

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

(Prerrequisitos: Ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno. Función gamma, función beta y transformación de Laplace. Sistemas de ecuaciones lineales)

Introducción

Entre los temas de integración de funciones de una variable real incluimos uno que titulamos “Integrales impropias” (Sección 4.5) y otro, basado en el anterior, que titulamos “Función gamma, función beta y transformación de Laplace” (Sección 4.6). El tema que queremos desarrollar ahora requiere conocer las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes (Sección 7.8) y la transformación de Laplace y sus propiedades principales (que aparecen en la Sección 4.6).

Recordamos que una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n se llama “lineal” cuando es de primer grado en la función incógnita y en todas sus derivadas. Por tanto, si llamamos a la variable independiente t y llamamos $y(t)$ a la función incógnita de dicha ecuación diferencial, ésta se podrá siempre escribir en la forma:

$$a_n(t) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2(t) \cdot y'' + a_1(t) \cdot y' + a_0(t) \cdot y = b(t)$$

donde los coeficientes de las derivadas, así como el segundo miembro, son ciertas funciones reales de la variable real t , con $a_n(t)$ distinta de la función cero para que sea de orden n . Y si $b(t)$ es la función cero, la ecuación se llama “homogénea”.

El caso de una EDO lineal de coeficientes constantes corresponde a que todas las funciones $a_i(t)$, con $i = 0, 1, 2, \dots, n$, sean constantes reales. Es decir, que la ecuación será

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(t) \quad (a_n \neq 0)$$

Si $b(t) \equiv 0$ la ecuación se llamará igualmente homogénea.

Recordemos también que la “solución general” de una ecuación del tipo anterior, cuando no es homogénea, puede escribirse como $y = y_p(t) + y_h(t)$, donde $y_p(t)$ es una “solución particular” cualquiera de la EDO dada y donde $y_h(t)$ es la “solución general” de la EDO homogénea asociada (que resulta de sustituir el segundo miembro $b(t)$ por la función cero).

Y recordemos también que la “solución general” de una EDO lineal homogénea de orden n es siempre de la forma:

$$y_h(t) = C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t) + \dots + C_n \cdot y_n(t)$$

donde las C_i son n constantes reales indeterminadas y las funciones $y_i(t)$ son n “soluciones particulares”, linealmente independientes, de dicha ecuación homogénea.

Entonces, al darle diferentes valores reales a las n constantes en la última expresión, se obtienen las infinitas “soluciones particulares” de la EDO homogénea asociada a una lineal no homogénea. Y al sumarle a todas estas infinitas soluciones de la homogénea una única “solución particular” $y_p(t)$ de la no homogénea, se obtienen todas las infinitas “soluciones particulares” de ésta.

En las aplicaciones de las EDO (en problemas de otras ciencias), interesa frecuentemente la “solución particular” única que cumple n determinadas “condiciones iniciales” de la forma $y(t_0) = c_0$, $y'(t_0) = c_1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$, siendo $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ valores reales cualesquiera dados. En muchas ocasiones estas condiciones corresponden al valor $t_0 = 0$ (de ahí viene el nom-

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

bre de “condiciones iniciales”, ya que en muchas de esas aplicaciones la variable independiente t representa el tiempo, con lo cual las condiciones dadas corresponderían al tiempo cero o al instante inicial del fenómeno que sea). Pero en otras ocasiones será $t_0 \neq 0$ y se sigue hablando de “condiciones iniciales”.

Pues bien, la transformación de Laplace es particularmente útil para hallar de un modo directo la “solución particular” de una EDO lineal de orden $n > 2$, de coeficientes constantes, que corresponda a “condiciones iniciales” como las mencionadas, donde sea $t_0 = 0$. Pero también es aplicable a otras ecuaciones, como ciertas “ecuaciones integrales” y ciertas “ecuaciones integrodiferenciales”, también con condiciones iniciales. Lo veremos más adelante.

Nota: Cuando las “condiciones iniciales” dadas correspondan a un valor $t_0 \neq 0$, se puede hacer un cambio de variable independiente en la EDO del tipo $u = t - t_0$ (traslación), que convierta el problema dado en otro similar, donde las “condiciones iniciales” serán para el valor $u = 0$. En efecto, la función incógnita $y(t)$ se habrá convertido con el cambio de variable en $y(u + t_0)$, que podemos llamar nueva función incógnita $g(u)$, de modo que $y'(u + t_0)$ será $g'(u)$, $y''(u + t_0)$ será $g''(u)$, etc... (porque la derivada de $u + t_0$ respecto de u es 1), con lo cual la nueva EDO obtenida es del mismo tipo que la dada y con los mismos coeficientes constantes, donde $g(0) = y(t_0)$, $g'(0) = y'(t_0)$, $g''(0) = y''(t_0)$, etc... Entonces podrá aplicarse el método de Laplace al nuevo problema (sin embargo, el cambio de variable $u = t - t_0$ habrá producido un nuevo segundo miembro, salvo que la EDO dada fuese homogénea). Y una vez resuelto el nuevo problema mediante el método de Laplace, desharemos el cambio de variable en la “solución particular” $g_p(u)$ obtenida para tener la “solución particular” $y_p(t)$ del problema dado. (En la pág. 6 hay un ejemplo).

La transformación de Laplace

Recordemos en primer lugar que la transformación de Laplace (que representaremos por el símbolo $\mathcal{L}$) convierte “funciones objeto” $f(t)$, que sean continuas en $[0, +\infty)$, en “funciones transformadas” $F(s)$, de modo que:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

donde la integral impropia es “convergente” para valores reales de la variable s en un cierto intervalo, el cual será el dominio de la función $F(s)$ (pues, al ser la integral impropia “convergente”, la función $F(s)$ tendrá valores reales).

Las “funciones transformadas” principales que vamos a necesitar para resolver los ejemplos a considerar en todo lo que sigue, son las siguientes:

- 1) $\mathcal{L}(0) = 0$, para todo s .
- 2) $\mathcal{L}(t^\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}$, para todo $s > 0$, siendo $\alpha > -1$. Obsérvese que para $\alpha = 0$ tenemos $\mathcal{L}(1) = 1/s$, para todo $s > 0$, pues $\Gamma(1) = 1$.
- 3) $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s - a)$, para todo $s > a$. Para $a = 0$ tenemos otra vez $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, para $s > 0$.
- 4) $\mathcal{L}(\sin bt) = b/(s^2 + b^2)$, para todo $s > 0$. Cuando $b = 0$ se tiene otra vez $\mathcal{L}(0) = 0$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

5) $\boxed{\mathcal{L}(\cos bt) = s/(s^2 + b^2)}$, para todo $s > 0$. Para $b = 0$ se tiene nuevamente $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$.

Nota: En 2) se ha usado la función gamma, representada por el símbolo Γ , la cual está definida en $(0, +\infty)$, por lo cual $\alpha + 1$ tiene que ser positivo y entonces α tiene que ser mayor que -1 .

Recordemos además que $\Gamma(n + 1) = n!$, para todo número entero positivo n (incluso para $n = 0$ con el convenio $0! = 1$). Por tanto, la transformada dada en 2) establece $\mathcal{L}(t^0) = \mathcal{L}(1) = 1/s$ así como $\mathcal{L}(t) = 1!/s^2$, $\mathcal{L}(t^2) = 2!/s^3$, $\mathcal{L}(t^3) = 3!/s^4$, etc... En general, $\boxed{\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}}$, para todo $s > 0$.

Y las propiedades de la transformación de Laplace que usaremos en lo que sigue, son las siguientes:

1) $\boxed{\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)}$, para a y b reales cualesquiera

(la propiedad anterior se llama linealidad de la transformación $\mathcal{L}$: la imagen de una combinación lineal de dos o más funciones es la misma combinación lineal hecha con las imágenes respectivas, porque estamos representando $\mathcal{L}[f(t)]$ por $F(s)$ y $\mathcal{L}[g(t)]$ por $G(s)$).

2) $\boxed{\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(s - a)}$, para todo a real

(si se multiplica por e^{at} una función objeto $f(t)$ cualquiera, la nueva transformada obtenida es un desplazamiento horizontal de la transformada anterior, cuya longitud será $|a|$, el cual es hacia la derecha si $a > 0$ y es hacia la izquierda si $a < 0$).

3) $\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - s^{n-3} \cdot f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}$

(transformada de la derivada n -sima de una función; para $n = 1$ nos da la transformada de la derivada primera $\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)}$; para $n = 2$ tenemos la transformada de la derivada segunda $\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)}$; para $n = 3$ tenemos la transformada de la derivada tercera $\boxed{\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)}$; etc...).

4) $\boxed{\mathcal{L}[(-t)^n \cdot f(t)] = F^{(n)}(s)}$

(si se multiplica por $-t$ una función objeto cualquiera, la nueva transformada obtenida es la derivada de la transformada anterior y esto vale sucesivas veces, con lo cual si se multiplica por $(-t)^n$ la función $f(t)$, se obtiene como transformada suya la derivada n -sima de la función $F(s)$, que es la transformada de $f(t)$).

5) $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s}}$ (transformada de la primitiva de $f(t)$ que se anula en $t = 0$).

(así como al derivar una función su transformada queda multiplicada por s , al integrar una función su transformada queda dividida por s).

6) $\boxed{\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)}$ (transformada del “producto de convolución”)

Nota: El “producto de convolución” $f(t) * g(t)$ es la nueva función de t que se define a partir de f y g mediante la siguiente integral $\int_0^t f(x) \cdot g(t - x) dx$, o bien mediante esta otra integral

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

que coincide con la anterior $\int_0^t f(t-x) \cdot g(x) dx$. (La propiedad nos dice que la transformada del “producto de convolución” de dos funciones es el producto ordinario de las transformadas respectivas)

Resolución mediante la transformación de Laplace de ecuaciones diferenciales ordinarias que sean lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales

Sea la EDO: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$, con $a_n \neq 0$.

Queremos obtener la única “solución particular” $y_p(t)$ de esta ecuación que cumpla las n “condiciones iniciales” $y_p(0) = c_0, y_p'(0) = c_1, y_p''(0) = c_2, \dots, y_p^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$.

Si suponemos conocida la transformada de Laplace de la función $b(t)$ del segundo miembro, entonces puede aplicarse el siguiente procedimiento para encontrar $y_p(t)$:

- 1) Se aplica la transformación $\mathcal{L}$ a los dos miembros de la EDO dada, usando la propiedad de linealidad y las transformadas de las derivadas que aparezcan (las cuales dependen de las condiciones iniciales dadas), con lo cual obtenemos **una ecuación ordinaria de primer grado** en la función $Y_p(s)$, siendo ésta la transformada de la función desconocida $y_p(t)$.
- 2) Se despeja $Y_p(s)$ de la ecuación anterior.
- 3) Se aplica ahora la “transformación inversa de Laplace” a la función $Y_p(s)$ obtenida y resulta la función que buscamos $y_p(t)$.

Esto parece muy fácil, pero la “transformación inversa de Laplace”, $\mathcal{L}^{-1}$, tiene una expresión complicada. Sin embargo, aprovechando que $\mathcal{L}^{-1}$ es también lineal (se demuestra que la inversa de cualquier transformación lineal es también lineal) y conociendo las transformadas de muchas funciones (hay tablas muy extensas de transformadas), se logra en muchos casos determinar la función $y_p(t)$ a partir de $Y_p(s)$, sin necesidad de usar directamente la transformación inversa. En particular, esto es muchas veces fácil cuando la transformada de la función $b(t)$ del segundo miembro es un cociente de polinomios.

Veremos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo 1: Calcular la solución de la EDO $y'' - 5y' + 4y = 3$ que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

(Se trata de una EDO lineal de orden 2 con coeficientes constantes y no homogénea).

Primer paso del procedimiento: Aplicamos la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial, usamos su linealidad y usamos las transformadas de y'' y de y' dadas en la propiedad 3) de la página anterior.

$$\mathcal{L}(y'' - 5y' + 4y) = \mathcal{L}(3), \text{ que es: } \mathcal{L}(y'') - 5 \cdot \mathcal{L}(y') + 4 \cdot \mathcal{L}(y) = 3 \cdot \mathcal{L}(1)$$

y usando las transformadas de las derivadas, así como la transformada de la función 1, tenemos:

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

$$[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] - 5 \cdot [s \cdot Y(s) - y(0)] + 4 \cdot Y(s) = 3 \cdot (1/s)$$

donde $Y(s)$ es la función transformada de $y(t)$. Observamos que esta ecuación es de primer grado en $Y(s)$. Escrita sustituyendo los valores dados de $y(0)$ e $y'(0)$ queda como:

$$s^2 \cdot Y(s) - 2s + 1 - 5 \cdot [s \cdot Y(s) - 2] + 4 \cdot Y(s) = 3/s$$

Segundo paso del procedimiento: Despejamos la función transformada $Y(s)$ de la ecuación obtenida anteriormente

$$(s^2 - 5s + 4) \cdot Y(s) = \frac{3}{s} + 2s - 11, \text{ de donde } Y(s) = \frac{2s^2 - 11s + 3}{s \cdot (s^2 - 5s + 4)}$$

Tercer paso del procedimiento: Aplicamos la “transformación inversa de Laplace” a $Y(s)$ para obtener la solución $y(t)$ buscada

O sea, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2 - 11s + 3}{s \cdot (s^2 - 5s + 4)}\right]$. Esta es la parte que puede ser difícil, pero en este caso basta descomponer el cociente de polinomios en fracciones simples, aplicar la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ y usar a la inversa resultados dados en las páginas 2 y 3.

Se tiene $\frac{2s^2 - 11s + 3}{s(s^2 - 5s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-4}$, puesto que $s^2 - 5s + 4 = (s-1)(s-4)$. Y calculando los valores de las constantes A , B y C , resulta $Y(s) = \frac{3/4}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{-3/4}{s-4}$. Por tanto, tenemos:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3/4}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{3/4}{s-4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1}(1/s) + 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[1/(s-1)] - \frac{3}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1}[1/(s-4)]$$

Consultando ahora la pequeña lista de transformadas dada (págs. 2 y 3), vemos que:

$$\mathcal{L}(1) = 1/s, \text{ luego } \mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a), \text{ luego } \mathcal{L}^{-1}[1/(s-a)] = e^{at}$$

pero entonces $\mathcal{L}^{-1}[1/(s-1)] = e^t$ y $\mathcal{L}^{-1}[1/(s-4)] = e^{4t}$.

Conclusión: La solución pedida es $y(t) = \frac{3}{4} + 2e^t - \frac{3}{4}e^{4t}$.

Comprobación de la solución: Tenemos $y'(t) = 2e^t - 3e^{4t}$; $y''(t) = 2e^t - 12e^{4t}$, con lo cual

$$y''(t) - 5 \cdot y'(t) + 4 \cdot y(t) = (2e^t - 12e^{4t}) - 5 \cdot (2e^t - 3e^{4t}) + 4 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2e^t - \frac{3}{4}e^{4t}\right) = 3$$

que es la identidad $3 = 3$, es decir, $y(t)$ cumple la EDO dada. Y además se tiene $y(0) = \frac{3}{4} + 2 - \frac{3}{4} = 2$, así como $y'(0) = 2 - 3 = -1$, luego también cumple las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo 2: Calcular la solución de la EDO $y'' - 4y' + 4y = t^3 \cdot e^{2t}$ que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Primer paso: Aplicamos la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación y tenemos por linealidad $\mathcal{L}(y'') - 4 \cdot \mathcal{L}(y') + 4 \cdot \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t^3 \cdot e^{2t})$

con lo cual, si llamamos $Y(s)$ a la transformada de $y(t)$, se puede escribir

$$[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] - 4 \cdot [s \cdot Y(s) - y(0)] + 4 \cdot Y(s) = \mathcal{L}(t^3 \cdot e^{2t})$$

Consultada la lista de transformadas que dimos, se tiene $\mathcal{L}(t^3) = \Gamma(4)/s^4 = 3!/s^4 = 6/s^4$. Y si usamos la propiedad 2) de la transformación de Laplace, la cual nos dice qué ocurre con la transformada de una función cuando ésta se multiplica por e^{at} , será $\mathcal{L}(t^3 \cdot e^{2t}) = 6/(s-2)^4$.

Entonces la ecuación que teníamos es $[s^2 \cdot Y(s) - 4s \cdot Y(s) + 4 \cdot Y(s) = 6/(s-2)^4]$, ya que $y(0) = y'(0) = 0$.

Segundo paso: Despejamos la función $Y(s)$ de la ecuación obtenida en el paso anterior. Se tiene $(s^2 - 4s + 4) \cdot Y(s) = 6/(s-2)^4$, de donde resulta $Y(s) = 6/(s-2)^4$, ya que $s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2$.

Tercer paso: Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ a $Y(s) = 6/(s-2)^4 = (6/5!) \cdot 5!/(s-2)^4$ y se obtiene directamente la función $y(t) = (1/20) \cdot t^5 e^{2t}$ (solución pedida). Pues, de la relación de transformadas dada en la Nota de la pág. 3, se deduce que $\mathcal{L}(t^5) = 5!/s^6$ y la propiedad 2) de la pág. 3 nos indica que la transformada de $e^{2t} \cdot t^5$ será $5!/(s-2)^6$. Además, el cociente $6/5!$ es $1/20$.

(Es fácil comprobar que esta función cumple la EDO y las condiciones iniciales dadas).

Variante del ejemplo precedente: Hallar la solución de la EDO $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$ que cumpla las condiciones iniciales $y(2) = 0$; $y'(2) = 0$. (Nótese que estas condiciones iniciales no se refieren a $t = 0$ sino a $t = 2$, por lo cual **no puede aplicarse directamente el método de Laplace para resolver este problema**).

En la Nota de la pág. 2 dijimos que en estos casos hay que aplicar un cambio de variable independiente, que en nuestro caso será $u = t - 2$ de modo que para $t = 2$ sea $u = 0$. Con ese cambio la EDO dada se escribe $y''(u+2) - 4 \cdot y'(u+2) + 4 \cdot y(u+2) = e^{2(u+2)}$.

Y si llamamos $y(u+2) = g(u)$, función compuesta de $y(t)$ con $t = u + 2$, se tendrá por Regla de La Cadena $g'(u) = \frac{d}{du} y(u+2) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = y'(u+2) \cdot 1 = y'(u+2)$.

Y análogamente se obtiene $g''(u) = y''(u+2)$.

Con lo cual la EDO dada se escribe $g''(u) - 4 \cdot g'(u) + 4 \cdot g(u) = e^4 \cdot e^{2u}$ con las condiciones iniciales $g(0) = y(2) = 0$ y $g'(0) = y'(2) = 0$. (Obsérvese que esta EDO tiene un primer miembro igual al primer miembro de la dada inicialmente y tiene un segundo miembro diferente). Pero ahora podemos aplicar el método de Laplace al nuevo problema:

Primer paso: $\mathcal{L}(g'') - 4 \cdot \mathcal{L}(g') + 4 \cdot \mathcal{L}(g) = e^4 \cdot \mathcal{L}(e^{2u})$ y llamando a $\mathcal{L}[g(u)] = G(s)$, se tiene $[s^2 \cdot G(s) - s \cdot g(0) - g'(0)] - 4 \cdot [s \cdot G(s) - g(0)] + 4 \cdot G(s) = e^4/(s-2)$. Y, sustituyendo los valores iniciales dados y sacando $G(s)$ factor común, tenemos

$$(s^2 - 4s + 4) \cdot G(s) = \frac{e^4}{s-2}$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Segundo paso: Se despeja $G(s)$ y tenemos $G(s) = \frac{e^4}{(s-2)^3}$, puesto que $s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2$.

Tercer paso: Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ y se tiene $g(u) = e^4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-2)^3} \right]$. Ahora bien, sabemos que la transformada de e^{2u} es $1/(s-2)$, con lo cual la transformada de $(-u) \cdot e^{2u}$ será la derivada de $1/(s-2)$, que es $-1/(s-2)^2$. Y, aplicando la misma propiedad otra vez, la transformada de $(-u)^2 \cdot e^{2u}$ será la derivada de $-1/(s-2)^2$ que es $2/(s-2)^3$. Entonces:

$$g(u) = \frac{e^4}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s-2)^3} \right] = \frac{e^4}{2} \cdot (-u)^2 \cdot e^{2u} = \frac{e^4}{2} \cdot u^2 \cdot e^{2u} = \frac{u^2}{2} \cdot e^{2u+4}$$

(se puede comprobar sin dificultad que esta función cumple la EDO $g'' - 4g' + 4g = e^{2u+4}$ y además cumple $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$).

Ahora deshacemos el cambio dado al principio, poniendo $t-2$ en lugar de u en la solución particular obtenida antes, con lo cual $g(t-2) = \frac{(t-2)^2}{2} \cdot e^{2t}$, pero habíamos llamado $g(u)$ a la función compuesta $y(u+2)$, con lo cual $g(t-2) = y(t-2+2) = y(t)$.

En conclusión, la solución particular del problema dado inicialmente será:

$$y(t) = \frac{(t-2)^2}{2} \cdot e^{2t}$$

(se comprueba sin dificultad que esta función cumple la EDO dada al principio y además cumple las dos condiciones iniciales $y(2) = 0$ e $y'(2) = 0$).

Ejemplo 3: Calcular la solución de la EDO $y'' + y = \sin t$ que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Primer paso: Aplicamos la $\mathcal{L}$ a ambos miembros de la ecuación dada y usamos su linealidad

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin t), \text{ o sea } [s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] + Y(s) = 1/(s^2 + 1)$$

y sustituyendo los valores iniciales dados será $s^2 \cdot Y(s) + 1 + Y(s) = 1/(s^2 + 1)$

Segundo paso: Despejamos $Y(s)$ de la ecuación anterior. Es $(s^2 + 1) \cdot Y(s) = -s^2/(s^2 + 1)$, luego

$$Y(s) = -\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

Tercer paso: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{s^2}{(s^2+1)^2} \right]$. Descomponemos $Y(s)$ en fracciones simples y se tiene

$-\frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}$. Para el cálculo de A, B, C y D usamos la siguiente identidad de polinomios $(As+B)(s^2+1) + Cs+D \equiv -s^2$, de donde obtenemos un sistema de 4 ecuaciones lineales con las 4 incógnitas A, B, C y D . Resolviendo el sistema, resultan los valores $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$ y $D = 1$.

Entonces $Y(s) = \frac{-1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$, con lo cual $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s^2+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2+1)^2} \right]$. La primera transformada inversa es claramente $-\sin t$, pero la segunda no es inmediata. Pues bien, para calcular la segunda transformada inversa vamos a relacionar $Y(s) = \frac{-s^2}{(s^2+1)^2}$ con la derivada de $\frac{s}{s^2+1}$ (que como sabemos es la transformada de $\cos t$), la cual debe ser muy parecida, pues su denominador

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

será el cuadrado de $s^2 + 1$ y su numerador será de segundo grado. En efecto, dicha derivada es $\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}$ luego tenemos la relación $\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = Y(s) + \frac{1}{(s^2+1)^2}$. De donde resulta

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - Y(s)$$

Pero entonces, ya podemos calcular la transformada inversa de $1/(s^2 + 1)^2$, que no conocíamos, la cual es por linealidad $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right] - \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$. Ahora bien, por la propiedad 4) de la transformación de Laplace, la primera transformada inversa será $(-t) \cdot \cos t$. Y la segunda transformada inversa es la propia función $y(t)$ que estamos buscando.

Conclusión: $y(t) = -\sin t + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = -\sin t + (-t) \cdot \cos t - y(t)$

Por tanto, $2 \cdot y(t) = -\sin t - t \cdot \cos t$, con lo cual $y(t) = -\frac{\sin t + t \cdot \cos t}{2}$ (solución pedida).

(Es fácil comprobar que esta función cumple la EDO y las condiciones iniciales dadas).

Nota: Obsérvese que la parte más difícil del “método de Laplace” es su tercer paso, como ya habíamos dicho, (y en el ejemplo anterior lo hemos notado). Sin embargo, también habíamos dicho que hay tablas muy extensas de transformadas de Laplace, las cuales permiten encontrar directamente la función $Y(s)$ entre los resultados incluidos en la tabla (o una función muy próxima). De ese modo sabríamos qué función da imagen $Y(s)$ por la transformación $\mathcal{L}$, y ésta sería la función buscada $y(t)$.

Ejemplo 4: Calcular la solución de la EDO $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t$ que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

(EDO lineal de orden 3 con coeficientes constantes y no homogénea).

Primer paso: Aplicamos $\mathcal{L}$ y tenemos $\mathcal{L}(y''') + 2 \cdot \mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') - 2 \cdot \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin 3t)$

$$\begin{aligned} \text{O sea, } [s^3 \cdot Y(s) - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0)] + 2[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] - \\ - [s \cdot Y(s) - y(0)] - 2 \cdot Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \end{aligned}$$

que, al sustituir los valores iniciales dados, se convierte en

$$s^3 \cdot Y(s) - 1 + 2s^2 \cdot Y(s) - s \cdot Y(s) - 2 \cdot Y(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

Segundo paso: Despejamos $Y(s)$ de la ecuación anterior

$$(s^3 + 2s^2 - s - 2) \cdot Y(s) = \frac{3}{s^2+9} + 1, \text{ luego } Y(s) = \frac{s^2+12}{(s^2+9) \cdot (s^3+2s^2-s-2)}$$

Tercer paso: Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ y será $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+12}{(s^2+9) \cdot (s^3+2s^2-s-2)}\right]$

y para hallar esta transformada inversa descomponemos $Y(s)$ en suma de fracciones simples

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

$$\frac{s^2+12}{(s^2+9)(s^3+2s^2-s-2)} = \frac{s^2+1}{(s^2+9)(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+2}$$

Calculadas las 5 constantes, resulta $A = 3/130$, $B = -3/65$, $C = 13/60$, $D = -13/20$ y $E = 16/39$.

Tenemos entonces, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{As+B}{s^2+9}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{D}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{E}{s+2}\right)$

que, usando nuevamente la linealidad de la transformación inversa, puede ponerse como

$$y(t) = A \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{B}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + C \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + D \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + E \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

Ahora, usando directamente las transformadas dadas en las págs. 2 y 3, se tendrá

$$y(t) = A \cdot \cos 3t + \frac{B}{3} \cdot \operatorname{sen} 3t + C \cdot e^t + D \cdot e^{-t} + E \cdot e^{-2t}$$

O sea, la solución buscada es $y(t) = \frac{3}{130} \cos 3t - \frac{1}{65} \operatorname{sen} 3t + \frac{13}{60} e^t - \frac{13}{20} e^{-t} + \frac{16}{39} e^{-2t}$

(Se puede comprobar que esta función cumple la EDO y las condiciones iniciales dadas).

Resolución mediante la transformación de Laplace de ciertas ecuaciones integrales e integrodiferenciales lineales de coeficientes constantes

Una ecuación funcional se llama “ecuación integral” cuando la función incógnita aparezca sometida a alguna operación de integración y se llama “ecuación integrodiferencial” cuando la función incógnita aparezca sometida a alguna operación de integración y también a alguna operación de derivación. Y dichas ecuaciones se llaman “lineales” cuando sean de grado uno en la función incógnita, en sus derivadas y en sus integrales, además de que los integrandos donde aparezca la función incógnita sean de grado uno en esta.

Por ejemplo, la ecuación $y(t) + \int_0^t y(x) dx = t$ es una ecuación integral lineal de incógnita $y(t)$. Si la función t del segundo miembro fuese cero, se llamaría homogénea. Además, son constantes los coeficientes de la función incógnita y de su integral (ambos son 1).

Y la ecuación $y'(t) + y(t) - \int_0^t y(x) \cdot \operatorname{sen}(t-x) dx = -\operatorname{sen} t$ es una ecuación integrodiferencial lineal de incógnita $y(t)$, a la que se debe agregar una condición inicial del tipo $y(0) = c_0$ para resolverla (basta una sola condición, por ser de orden uno en las derivadas; harían falta dos condiciones, si fuese de orden dos en las derivadas; etc...). Si la función $-\operatorname{sen} t$ del segundo miembro fuese cero, se llamaría también homogénea. Además, son constantes los coeficientes de la función incógnita, de su derivada y de la integral donde interviene.

El uso de la transformación de Laplace para resolver este tipo de ecuaciones integrales o integrodiferenciales lineales de coeficientes constantes es similar al visto anteriormente para las EDO lineales de coeficientes constantes: 1) Se aplica la transformación $\mathcal{L}$ a ambos miembros de la ecuación. 2) Se despeja la función transformada $Y(s)$ de la ecuación de primer grado obtenida. 3) Se obtiene la solución buscada $y(t)$ a partir de su transformada $Y(s)$, aplicando la transformada inversa de Laplace o, más fácilmente, usando la linealidad de ésta, las listas de transformadas conocidas y las propiedades de $\mathcal{L}$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Veremos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo 1: Calcular la solución de la ecuación $y(t) = t \cdot e^t + \int_0^t x \cdot y(t-x) dx$.

(Se trata de una ecuación integral, que es lineal de coeficientes constantes y no homogénea).

Primer paso: Aplicamos a ambos miembros la transformación de Laplace y tenemos por linealidad $Y(s) = \mathcal{L}(t \cdot e^t) + \mathcal{L}\left[\int_0^t x \cdot y(t-x) dx\right] = \mathcal{L}(t \cdot e^t) + \mathcal{L}[t * y(t)]$, pues la integral representa el “producto de convolución” de las funciones t e $y(t)$. (Ver final de la pág. 3).

Entonces, teniendo en cuenta que $\mathcal{L}(t) = \Gamma(2)/s^2 = 1/s^2$, la propiedad 2) de la pág. 3 nos dice que $\mathcal{L}(t \cdot e^t) = 1/(s-1)^2$. Y la propiedad 6) relativa al producto de convolución establece que $\mathcal{L}[t * y(t)] = \mathcal{L}(t) \cdot \mathcal{L}[y(t)] = (1/s^2) \cdot Y(s)$. Por tanto, tenemos $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{Y(s)}{s^2}$.

Segundo paso: Tenemos $\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \cdot Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ y ahora podemos despejar $Y(s)$ obteniendo

$$Y(s) = \frac{s^2}{(s-1)^2 \cdot (s^2-1)} = \frac{s^2}{(s-1)^3 \cdot (s+1)}$$

Tercer paso: Para obtener $y(t)$ descomponemos la última fracción en suma de fracciones simples

$$\frac{s^2}{(s-1)^3 \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s+1}$$

donde los valores de las constantes son: $A = 1/8$, $B = 3/4$, $C = 1/2$ y $D = -1/8$.

Entonces, aplicamos la transformación inversa y usamos su linealidad

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s+1}\right] = \\ &= A \cdot e^t + B \cdot t \cdot e^t + \frac{C}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{(s-1)^3}\right] + D \cdot e^{-t} = A \cdot e^t + B \cdot t \cdot e^t + \frac{C}{2} \cdot t^2 \cdot e^t + D \cdot e^{-t} \end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{L}(t^2) = \frac{\Gamma(3)}{s^3} = \frac{2!}{s^3}$ y por lo tanto $\mathcal{L}(t^2 \cdot e^t) = \frac{2!}{(s-1)^3}$.

Conclusión: La solución buscada es $y(t) = \frac{1}{8} e^t + \frac{3}{4} t \cdot e^t + \frac{1}{4} t^2 \cdot e^t - \frac{1}{8} e^{-t}$

(Puede comprobarse esta solución, pero el cálculo de la integral es preferible hacerlo en la forma equivalente $\int_0^t (t-x) \cdot y(x) dx$. Y, aún así, resultan cálculos laboriosos).

Ejemplo 2: Calcular la solución de la ecuación $y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(x) dx$, que cumpla la condición inicial $y(0) = 0$.

(Se trata de una ecuación integrodiferencial, que es lineal de coeficientes constantes no homogénea).

Primer paso: Aplicamos la transformación de Laplace y hacemos uso de su linealidad

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

$$\mathcal{L} [y'(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \mathcal{L} \left[\int_0^t y(x) dx \right]$$

Y, utilizando las propiedades 3) y 5) de la pág. 3, queda $s \cdot Y(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{Y(s)}{s}$.

O sea,

$$s \cdot Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{Y(s)}{s}$$

Segundo paso: Despejamos $Y(s)$ de la ecuación anterior

$$\left(s + \frac{1}{s}\right) \cdot Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s \cdot (s^2 + 1)}, \text{ es decir, } \frac{s^2 + 1}{s} \cdot Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s \cdot (s^2 + 1)}, \text{ con lo cual } Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{(s^2 + 1)^2}$$

Tercer paso: Para encontrar $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$, conviene hacer la descomposición en fracciones simples $\frac{s^2-s+1}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}$. Calculados los valores de las constantes, se obtiene $A = 0$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = 0$. Por tanto, usando la linealidad de la transformación inversa de Laplace y la transformada dada en el apartado 4) de la pág. 2,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{-s}{(s^2+1)^2} \right] = \text{sen } t + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-s}{(s^2+1)^2} \right]$$

Falta la última transformada inversa. Pero la expresión $\frac{-s}{(s^2+1)^2}$ debe parecerse a la derivada de $\frac{1}{s^2+1}$. Y en efecto, $\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$. Por lo tanto, podemos escribir

$$y(t) = \sin t + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2} \right] = \sin t + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) \right] = \sin t + \frac{1}{2} \cdot (-t) \cdot \sin t$$

en virtud de la propiedad 4) de la pág. 3.

Conclusión: La solución pedida es $y(t) = \sin t - \frac{t \cdot \sin t}{2}$

(Es evidente que esta solución cumple la condición inicial dada y se puede comprobar sin dificultad que también cumple la ecuación integrodiferencial).

Resolución mediante la transformación de Laplace de sistemas de ecuaciones diferenciales que sean lineales de coeficientes constantes

Un “sistema diferencial de primer orden” es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con n funciones incógnitas que puede ponerse en la forma:

[illegible]

donde las incógnitas son las funciones $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$.

En el caso de que los segundos miembros sean todos de primer grado en todas las funciones incógnitas, se dirá que el sistema diferencial es “lineal”. Por tanto, un sistema diferencial lineal de primer orden de n ecuaciones con n funciones incógnitas se podrá escribir entonces:

[illegible]

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Y si todas las funciones $a_{ij}(t)$ fuesen constantes reales (para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$), el sistema diferencial sería “lineal de coeficientes constantes”.

Las funciones $b_1(t), \dots, b_n(t)$ pueden ser cualesquiera. Y el sistema se llamará “homogéneo” en el caso de que todas esas funciones sean la función cero.

Nota: El sistema diferencial pudiera incluir derivadas de orden superior de una o varias funciones incógnitas, pero siempre será de tantas ecuaciones como incógnitas. Su orden será el de la derivada que tenga mayor orden. Para ser “lineal” tendrá que ser de grado uno en todas las incógnitas y en todas las derivadas que aparezcan.

Método de Laplace:

Si el sistema diferencial dado es lineal de coeficientes constantes, además se conocen las transformadas de Laplace de las funciones $b_1(t), \dots, b_n(t)$ y se dan suficientes condiciones iniciales, se puede intentar resolver el sistema mediante un procedimiento análogo al utilizado anteriormente para las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones integrales y las ecuaciones integrodiferenciales que sean también lineales de coeficientes constantes.

A saber:

- 1) Se aplica $\mathcal{L}$ a ambos miembros de todas las ecuaciones del sistema dado, obteniéndose un sistema algebraico lineal que tiene como incógnitas las transformadas $Y_1(s), \dots, Y_n(s)$ de las funciones incógnitas iniciales.
- 2) Se resuelve el sistema algebraico anterior, obteniendo expresiones explícitas de sus incógnitas $Y_1(s), \dots, Y_n(s)$.
- 3) Se aplica $\mathcal{L}^{-1}$ a todas las funciones obtenidas en el paso anterior, para tener finalmente las funciones incógnitas del sistema dado, que son $y_1(t), \dots, y_n(t)$.

En cuanto al número de condiciones iniciales, diremos que si el sistema diferencial es de primer orden serán n de la forma $y_1(0) = c_1, \dots, y_n(0) = c_n$. Y en caso de que una cierta incógnita $y_i(t)$ presente alguna derivada de orden p superior a uno, las condiciones iniciales correspondientes a esa función incógnita deben ser p : Valor de $y_i(0)$, valor de $y_i'(0)$, valor de $y_i''(0), \dots$, y valor de $y_i^{(p-1)}(0)$.

Veremos algunos ejemplos al respecto:

Ejemplo 1: Resolver el sistema diferencial
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 4y \end{cases} \quad \text{con las condiciones iniciales}$$

$x(0) = y(0) = 1.$

(Se trata de un sistema diferencial de primer orden, cuyas funciones incógnitas son $x(t)$ e $y(t)$, siendo lineal y de coeficientes constantes, donde $a_{11}(t) = -1$, $a_{12}(t) = 2$, $a_{21}(t) = -1$ y $a_{22}(t) = -4$. Además, es homogéneo).

Aplicamos el método de Laplace:

Primer paso: Aplicamos la transformación de Laplace a ambas ecuaciones y llamamos $X(s)$ e $Y(s)$ a las transformadas de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Entonces, se tiene el sistema algebraico

$$\begin{cases} s \cdot X(s) - x(0) = -X(s) + 2Y(s) \\ s \cdot Y(s) - y(0) = -X(s) - 4Y(s) \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} s \cdot X(s) - 1 = -X(s) + 2Y(s) \\ s \cdot Y(s) - 1 = -X(s) - 4Y(s) \end{cases}$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

que, ordenado, queda como
$$\begin{cases} (s+1)X(s) - 2Y(s) = 1 \\ X(s) + (s+4)Y(s) = 1 \end{cases}$$

Segundo paso: Despejando las incógnitas de este sistema algebraico lineal, se obtiene

$$X(s) = \frac{s+6}{s^2+5s+6} = \frac{s+6}{(s+2)(s+3)} \quad ; \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+5s+6} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

Tercer paso: Para hallar las transformadas inversas, conviene descomponer en fracciones simples las expresiones de $X(s)$ e $Y(s)$, teniéndose

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3} \quad ; \quad Y(s) = \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

con los valores de las constantes ya calculados.

Por tanto, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambas funciones, usando la linealidad de esta transformación inversa y usando también que la transformada de Laplace de e^{at} es $1/(s-a)$, tenemos

$$x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \quad ; \quad y(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

que es la solución del sistema diferencial dado cumpliendo las condiciones iniciales establecidas.

Comprobación de la solución obtenida:

Se tiene $x'(t) = -8e^{-2t} + 9e^{-3t}$ e $y'(t) = 4e^{-2t} - 9e^{-3t}$. Entonces

$$-x(t) + 2y(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-3t} - 4e^{-2t} + 6e^{-3t} \equiv -8e^{-2t} + 9e^{-3t} = x'(t)$$

con lo cual se cumple la primera ecuación del sistema dado. Y además

$$-x(t) - 4y(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-3t} + 8e^{-2t} - 12e^{-3t} \equiv 4e^{-2t} - 9e^{-3t} = y'(t)$$

cumpliéndose la segunda ecuación del sistema dado. Y en cuanto a las condiciones iniciales dadas, tenemos $x(0) = 4 - 3 = 1$ e $y(0) = -2 + 3 = 1$.

Nota importante: Conviene saber que el sistema diferencial dado podría haberse convertido en una sola EDO de segundo orden, que sería también lineal de coeficientes constantes y homogénea, eliminando una de las funciones incógnitas entre las dos ecuaciones del sistema.

En general, si el sistema es de primer orden y tuviese n ecuaciones con n incógnitas, podría reducirse a una sola EDO de orden n .

En este caso teníamos $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$. Si de la primera ecuación despejamos la función $y(t)$ en términos de $x(t)$ y $x'(t)$, será $y = \frac{x' + x}{2}$, de donde resulta $y' = \frac{x'' + x'}{2}$. Y substituyendo estos valores anteriores en la segunda ecuación dada, se tendrá $\frac{x'' + x'}{2} = -x - 2(x' + x)$, que operando nos da $x'' + 5x' + 6x = 0$ (EDO de segundo orden lineal de coeficientes constantes y homogénea).

Recordando ahora cómo se obtiene la solución general de la anterior EDO, tendremos que la misma es $x = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-3t}$, pues su ecuación característica es $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, que tiene raíces $\lambda = -2$ y $\lambda = -3$.

Pero nos habían dado la condición inicial $x(0) = 1$. Faltaría saber cuánto vale $x'(0)$ para determinar la solución particular que buscamos. Pero siendo $y = \frac{x' + x}{2}$, se obtiene $y(0) = \frac{x'(0) + x(0)}{2}$

y como nos dieron $y(0) = 1$, tendremos $1 = \frac{x'(0) + 1}{2}$, con lo cual $x'(0) = 1$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Partiendo ahora de la solución general obtenida para la función $x(t)$ y aplicando las dos condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = 1$, resulta como “solución particular” la misma obtenida por el método de Laplace, o sea $x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$.

Y teniendo en cuenta otra vez la relación $y = \frac{x' + x}{2}$, se llega a $y(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ que también es la misma “solución particular” obtenida para $y(t)$ por el método de Laplace.

Ejemplo 2: Resolver el sistema diferencial $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases}$ con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

(Se trata de un sistema diferencial de primer orden, cuyas funciones incógnitas son $x(t)$ e $y(t)$, siendo lineal y de coeficientes constantes, donde $a_{11}(t) = -1$, $a_{12}(t) = 1$, $a_{21}(t) = 1$ y $a_{22}(t) = -1$. Además, es no homogéneo, siendo $b_1(t) = e^t$ y $b_2(t) = e^t$).

Aplicamos el método de Laplace:

Primer paso: Al aplicar $\mathcal{L}$ a las dos ecuaciones y usar las condiciones iniciales dadas, resulta el sistema algebraico

$$\begin{cases} s \cdot X(s) - 1 = -X(s) + Y(s) + 1/(s-1) \\ s \cdot Y(s) - 2 = X(s) - Y(s) + 1/(s-1) \end{cases}$$

que ordenado queda así: $\begin{cases} (s+1)X(s) - Y(s) = s/(s-1) \\ -X(s) + (s+1)Y(s) = (2s-1)/(s-1) \end{cases}$

Segundo paso: Despejando las incógnitas $X(s)$ e $Y(s)$ de este sistema algebraico lineal, se obtiene

$$X(s) = \frac{s^2 + 3s - 1}{(s-1)(s^2 + 2s)} \quad ; \quad Y(s) = \frac{2s^2 + 2s - 1}{(s-1)(s^2 + 2s)}$$

Tercer paso: Para hallar las transformadas inversas, conviene descomponer en fracciones simples las expresiones de $X(s)$ e $Y(s)$.

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1/2}{s+2} \quad ; \quad Y(s) = \frac{D}{s} + \frac{E}{s-1} + \frac{F}{s+2} = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1/2}{s+2}$$

con los valores de las constantes ya calculados.

Por tanto, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambas funciones, usando la linealidad de esta transformación inversa y también usando que $\mathcal{L}(1) = 1/s$ y que $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$, tenemos

$$x(t) = \frac{1}{2} + e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} \quad ; \quad y(t) = \frac{1}{2} + e^t + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

que es la solución del sistema diferencial dado cumpliendo las condiciones iniciales establecidas (como puede comprobarse fácilmente).

Ejemplo 3: Resolver el sistema diferencial $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y + z \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 4y \end{cases}$ con las condiciones iniciales $x(0) = 5$, $y(0) = 0$, $z(0) = 4$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

(Se trata de un sistema diferencial de primer orden, con tres funciones incógnitas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, siendo lineal y de coeficientes constantes, donde $a_{11}(t) = 0$, $a_{12}(t) = 4$, $a_{13}(t) = 1$, $a_{21}(t) = 0$, $a_{22}(t) = 0$, $a_{23}(t) = 1$, $a_{31}(t) = 0$, $a_{32}(t) = 4$ y $a_{33}(t) = 0$. Además, es homogéneo).

Aplicamos el método de Laplace:

Primer paso: Al aplicar $\mathcal{L}$ a las tres ecuaciones y usar las condiciones iniciales dadas, resulta

$$\begin{cases} s \cdot X(s) - 5 = 4Y(s) + Z(s) \\ s \cdot Y(s) = Z(s) \\ s \cdot Z(s) - 4 = 4Y(s) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\begin{cases} s \cdot X(s) - 4Y(s) - Z(s) = 5 \\ s \cdot Y(s) - Z(s) = 0 \\ -4Y(s) + s \cdot Z(s) = 4 \end{cases}}$$

Segundo paso: Despejando las incógnitas $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$ de este sistema algebraico lineal, se tiene

$$\boxed{X(s) = \frac{5s^2 + 4s - 4}{s(s^2 - 4)}} \quad ; \quad \boxed{Y(s) = \frac{4}{s^2 - 4}} \quad ; \quad \boxed{Z(s) = \frac{4s}{s^2 - 4}}$$

Tercer paso: Para hallar las transformadas inversas, conviene descomponer en fracciones simples las expresiones de $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$.

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+2} \quad Y(s) = \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$$

$$Z(s) = \frac{F}{s-2} + \frac{G}{s+2} = \frac{2}{s-2} + \frac{2}{s+2}$$

con los valores de las constantes ya calculados.

Por tanto, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a las tres funciones obtenidas, usando la linealidad de esta transformación inversa y también usando que $\mathcal{L}(1) = 1/s$ y que $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$, tenemos

$$\boxed{x(t) = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}} \quad ; \quad \boxed{y(t) = e^{2t} - e^{-2t}} \quad ; \quad \boxed{z(t) = 2e^{2t} + 2e^{-2t}}$$

que es la solución del sistema diferencial dado cumpliendo las condiciones iniciales establecidas (como puede comprobarse fácilmente).

Ejemplo 4: Resolver el sistema diferencial de segundo orden $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = e^t - x \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1 \end{cases}$ con las condi-

ciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 2$ e $y'(0) = -1$ (como aparecen las derivadas segundas de las funciones incógnitas, se utilizan **dos** condiciones iniciales para cada una de ellas).

(Se trata de un sistema diferencial de orden 2, con dos funciones incógnitas, siendo lineal, de coeficientes constantes y no homogéneo, con $b_1(t) = e^t$ y $b_2(t) = 1$).

Aplicamos el método de Laplace:

Primer paso: Al aplicar $\mathcal{L}$ a las ecuaciones dadas y utilizar su linealidad resulta

$$\begin{cases} [s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - x'(0)] + [s \cdot Y(s) - y(0)] = \frac{1}{s-1} - X(s) \\ [s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] + [s \cdot X(s) - x(0)] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

que al sustituir los valores iniciales dados se reduce a

$$\begin{cases} s^2 X(s) - s - 2 + s Y(s) = \frac{1}{s-1} - X(s) \\ s^2 Y(s) + 1 + s X(s) - 1 = \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s^2 + 1) X(s) + s Y(s) = \frac{1}{s-1} + s + 2 \\ s X(s) + s^2 Y(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Y operando en el segundo miembro de la primera ecuación, tenemos finalmente el sistema algebraico lineal que deben cumplir las incógnitas $X(s)$ e $Y(s)$

$$\begin{cases} (s^2 + 1) X(s) + s Y(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s-1} \\ s X(s) + s^2 Y(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Segundo paso: Despejando las incógnitas de este sistema, se tiene

$$X(s) = \frac{s^4 + s^3 - s^2 - s + 1}{s^4(s-1)} \quad ; \quad Y(s) = \frac{-s^4 + s - 1}{s^5(s-1)}$$

Tercer paso: Para hallar las transformadas inversas, conviene descomponer en fracciones simples las expresiones de $X(s)$ e $Y(s)$.

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s-1} \quad (\text{calculando las constantes}) \quad X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{F}{s} + \frac{G}{s^2} + \frac{H}{s^3} + \frac{J}{s^4} + \frac{K}{s^5} + \frac{L}{s-1} \quad (\text{calculando las constantes}) \quad Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s-1}$$

Por tanto, aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a las funciones obtenidas, usando la linealidad de esta transformación inversa y también usando $\mathcal{L}(1) = 1/s$, $\mathcal{L}(t^\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}$ y $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/s - a$, tenemos finalmente

$$x(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + e^t \quad ; \quad y(t) = 1 + \frac{1}{24}t^4 - e^t$$

que es la solución del sistema diferencial dado cumpliendo las condiciones iniciales establecidas (como puede comprobarse fácilmente).