ ). Por tanto, en este caso la “superficie cilíndrica vertical” no limita lateralmente la región. Sin embargo, las rectas verticales que pasan por los puntos de la elipse intersección entre paraboloides y plano forman dicha “superficie cilíndrica vertical”, la cual determina en el plano  $OXY$  el borde de la región  $D_{xy}$

## INTEGRALES TRIPLES

(la cual es la región elíptica definida por  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  con  $z = 0$ ). (Se recomienda hacer un dibujo, consultando la Sección 8.9).

---

Nota 1: Una “región vertical del espacio” queda normalmente definida dando solo la región plana  $D_{xy}$  y las funciones  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  que la limitan superior e inferiormente. Y cuando se dan solamente estas funciones, la región estará limitada únicamente por sus gráficas al cortarse (como en el ejemplo 3 anterior). En ese caso hay que hallar la proyección sobre OXY de la curva intersección de las dos gráficas, lo cual nos dará el borde de la región  $D_{xy}$  (y entonces conoceremos ésta).

Nota 2: Las rectas verticales que pasen por cualquier punto de la región  $D_{xy}$  deben cortar como máximo en dos puntos al “borde” de la “región vertical” dada: Un corte estará en la gráfica de  $z = f(x, y)$  y el otro estará en la gráfica de  $z = g(x, y)$ , pudiendo coincidir ambos cortes. Si hay alguna recta vertical que pase por un punto de  $D_{xy}$  y corte tres o más veces al “borde” de  $D$ , esta región  $D$  no será vertical (pues la región no puede tener “huecos” intermedios, que ocasionarían en sus bordes nuevos cortes).

### Cálculo de integrales triples sobre regiones verticales del espacio

Las integrales triples sobre “regiones verticales del espacio” se calculan mediante “integrales iteradas”, como ocurría con las integrales dobles sobre “regiones verticales del plano”:

**TEOREMA:** Si  $D$  es una “región vertical del espacio” cuya proyección sobre el plano OXY es la región “cerrada” y “acotada”  $D_{xy}$ , estando  $D$  limitada superiormente por la gráfica de  $z = f(x, y)$  y limitada inferiormente por la gráfica de  $z = g(x, y)$ , siendo ambas funciones continuas sobre  $D_{xy}$ , y si la función integrando  $F(x, y, z)$  es continua sobre  $D$ , se tiene:

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=g(x,y)}^{z=f(x,y)} F(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy$$

Nota 1: Primero se integra parcialmente  $F(x, y, z)$  respecto a  $z$ , dejando  $x$  y  $y$  como parámetros, usando las funciones  $g(x, y)$  y  $f(x, y)$  como límites de integración, lo cual dará una nueva función de  $(x, y)$  continua sobre la región  $D_{xy}$ . Y luego se calcula la integral doble sobre la región  $D_{xy}$  del resultado obtenido en la integral anterior, llegando a un número real que es el valor de la integral triple (número real positivo, negativo o cero).

Nota 2: Como el cálculo de la integral doble requiere finalmente dos integraciones simples, el cálculo de la integral triple se habrá hecho en total mediante tres integraciones simples. El único caso en que estas tres integrales simples tienen límites constantes es cuando  $D$  es un “paralelepípedo de caras paralelas a los planos de coordenadas” (Teorema de la pág. 3).

---

Ejemplo: Calcular  $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ , siendo  $D$  la región vertical limitada por la “semisuperficie cónica”  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (mitad superior de la “superficie cónica vertical” de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ) y la “semisuperficie esférica”  $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$  (mitad superior de la superficie esférica de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ ). (Ver Sección 8.9).

## INTEGRALES TRIPLES

Este es un caso en que la región plana  $D_{xy}$  se obtiene proyectando la curva intersección de las dos superficies sobre el plano OXY. Esa curva de corte en el espacio viene dada por el sistema formado por las dos ecuaciones de las superficies que limitan la región  $D$ .

El sistema es: 
$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} \end{cases}$$
, de modo que igualando y elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos  $x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2$ , o bien  $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$ , que nos da  $\boxed{z = 2}$  cuando sustituimos en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Esto quiere decir que la curva de corte es la circunferencia de centro  $(0, 0, 2)$  y radio 2, situada en el plano horizontal  $z = 2$ . Entonces, su proyección sobre el plano OXY será la circunferencia de centro el origen y radio 2 situada en dicho plano. En conclusión, la región plana  $D_{xy}$  es el círculo correspondiente (igual centro e igual radio).

Entonces, aplicando el Teorema, se tiene: 
$$\iiint_D z dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{8-x^2-y^2}} z dz \right) dx dy$$

Ponemos así los límites de integración para la variable  $z$  porque “la semisuperficie esférica” limita superiormente la región  $D$  y “la semisuperficie cónica” la limita inferiormente (obsérvese que para  $x = 0$  e  $y = 0$ , la primera da  $z = \sqrt{8}$  y la segunda da  $z = 0$ ). Conviene hacer un dibujo aproximado, en perspectiva, de las dos semisuperficies cortándose ( $D$  es la región que queda encerrada entre ellas).

Hagamos la integral que está dentro del paréntesis:

$$\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{8-x^2-y^2}} z dz = \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{8-x^2-y^2}} = \frac{8-x^2-y^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{2} = 4 - x^2 - y^2$$

con lo cual la integral doble que falta por hacer será: 
$$\iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2) dx dy$$

Ahora, al ser  $D_{xy}$  el círculo de centro el origen y radio 2, conviene en esta integral el cambio a coordenadas polares ( $x = r \cdot \cos \theta$ ;  $y = r \cdot \sin \theta$ ) cuyo jacobiano en valor absoluto es  $r$  y donde  $D_{xy}$  se corresponde a la región  $D_{r\theta} = [0, 2] \times [0, 2\pi]$  (ver Sección 7.1). Por tanto, será:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2) dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} (4 - r^2) \cdot r dr d\theta = \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} (4r - r^3) d\theta \right) dr = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi \cdot \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

que es el valor de la integral triple pedida.

### Regiones del espacio “paralelas al eje OX” y “paralelas al eje OY”

Las “regiones verticales del espacio” también pueden llamarse “regiones paralelas al eje OZ”, porque “la superficie cilíndrica vertical” asociada está formada por rectas paralelas a dicho eje. Pero, de modo análogo, existen “regiones paralelas al eje OX” y “regiones paralelas al eje OY”, que vamos a definir a continuación.

Obsérvese que cuando  $D$  era “región vertical del espacio”, su proyección sobre el plano OXY era la región  $D_{xy}$  “cerrada” y “acotada” que habíamos citado en su definición, región donde eran continuas las funciones  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  cuyas gráficas limitaban superiormente e inferiormente a  $D$  (eran “el borde superior” y “el borde inferior” de  $D$ ). Además,  $D$  no podía tener “huecos” (zonas situadas entre estos bordes cuyos puntos no pertenezcan a  $D$ ). Y sabemos que en estos casos la “superficie cilíndrica vertical” nombrada (que en muchos ejemplos limita lateralmente a  $D$ ) estaba formada por rectas paralelas al eje OZ, pasando además por puntos del “borde” de  $D_{xy}$ . Y también, desde que existiese alguna recta paralela a OZ que cortase más de dos veces al “borde” de  $D$ , esta región no podía ser “vertical”.

Pues bien, de un modo análogo, para que  $D$  sea una “región paralela al eje OX”, su proyección sobre el plano OYZ será una región  $D_{yz}$ , la cual tendrá que ser “cerrada” y “acotada”. Además, existirá una función  $x = f(y, z)$ , continua en  $D_{yz}$ , cuya gráfica será “el borde delantero” de  $D$ , y

## INTEGRALES TRIPLES

existirá otra función  $x = g(y, z)$ , continua en  $D_{yz}$ , cuya gráfica será “el borde trasero” de  $D$ . Además  $D$  no podrá tener “huecos”. Y en este caso habrá una “superficie cilíndrica horizontal” (que en muchos ejemplos limitará lateralmente a  $D$ ), formada por rectas paralelas al eje  $OX$  y que pasan por los puntos del “borde” de  $D_{yz}$ . Y si existiese alguna recta paralela a  $OX$  que corte más de dos veces al “borde” de  $D$ , esta región no será “paralela a  $OX$ ”.

Por tanto, podremos definir matemáticamente la región  $D$  “paralela al eje  $OX$ ” así:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D_{yz}, g(y, z) \leq x \leq f(y, z)\}$$

Y el cálculo de una integral triple sobre la región  $D$  anterior será:

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left( \int_{x=g(y,z)}^{x=f(y,z)} F(x, y, z) dx \right) dy dz$$

(primero se integra parcialmente  $F$  respecto a la variable  $x$ , obteniendo una función de  $(y, z)$ , para luego calcular la integral doble de dicha función sobre la región  $D_{yz}$ ).

Y, análogamente, para que  $D$  sea una “región paralela al eje  $OY$ ”, su proyección sobre el plano  $OXZ$  será una región  $D_{xz}$ , la cual tendrá que ser “cerrada” y “acotada”. Además, existirá una función  $y = f(x, z)$ , continua en  $D_{xz}$ , cuya gráfica será “el borde derecho” de  $D$  y habrá otra función  $y = g(x, z)$ , continua en  $D_{xz}$ , cuya gráfica será “el borde izquierdo” de  $D$ . Además  $D$  no puede tener “huecos”. Y en este caso habrá una “superficie cilíndrica horizontal” (que en muchos ejemplos limitará lateralmente a  $D$ ) formada por rectas paralelas al eje  $OY$  y que pasan por los puntos del “borde” de  $D_{xz}$ . Y si existiese alguna recta paralela a  $OY$  que corte más de dos veces al “borde” de  $D$ , esta región no será “paralela a  $OY$ ”.

Por tanto, podemos definir matemáticamente la región  $D$  “paralela al eje  $OY$ ” así:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D_{xz}, g(x, z) \leq y \leq f(x, z)\}$$

Y el cálculo de una integral triple sobre la región  $D$  anterior será:

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left( \int_{y=g(x,z)}^{y=f(x,z)} F(x, y, z) dy \right) dx dz$$

(primero se integra parcialmente  $F$  respecto a la variable  $y$ , obteniendo una función de  $(x, z)$ , para luego calcular la integral doble de dicha función sobre la región  $D_{xz}$ ).

Ejemplo: Calcular  $\iiint_D xyz dx dy dz$ , siendo  $D$  la pirámide irregular de base triangular que tiene sus vértices en  $(0, 0, 0)$ ,  $(4, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ .

Si dibujamos en perspectiva la pirámide vemos que sus cuatro caras están situadas en los planos  $OXY$ ,  $OXZ$ ,  $OYZ$  y en el de ecuación  $(x/4) + (y/2) + (z/3) = 1$ . O sea, en los planos  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $3x + 6y + 4z = 12$  (ver Sección 8.7).

Esta región  $D$  puede interpretarse de tres modos: Como “región vertical” (o “región paralela a  $OZ$ ”), como “región paralela a  $OY$ ” o como “región paralela a  $OX$ ”.

Escribamos  $D$  como “región paralela a  $OX$ ”:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D_{yz}, 0 \leq x \leq \frac{12 - 6y - 4z}{3} \right\}$$

siendo  $D_{yz}$  la región triangular de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ , que es “cerrada” y “acotada” del plano  $OYZ$  ( $x = 0$ ).

Escribamos  $D$  como “región paralela a  $OY$ ”:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D_{xz}, 0 \leq y \leq \frac{12 - 3x - 4z}{6} \right\}$$

siendo  $D_{xz}$  la región triangular de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(4, 0, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ , que es “cerrada” y “acotada” del plano  $OXZ$  ( $y = 0$ ).

## INTEGRALES TRIPLES

Y escribamos  $D$  como “región vertical” o “paralela a OZ”:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq \frac{12 - 3x - 6y}{4} \right\}$$

siendo  $D_{xy}$  la región triangular de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(4, 0, 0)$  y  $(0, 2, 0)$ , que es “cerrada” y “acotada” del plano OXY ( $z = 0$ ).

Con lo cual, el cálculo de la integral triple pedida puede hacerse de tres modos:

Interpretando  $D$  como “paralela a OX”:  $\iiint_D xyz \, dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left( \int_{x=0}^{x=\frac{12-6y-4z}{3}} xyz \, dx \right) dy dz$

Interpretando  $D$  como “paralela a OY”:  $\iiint_D xyz \, dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{12-3x-4z}{6}} xyz \, dy \right) dx dz$

Interpretando  $D$  como “paralela a OZ”:  $\iiint_D xyz \, dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=0}^{z=\frac{12-3x-6y}{4}} xyz \, dz \right) dx dy$

Llamando  $I$  a la integral triple y calculándola del primer modo se llega a:

$$I = \frac{2}{9} \cdot \iint_{D_{yz}} yz (6 - 3y - 2z)^2 \, dy dz = \frac{2}{9} \cdot \int_0^2 y \cdot \left( \int_{z=0}^{z=\frac{3(2-y)}{2}} z (6 - 3y - 2z)^2 \, dz \right) dy = \frac{4}{5}$$

Calculándola del segundo modo se llega a:

$$I = \frac{1}{72} \cdot \iint_{D_{xz}} xz (12 - 3x - 4z)^2 \, dx dz = \frac{1}{72} \cdot \int_0^4 x \cdot \left( \int_{z=0}^{z=\frac{3(x+4)}{4}} z (12 - 3x - 4z)^2 \, dz \right) dx = \frac{4}{5}$$

Y calculándola del tercer modo se llega a:

$$I = \frac{9}{32} \cdot \iint_{D_{xy}} xy (4 - x - 2y)^2 \, dx dy = \frac{9}{32} \cdot \int_0^4 x \cdot \left( \int_{y=0}^{y=\frac{4-x}{2}} y (4 - x - 2y)^2 \, dy \right) dx = \frac{4}{5}$$

Nota 1: Los resultados de las tres integrales no son inmediatos (tampoco son difíciles, pero hay que operar). Se recomienda acabar al menos una de las integrales (las otras dos son similares).

Nota 2: En otros ejemplos, la región dada solamente podrá interpretarse como paralela a dos de los ejes de coordenadas, con lo cual solamente tendremos dos modos de calcular una integral triple sobre esa región. Y, en ocasiones, la región solamente podrá interpretarse como paralela a uno de los ejes de coordenadas, con lo cual habrá un solo modo de calcular una integral triple sobre la misma.

Pero, hay regiones del espacio que no son regiones paralelas a ninguno de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la región comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas de radios diferentes, ya que hay rectas paralelas a OX que cortan a su “borde” en cuatro puntos (hay una parte del “borde” que es externa y otra parte que es interna) y lo mismo ocurre con ciertas rectas paralelas a OY y con ciertas rectas paralelas a OZ.

En estos casos, igual que ocurría con las integrales dobles sobre regiones que no eran “regiones verticales” ni “regiones horizontales” del plano, se descompone la región dada en varias subregiones que serán paralelas a un eje de coordenadas (como mínimo), de manera que la integral dada se reduce a una suma de integrales de alguno de los tipos indicados anteriormente (aplicando la propiedad 6 que daremos a continuación).

### Propiedades de las integrales triples

## INTEGRALES TRIPLES

En todo lo que sigue las regiones de integración se suponen “cerradas” y “acotadas” en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Y los integrandos que se consideren se suponen funciones reales de 3 variables reales, continuas sobre las respectivas regiones de integración.

Las propiedades son:

1)  $\iiint_D 0 \, dx dy dz = 0$ , para toda región  $D$ .

2)  $\iiint_D 1 \, dx dy dz = V_D$  (volumen de  $D$ ).

3) Si la región  $D$  tiene volumen cero, será  $\iiint_D F(x, y, z) \, dx dy dz = 0$ , para toda  $F$ . Pero la integral puede dar valor cero sin que la región tenga volumen cero, porque se compensen los valores positivos y negativos del integrando en  $D$ .

4)  $\iiint_D [a \cdot F(x, y, z) + b \cdot G(x, y, z)] \, dx dy dz = a \cdot \iiint_D F \, dx dy dz + b \cdot \iiint_D G \, dx dy dz$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes reales cualesquiera. (Linealidad)

En particular: La integral de una suma es la suma de las integrales (para  $a = b = 1$ ); la integral de una diferencia es la diferencia de las integrales (para  $a = 1$  y  $b = -1$ ), y la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función (para  $a = 0$ , o para  $b = 0$ ).

5) Si es  $F(x, y, z) \leq G(x, y, z)$  para todo punto de  $D$ , será  $\iiint_D F \, dx dy dz \leq \iiint_D G \, dx dy dz$ . (Monotonía)

En particular: Si es  $F(x, y, z) \geq 0$  sobre  $D$ , será  $\iiint_D F \, dx dy dz \geq 0$ , y si es  $F(x, y, z) \leq 0$  sobre  $D$ , será  $\iiint_D F \, dx dy dz \leq 0$  (la integral tiene el mismo signo que tiene el integrando en todo  $D$ ).

6) Si es  $D = D_1 \cup D_2$ , siendo  $D_1 \cap D_2$  vacío o siendo cero el volumen de  $D_1 \cap D_2$ , será

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D_1} F(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{D_2} F(x, y, z) \, dx dy dz$$

Por reiteración de esta propiedad, la misma puede aplicarse a un número finito de partes,  $D_1, D_2, \dots, D_n$  ( $n > 2$ ), con tal que la unión de todas sea  $D$  y que la intersección de dos diferentes sea siempre vacío o un conjunto de volumen cero.

NOTA IMPORTANTE: Esta propiedad 6) sirve, como dijimos en la página anterior, para calcular integrales triples sobre regiones que no sean paralelas a ninguno de los ejes de coordenadas, descomponiendo la región dada en varias subregiones que sí sean paralelas a alguno de los ejes. También sirve para expresar una integral sobre una región que tenga dos o más partes separadas en el espacio. Y, en general, permite muchas veces calcular una integral triple por reducción a dos o más integrales triples sobre regiones más sencillas.

---

Ejemplo: Una región  $D$  que no es paralela a ninguno de los ejes de coordenadas, por tener un “hueco” interior, es el cubo  $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$  (de lado 4, centrado en el origen y de caras paralelas a los planos coordenados), al cual le falta la parte interior de este otro cubo  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  (de lado 2, también centrado en el origen y de caras paralelas a los planos coordenados).

Si le damos a  $D$  cortes por los planos que contengan a dos de las caras paralelas verticales del cubo menor, habremos descompuesto la región  $D$  en 6 regiones que son todas “paralelepípedos” de caras paralelas a los planos de coordenadas. Por ejemplo, podemos cortar por los planos verticales  $x = -1$  y  $x = 1$ , obteniendo las “subregiones verticales” siguientes:

## INTEGRALES TRIPLES

$D_1 = [-2, -1] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$  (para la cual el rectángulo  $R_1 = [-2, -1] \times [-2, 2]$  es su proyección sobre el plano OXY). Tiene altura 4, luego su volumen es  $1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$ .

$D_2 = [1, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$  (para la cual el rectángulo  $R_2 = [1, 2] \times [-2, 2]$  es su proyección sobre el plano OXY). Tiene altura 4, luego su volumen es  $1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$ .

$D_3 = [-1, 1] \times [1, 2] \times [-2, 2]$  (para la cual el rectángulo  $R_3 = [-1, 1] \times [1, 2]$  es su proyección sobre el plano OXY). Tiene altura 4, luego su volumen es  $2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$ .

$D_4 = [-1, 1] \times [-2, -1] \times [-2, 2]$  (para la cual el rectángulo  $R_4 = [-1, 1] \times [-2, -1]$  es su proyección sobre el plano OXY). Tiene altura 4, luego su volumen es  $2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$ .

(La unión de los rectángulos  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  es la parte del plano OXY que resulta de quitarle al cuadrado  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  el interior del cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , como podemos comprobar haciendo el correspondiente dibujo).

Pero hay dos subregiones más de  $D$  que se proyectan sobre el cuadrado menor  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  del plano OXY, que son:

$D_5 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [1, 2]$ , de altura 1, luego su volumen es  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ .

$D_6 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-2, -1]$ , de altura 1, luego su volumen es  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ .

Podemos comprobar que no falta nada ni sobra nada en esta descomposición de  $D$  en estas 6 subregiones, pues el volumen de  $D$  es claramente  $4^3 - 2^3 = 56$  y la suma de los 6 volúmenes hallados da también 56.

Pues bien, si nos pidiesen una integral triple sobre  $D$  podríamos resolverla calculando integrales triples, con el mismo integrando, sobre las 6 subregiones verticales anteriores y sumar los 6 resultados.

Seguimos con las propiedades de las integrales triples:

7) Teorema del valor medio: Existe algún punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en  $D$  tal que

$$\iiint_D F(x, y, z) \, dx dy dz = F(x_0, y_0, z_0) \cdot V_D$$

( $F(x_0, y_0, z_0)$  se llama “valor medio de la función  $F$  en la región  $D$ ”).

8) **Teorema de cambio de variables:** Si  $F(x, y, z)$  es continua sobre la región de integración  $D_{xyz}$  y las funciones  $x = f(u, v, w)$ ,  $y = g(u, v, w)$  y  $z = h(u, v, w)$  tienen derivadas parciales primeras continuas en una nueva región  $D_{uvw}$ , de modo que  $D_{xyz}$  sea imagen de  $D_{uvw}$  en la transformación  $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$  definida por esas tres funciones  $f, g$  y  $h$ , y además se cumple que no ocupan volumen los puntos de  $D_{uvw}$  que tengan imágenes repetidas (coincidentes con las de otros puntos en esa transformación), se tiene:

$$\boxed{\iiint_{D_{xyz}} F(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D_{uvw}} F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)] \cdot |J| \, dudvdw} \quad (1)$$

donde  $J$  es el determinante jacobiano de la transformación aludida  $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ , el cual se define como

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

y  $|J|$  es su valor absoluto.

Nota 1: La segunda integral de (1) es el resultado de cambiar en la primera integral las variables  $(x, y, z)$  por las nuevas variables  $(u, v, w)$ . Precisamente, las funciones que hemos nombrado en el Teorema,  $x = f(u, v, w)$ ,  $y = g(u, v, w)$  y  $z = h(u, v, w)$ , son las que nos permiten hacer las sustituciones correspondientes y suelen llamarse “ecuaciones del cambio de variables”. En muchas ocasiones, cuando han sido bien elegidas estas funciones, la segunda integral es más sencilla

## INTEGRALES TRIPLES

de calcular que la primera, por tener un integrando más sencillo y/o por tener una región de integración más simple o mejor colocada respecto a los ejes de coordenadas.

Nota 2: A veces las ecuaciones del cambio de variables se dan con  $u, v$  y  $w$  despejadas en función de  $(x, y, z)$ , en vez de darnos las variables  $x, y, z$  despejadas en función de  $(u, v, w)$ , como se necesita para hacer las sustituciones y el cálculo de  $J$ . En estos casos hay que despejar las variables  $x, y, z$  del sistema que forman las tres ecuaciones dadas (3 ecuaciones con 3 incógnitas).

Nota 3: Al ser  $f, g$  y  $h$  funciones con derivadas parciales continuas en  $D_{uvw}$ , la función  $|J|$  será continua en la misma región (pues productos, sumas y diferencias de continuas da continua y valor absoluto de continua da continua). Y también lo será la función compuesta resultante de hacer las sustituciones en el integrando dado, que será  $F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)]$ , pues  $F$  es continua en  $D_{xyz}$ . Así, el nuevo integrando en (1) es un producto de funciones continuas y por tanto será continua en la nueva región de integración  $D_{uvw}$ . Y esta región de integración se puede obtener “cerrada” y “acotada” en el espacio de coordenadas  $(u, v, w)$  (aprovechando que se pueden agregar puntos de su borde, aunque repitamos imágenes, ya que los bordes de  $D_{uvw}$  son superficies que no ocupan volumen). Por tanto, la nueva integral existirá siempre.

### Ejemplos importantes de cambios de variables

#### 1) CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS A “COORDENADAS CILÍNDRICAS”:

Se cambian  $(x, y, z)$  por  $(r, \theta, z)$ , de modo que si  $P(x, y, z)$  es un punto cualquiera del espacio y es  $P'(x, y, 0)$  su proyección sobre el plano  $OXY$ , la primera coordenada cilíndrica es la distancia  $r$  del origen a  $P'$ , la segunda coordenada cilíndrica es el ángulo  $\theta$  en radianes, desde la parte positiva del eje  $OX$  hasta el segmento  $\overline{OP'}$  (en el plano  $OXY$ , siendo  $\theta$  positivo en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, visto desde  $OZ$  positivo) y la tercera coordenada cilíndrica es la cota  $z$  del punto  $P$ , con lo cual se tienen las ecuaciones del cambio de variables  $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sen \theta \\ z = z \end{cases}$ , con las restricciones  $\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$  (o bien  $\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$ ). El jacobiano de este cambio de variables es  $r$ , como puede comprobarse fácilmente. (Las “coordenadas cilíndricas”  $r$  y  $\theta$  se toman siempre en el plano  $OXY$  y son las “coordenadas polares” de  $P'$  en dicho plano).

Por tanto, la identidad (1) de la página anterior será para este cambio de variables:

$$\iiint_{D_{xyz}} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_{r\theta z}} F(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sen \theta, z) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

Las “coordenadas cilíndricas” convienen para calcular integrales triples sobre cilindros verticales de revolución cuyo eje de simetría sea  $OZ$ , o algunas partes sencillas de ellos.

Ejemplo: Calcular  $\iiint_D (x + y - 2z) \, dx \, dy \, dz$ , siendo  $D$  la región del espacio situada en el primer octante y limitada por la “superficie cilíndrica vertical”  $x^2 + y^2 = 9$  y los planos  $z = 1$  y  $z = 4$ .

El primer octante del sistema de coordenadas cartesianas corresponde a las partes positivas de los tres ejes de coordenadas ( $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ ). Por tanto, la región de integración será la cuarta parte del cilindro de revolución vertical (cuerpo) que tiene eje de simetría el eje  $OZ$  positivo, siendo sus bases los círculos de radio 3 situados sobre los planos horizontales dados y con centros sobre  $OZ$  (el centro de la base más baja es  $(0, 0, 1)$  y el otro es  $(0, 0, 4)$ ). (Conviene hacer un dibujo en perspectiva del cilindro y determinar visualmente la región de integración  $D$  aludida).

Los puntos de  $D$  tienen sus “coordenadas cilíndricas” variando entre los límites siguientes:  $0 \leq r \leq 3$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ;  $1 \leq z \leq 4$  (comprobarlo; todas los límites son constantes, luego al hacer el cambio de variables la integral triple será muy fácil). En efecto, se obtiene:

## INTEGRALES TRIPLES

$\iiint_{D_{r\theta z}} (r \cdot \cos \theta + r \cdot \operatorname{sen} \theta - 2z) \cdot r \, dr d\theta dz$ , siendo  $D_{r\theta z} = [0, 3] \times [0, \pi/2] \times [1, 4]$  que podemos descomponer en tres integrales:  $I = I_1 + I_2 - 2I_3$ , siendo  
 $I_1 = \iiint_{D_{r\theta z}} r^2 \cdot \cos \theta \, dr d\theta dz$ ;  $I_2 = \iiint_{D_{r\theta z}} r^2 \cdot \operatorname{sen} \theta \, dr d\theta dz$ ;  $I_3 = \iiint_{D_{r\theta z}} z \cdot r \, dr d\theta dz$   
 Calculamos la primera:

$$I_1 = \int_0^3 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_1^4 r^2 \cdot \cos \theta \, dz \right) d\theta \right) dr = \left( \int_1^4 dz \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) \cdot \left( \int_0^3 r^2 dr \right) = 3 \cdot 1 \cdot 9 = 27$$

La segunda, calculada análogamente, vale 27. Y la tercera vale  $\frac{135\pi}{8}$ . Total:  $I = 54 - \frac{135\pi}{4}$

**NOTA IMPORTANTE:** La integral triple  $I_1$  ha quedado como el producto de tres integrales simples porque los límites son todos constantes y además el integrando es un producto donde cada factor depende de una sola variable. Desde que algún factor del integrando dependa de varias variables y no pueda descomponerse en factores más sencillos donde cada uno dependa de una sola variable, la integral no quedará como un producto de tres integrales de una sola variable cada una; tampoco quedará así la integral triple si hay algún límite de integración no constante (en esos casos se tienen que hacer las integrales iteradas empezando siempre por las de límites no constantes, que deberán colocarse en el interior de los paréntesis).

En el caso de la integral anterior  $I_1$ , tal como está escrita, la primera integración es en  $z$  con integrando 1, luego pueden sacarse de ella los factores  $r^2$  y  $\cos \theta$ . Y, como queda ya la integral  $\int_1^4 1 \, dz$ , la hacemos dando la constante 3 (que puede sacarse de la integral en  $\theta$  y de la última en  $r$ ): Por eso la hemos puesto como primer factor del resultado. Y a su vez, de la integral en  $\theta$  podemos sacar el factor  $r^2$ , quedando sólo  $\int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta$  que da la constante 1, que podemos sacar de la última integral en  $r$ : Por eso la hemos escrito como segundo factor del resultado. Y ya sólo quedará hacer la integral en  $r$ , que da 9 y la hemos escrito como tercer factor del resultado.

Entonces en  $I_1$ , desde que vemos que los límites de las tres variables son constantes y vemos que su integrando es un producto de tres funciones que dependen de una sola variable (poniendo 1 como función de  $z$ ), ya podemos escribir el resultado final como producto de tres integrales simples en el orden que queramos (donde cada una tendrá como integrando uno de los factores del integrando inicial y tendrá como límites constantes los de la variable correspondiente).

Ejemplo de elección del orden de integración en función de los límites de las variables:

Calcular  $\iiint_D [x^2 \cdot (y + 1) \cdot z] \, dx dy dz$ , sabiendo que  $D$  es la “región vertical del espacio”, definida así:  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D_{xy}, 2x + y \leq z \leq 3\}$

donde la región plana  $D_{xy}$  es:  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$

En la integral dada, el integrando ya está factorizado y cada factor depende de una sola variable, pero vemos que los límites de  $z$  dependen de  $x$  y  $y$ ; los límites de  $y$  son constantes, y los límites de  $x$  dependen de  $y$ . Por tanto, hay que integrar primero en  $z$ , luego en  $x$  y finalmente en  $y$ .

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \iiint_D [x^2 \cdot (y + 1) \cdot z] \, dx dy dz &= \int_0^1 \left( \int_0^y \left( \int_{2x+y}^3 [x^2 \cdot (y + 1) \cdot z] \, dz \right) dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 (y + 1) \cdot \left( \int_0^y x^2 \cdot \left( \int_{2x+y}^3 z \, dz \right) dx \right) dy = \int_0^1 (y + 1) \cdot \left( \int_0^y x^2 \cdot \frac{9 - (2x+y)^2}{2} dx \right) dy = \dots \end{aligned}$$

Falta resolver la integral que está dentro del paréntesis en la variable  $x$  (donde  $y$  se arrastraría en los cálculos como una constante), obteniéndose una función de la única variable  $y$ , la cual se multiplicará por  $(y + 1)$  para tener el integrando de la última integral en el intervalo  $[0, 1]$ , cuyo cálculo dará un número que es el resultado de la integral triple.

### 2) CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS A “COORDENADAS ESFÉRICAS”:

Se cambian  $(x, y, z)$  por  $(\rho, \theta, \varphi)$ , de modo que si es  $P(x, y, z)$  un punto cualquiera del espacio y es  $P'(x, y, 0)$  su proyección sobre el plano OXY, la primera coordenada esférica es la distancia

## INTEGRALES TRIPLES

$\rho$  del origen a  $P$  (no a  $P'$ ), la segunda coordenada esférica es el ángulo en radianes  $\theta$  desde la parte positiva del eje  $OX$  hasta el segmento  $\overline{OP'}$  (en el plano  $OXY$ , siendo positivo en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, visto desde  $OZ$  positivo) y la tercera coordenada esférica es el ángulo en radianes  $\varphi$  desde el plano  $OXY$  perpendicularmente hasta el segmento  $\overline{OP}$  (positivo por encima del plano y negativo por debajo del plano).

De modo que las ecuaciones del cambio de variables en este caso son:

$$\boxed{x = \rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi ; y = \rho \cdot \sen \theta \cdot \cos \varphi ; z = \rho \cdot \sen \varphi}$$

porque la longitud del segmento  $\overline{OP'}$  es  $\rho \cdot \cos \varphi$ , con lo cual la  $x$  de  $P'$  (que coincide con la  $x$  de  $P$ ) será  $(\rho \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \theta$ , así como la  $y$  de  $P'$  (que coincide con la  $y$  de  $P$ ) será  $(\rho \cdot \cos \varphi) \cdot \sen \theta$ . Y la  $z$  de  $P$  es claramente  $\rho \cdot \sen \varphi$  (cateto opuesto a  $\varphi$  en un triángulo rectángulo; hacer el dibujo correspondiente). Además, tenemos las restricciones  $\boxed{\rho \geq 0}$ ,  $\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$  (o bien  $\boxed{-\pi \leq \theta \leq \pi}$ ) y  $\boxed{-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2}$ . Y el jacobiano de este cambio de variables es  $\boxed{\rho^2 \cdot \cos \varphi}$  (como podemos comprobar resolviendo el determinante que lo define). Y, al ser  $\rho^2$  no negativo y ser también  $\cos \varphi$  no negativo, el valor absoluto del jacobiano es el mismo.

Por tanto, la identidad (1) de la pág. 11 será para este cambio de variables:

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_{xyz}} F(x, y, z) \, dx dy dz = \\ & = \iiint_{D_{\rho\theta\varphi}} F(\rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sen \theta \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sen \varphi) \cdot \rho^2 \cdot \cos \varphi \, d\rho d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Nótese que la segunda “coordenada esférica” ( $\theta$ ) coincide con la segunda “coordenada cilíndrica” (pero las otras dos son diferentes). Téngase cuidado en no confundir las primeras coordenadas (pues  $r$  es la distancia de  $O$  al punto  $P'$  y en cambio  $\rho$  es la distancia de  $O$  al punto  $P$ ).

Las “coordenadas esféricas” convienen para calcular integrales triples en regiones del espacio que sean esferas centradas en el origen o partes sencillas de las mismas.

Ejemplo: Calcular  $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx dy dz$ , siendo  $D$  la región comprendida entre las dos superficies esféricas concéntricas de centro el origen, de radios 2 y 3, que además esté situada en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

$D$  es la octava parte (correspondiente al octante donde todas las coordenadas cartesianas son no negativas) de la “corona esférica” comprendida entre las dos superficies esféricas mencionadas. Sus puntos cumplen las inequaciones  $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .

Pero los puntos de  $D$  tienen “coordenadas esféricas” con las acotaciones:  $2 \leq \rho \leq 3$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ;  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  (todas con límites constantes, luego al hacer el cambio de variables la integral triple será muy fácil). En efecto, se tendrá:

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_{\rho\theta\varphi}} (\rho^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sen^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi) \cdot \rho^2 \cdot \cos \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \\ & = \iiint_{D_{\rho\theta\varphi}} \rho^4 \cdot \cos^3 \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \left( \int_2^3 \rho^4 \, d\rho \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi \right) = \frac{211}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{211\pi}{15} \end{aligned}$$

Otro ejemplo: Hallar el volumen de una esfera de radio  $a$ .

Podemos considerar la esfera  $D$  centrada en el origen para poder aplicar coordenadas esféricas, teniéndose  $V_D = \iiint_D 1 \, dx dy dz$ , como establecimos en la propiedad 2) de la pág. 10.

Los puntos de  $D$  tienen “coordenadas esféricas” variando así:  $0 \leq \rho \leq a$ ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  (también con límites constantes). Por tanto:

$$\begin{aligned} V_D & = \iiint_{D_{\rho\theta\varphi}} 1 \cdot \rho^2 \cdot \cos \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \left( \int_0^a \rho^2 \, d\rho \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \right) = \\ & = \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

# INTEGRALES TRIPLES

## Principales aplicaciones de las integrales triples a la Geometría y a la Física

En todos los casos  $D$  es una región “cerrada” y “acotada” del espacio  $\mathbb{R}^3$  y el integrando dado es una función real de tres variables reales continua en  $D$ .

1) Volumen de la región  $D$ :  $V_D = \iiint_D 1 \, dx dy dz$  (unidades de volumen)

Nota: En el caso particular de que la región  $D$  sea una “región vertical”, que tenga proyección  $D_{xy}$  sobre el plano OXY y esté limitada superior e inferiormente por las gráficas de las funciones  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$ , continuas sobre  $D_{xy}$ , se tendrá

$$V_D = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=g(x,y)}^{z=f(x,y)} 1 \, dz \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} [f(x, y) - g(x, y)] \, dx dy \quad (\text{unidades de volumen})$$

lo cual coincide con la aplicación de las integrales dobles para calcular el volumen de una “región vertical del espacio” (ver Sección 7.1).

2) Valor medio de una función de tres variables en una región  $D$  que tenga volumen: Si  $F(x, y, z)$  es la función, se tiene

$$\text{Valor medio de } F \text{ en } D = \frac{\iiint_D F(x, y, z) \, dx dy dz}{V_D} \quad (\text{unidades de } F)$$

(esto permite calcular sobre  $D$  temperaturas medias, presiones medias, densidades medias, etc...).

3) Centro geométrico de una región  $D$  que tenga volumen: El centro geométrico de  $D$  es el punto del espacio más intermedio respecto a todos los puntos de  $D$ . Si lo llamamos  $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , sus coordenadas serán:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \, dx dy dz}{V_D} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \, dx dy dz}{V_D} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \, dx dy dz}{V_D} \quad (\text{unidades de longitud})$$

( $\bar{x}$  es el valor medio de las  $x$  de los puntos de  $D$ ;  $\bar{y}$  es el valor medio de las  $y$  de los puntos de  $D$ , y  $\bar{z}$  es el valor medio de las  $z$  de los puntos de  $D$ ). Obviamente, si  $D$  es una esfera o una región elipsoidal,  $C$  es el centro que conocemos (centro de simetría). Lo mismo sucede cuando  $D$  es un tetraedro (incluido su interior), un exaedro (incluido su interior) o cualquier poliedro regular (incluido su interior). Obsérvese que si  $D$  es una “corona esférica” (región entre dos superficies esféricas concéntricas, incluidas ambas), el centro  $C$  de  $D$  es el centro de ambas superficies esféricas, el cual no pertenece a  $D$ .

4) Masa de un cuerpo que tenga volumen: Si  $D$  es la región del espacio ocupada por el cuerpo y si  $\delta(x, y, z)$  es la densidad del cuerpo en cada uno de sus puntos, será:

$$M_D = \iiint_D \delta(x, y, z) \, dx dy dz \quad (\text{unidades de masa})$$

(“la densidad en un punto” será el límite cuando  $r \rightarrow 0$  de [la masa situada en una esfera de radio  $r$  centrada en ese punto / volumen de esa esfera])

Nota: Si la densidad es constante en  $D$ , se tiene  $M_D = \delta \cdot V_D$ .

## INTEGRALES TRIPLES

5) Centro de masas (o centro de gravedad) de un cuerpo que tenga volumen: Si es  $D$  la región del espacio ocupada por el cuerpo y es  $\delta(x, y, z)$  la densidad en cada uno de sus puntos, llamando  $G(x_G, y_G, z_G)$  al centro de gravedad buscado, se tiene:

$$x_G = \frac{\iiint_D x \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz}{M_D} \quad ; \quad y_G = \frac{\iiint_D y \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz}{M_D} \quad ; \quad z_G = \frac{\iiint_D z \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz}{M_D} \quad (\text{u. de long.})$$

( $x_G$  es “la media ponderada” de los valores de  $x$  en los puntos de  $D$ , donde los factores de ponderación son las densidades en los diferentes puntos; análogamente,  $y_G$  es “la media ponderada” de los valores de  $y$  en  $D$  y  $z_G$  es “la media ponderada” de los valores de  $z$  en  $D$ ).

Nota: Si la densidad es constante en  $D$ , el centro de gravedad coincide con el centro geométrico (pues, sacando el factor  $\delta$  de las integrales de los numeradores y sustituyendo  $M_D$  por  $\delta \cdot V_D$  en los denominadores anteriores, al simplificar  $\delta$  quedan las expresiones de las coordenadas del centro geométrico).

6) Momentos de inercia de un cuerpo: Si es  $D$  la región del espacio ocupada por el cuerpo y es  $\delta(x, y, z)$  la densidad en cada uno de sus puntos, tenemos:

a) Momentos de inercia respecto de los planos coordenados:

$$I_{OYZ} = \iiint_D x^2 \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz \quad I_{OXZ} = \iiint_D y^2 \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$I_{OXY} = \iiint_D z^2 \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz \quad (\text{unidades de longitud al cuadrado} \times \text{unidades de masa})$$

b) Momentos de inercia respecto a los ejes de coordenadas:

$$I_{OX} = \iiint_D (y^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz \quad ; \quad I_{OY} = \iiint_D (x^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$I_{OZ} = \iiint_D (x^2 + y^2) \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz \quad (\text{un. de long. al cuadrado} \times \text{un. de masa})$$

c) Momento de inercia respecto al origen:  $I_O = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) \, dx dy dz$

(unidades de longitud al cuadrado  $\times$  unidades de masa)

---