ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS BÁSICAS

(Prerrequisitos: Derivadas de funciones de una variable. Integrales indefinidas. Derivadas parciales)

Conceptos básicos

Una "ecuación diferencial ordinaria" (abreviado EDO) es cualquier ecuación (igualdad que no sea una identidad) donde intervengan una o más derivadas de una función desconocida de una variable (que es la incógnita a determinar), pudiendo aparecer además en dicha ecuación la propia función incógnita y su variable independiente (lo cual no es obligatorio). Para que podamos hablar de una EDO, en la ecuación dada tendrá que intervenir, como mínimo, **una derivada** de la función desconocida. Ver ejemplos a continuación.

Resolver una EDO es hallar todas las funciones de una variable que la cumplan: Es decir, que al sustituir la derivada o derivadas que intervengan en la ecuación por las de una cualquiera de esas funciones, junto con la propia función si esta interviene en la ecuación, conviertan la misma en una identidad.

Tres ejemplos:

1) $\boxed{y' = 0}$. Es la EDO más sencilla que existe; se dice que es de primer orden porque aparece solamente la derivada primera (de primer orden) de la función incógnita; se puede suponer que su variable independiente es x , pero podría ser otra cualquiera porque no la vemos en la ecuación. Nótese que en esta ecuación no aparece tampoco la función incógnita. Pero si la ecuación estuviese escrita como $\frac{dy}{dx} = 0$ o $\frac{dy}{dt} = 0$, estaría claro que la variable independiente es x en el primer caso y es t en el segundo caso (lo cual es una ventaja de la notación de Leibniz para la derivada). Pero podríamos haber escrito también la ecuación como $y'(x) = 0$ o $y'(t) = 0$ y también estaría claro cuál es la variable independiente en cada caso. No hay que trabajar para resolver esta EDO tan simple: Sus soluciones son evidentemente todas las funciones constantes (de x o de t).

2) $\boxed{2y'' - 3y' + 5y = x^2}$. Es una EDO de segundo orden, porque la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es y''. Obsérvese que en esta ecuación también aparece y', la propia función incógnita y su variable independiente x. Cuando en la misma EDO aparecen varias derivadas de la función desconocida, el orden de la ecuación lo determina la derivada que tenga mayor orden. Aprenderemos a resolver ecuaciones como esta en la Sección 7.8 (Ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno).

3) $\boxed{y' + 3x - y''' = 5}$. Es una EDO de tercer orden (porque el orden más alto entre las derivadas que aparecen es 3), donde no aparece tampoco la función incógnita ni aparece su derivada segunda, pero sí aparece la variable independiente x. Es otra ecuación de las que serán tratadas en la sección 7.8.

Nota: En esta Sección solamente veremos cómo se resuelven algunas EDO de primer orden (las más importantes).

Hay otras ecuaciones diferenciales donde la función incógnita es una función de dos o más variables. En esas ecuaciones tienen que aparecer una o varias derivadas parciales de la función desconocida y se llaman "ecuaciones en derivadas parciales" (abreviado EDP). La derivada parcial que tenga el mayor orden, determinará el orden de la ecuación.

Dos ejemplos:

1) $\boxed{x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0}$. Es una EDP de primer orden, donde la función incógnita es z, que depende de dos variables independientes (x e y). Obsérvese que en esta ecuación no aparece la función incógnita, sino solamente sus derivadas parciales primeras. Sin embargo, las dos variables independientes sí intervienen en la ecuación, lo cual no es obligatorio (podría intervenir solamente una de ambas o no intervenir ninguna).

2) $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2z - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 5}$. Es una EDP de segundo orden, donde no aparecen las restantes derivadas parciales de segundo orden de la función incógnita z, la cual depende otra vez de las variables independientes x e y, lo cual se deduce de las notaciones de las derivadas que aparecen. Tampoco aparece la derivada parcial primera de z respecto a x. Pero vemos que sí interviene directamente la función incógnita z en la ecuación y no aparece ninguna de las variables independientes en la misma.

Soluciones de las ecuaciones diferenciales

1) **Si la ecuación es una EDO**, una "solución particular" es cualquier función de una variable que admita las derivadas que aparezcan en la ecuación, de modo que sustituyendo en la misma sus derivadas y la propia función, la igualdad se convierta en una identidad (diremos entonces que "la función cumple la EDO").

Ejemplo 1: Una "solución particular" de la EDO $\boxed{y'' = 6}$ es la función $\boxed{y = 3x^2 + 2x - 5}$. En efecto, se tiene $y' = 6x + 2$ y entonces $y'' = 6$, de modo que si sustituimos esta y'' en la ecuación, queda $6 = 6$ (una identidad).

Ejemplo 2: Una "solución particular" de la EDO $\boxed{y' + 2xy = 4x}$ es la función $\boxed{y = 2 + e^{-x^2}}$. En efecto, será $y' = -2xe^{-x^2}$ y entonces, al sustituir y e y' en la ecuación, queda $-2xe^{-x^2} + 2x \cdot \left(2 + e^{-x^2}\right) = 4x$, que operando nos da $4x = 4x$ (una identidad).

---

2) **Si la ecuación es una EDP** con dos variables independientes (puede haber más), una "solución particular" es cualquier función de esas dos variables que admita las derivadas parciales que aparezcan en la ecuación, de modo que sustituyendo en la misma sus derivadas parciales y la propia función, la igualdad se convierta en una identidad (diremos entonces que "la función cumple la EDP").

Ejemplo: Una "solución particular" de la EDP $\boxed{x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z}$ es $\boxed{z = x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right)}$. Pues tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2x \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right) - y \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right)$ y también tenemos $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = x \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right)$. De modo que, al sustituir la función y sus dos derivadas parciales primeras en la ecuación, queda:

$$2x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right) - xy \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right) + yx \cdot cos\left(\frac{y}{x}\right) = 2x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right)$$

que simplificada es la identidad $2x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right) = 2x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right)$.

"Solución general" de cualquier ecuación diferencial es una familia de infinitas "soluciones particulares" de la misma (la familia de "soluciones particulares" más amplia posible en cada caso).

Ejemplo: "Solución general" de la EDO $\boxed{y' + 2xy = 4x}$ es la siguiente familia de infinitas funciones: $\boxed{y = 2 + C \cdot e^{-x^2}}$ (C es una constante real arbitraria, de modo que para cada valor de C

tenemos una "solución particular" de la EDO). Una de las funciones de esta familia es $y = 2 + e^{-x^2}$ (es la "solución particular" que comprobamos anteriormente en el ejemplo 2, obtenida dando a la constante real C el valor 1). Otra "solución particular" es $y = 2$, obtenida para $C = 0$. Y así sucesivamente.

Se demuestra que si la EDO fuese de orden 2, su "solución general" dependería de 2 constantes arbitrarias; si fuese de orden 3, su "solución general" dependería de 3 constantes arbitrarias; etc…

Otro ejemplo: "Solución general" de la EDP $\boxed{x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z}$ es la siguiente familia de infinitas funciones: $\boxed{z = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)}$ (donde $f(t)$ es una función arbitraria de una variable, que sea diferenciable, de modo que para cada elección de esta función f tenemos una "solución particular" de la EDP). Una de las funciones de esta familia es $z = x^2 \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right)$ (es la "solución particular" que comprobamos en la página anterior, obtenida tomando $f(t) = sen\ t$).

Se demuestra que si la EDP fuese de orden 2, su solución general dependería de 2 funciones arbitrarias; si fuese de orden 3, dependería de 3 funciones arbitrarias; etc…

Un proceso muy importante, en problemas prácticos donde se usan EDO, es determinar una cierta "solución particular" que cumpla alguna o algunas condiciones (normalmente, dicha "solución particular" es la única que interesa en el problema que estemos resolviendo).
Y en muchos casos, esta determinación se hace a partir de la "solución general" de la ecuación que se está considerando, obtenida previamente. Pues la condición o condiciones que daba cumplir la "solución particular" buscada permitirán obtener los valores de las constantes que le correspondan en la "solución general" de la EDO que tenemos. Y entonces, cuando sustituyamos en la "solución general" esos valores obtenidos para las constantes, resultará la "solución particular" que nos interesa. (Veremos muchos ejemplos al respecto en esta Sección y en las Secciones 7.7 y 7.8 que siguen).

El caso más sencillo es el de una EDO de primer orden, donde la "solución general" será de la forma general $F(x, y, C) = 0$ o bien en la forma $F(x, y) = C$ (y algunas veces en la forma explícita $y = F(x, C)$, como veremos).
Y en este caso, la propiedad más sencilla que le podemos imponer a la solución particular que buscamos, es que pase por un determinado punto del plano. Pero si el punto es $P(a, b)$ y si la ecuación de la "solución particular" buscada es $F(x, y, C_0) = 0$, donde C_0 es el valor desconocido de la constante que corresponde a dicha solución, se tendrá que cumplir $\boxed{F(a, b, C_0) = 0}$. Y de esta ecuación se despeja el valor C_0. Entonces, sustituiremos en la "solución general" C por C_0 y ya se tiene la "solución particular" que interesa (lo veremos en muchos ejemplos).

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado

Son EDO de orden 1, pero además **de primer grado en la derivada**.

Se pueden escribir siempre en una de las siguientes formas:

$$\boxed{y' = f(x, y)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0}$$

Y es importante saber pasar de una de estas formas a la otra, como se indica a continuación:

Si nos dan $y' = f(x,y)$, ponemos $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, con lo cual $dy = f(x,y)\,dx$. Basta ya pasar todo al segundo miembro y se tiene: $f(x,y)\,dx - dy = 0$ (que ya está en la forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, donde $P(x,y)$ es $f(x,y)$ y donde $Q(x,y)$ es -1).

Inversamente: Si nos dan $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, ponemos $Q\,dy = -P\,dx$, de donde resulta $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ (que ya está en la forma $y' = f(x,y)$, donde $-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ es $f(x,y)$).

Cualquier otro caso puede llevarse siempre a alguna de las dos formas anteriores.

Por ejemplo, si nos dan la EDO de primer orden en la forma $\boxed{\frac{x+y'}{3+y+y'} = 5}$, despejando y' tenemos:

$$x + y' = 5 \cdot (3 + y - y') \ ; \ x + y' = 15 + 5y - 5y' ; \ 6y' = 15 + 5y - x \ ; \ \boxed{y' = \frac{15+5y-x}{6}} ,$$

que ya está en la forma $y' = f(x,y)$. Por tanto, la ecuación era de primer orden y de primer grado, aunque no estuviese en una de las formas mencionadas al principio.

Sin embargo, hay EDO que son de primer orden pero no son de primer grado. Un ejemplo es: $(y')^3 + 3x(y')^2 - 8y = 0$, donde no podemos despejar y' por ser de grado tres en esa incógnita, apareciendo también $(y')^2$ y no podemos factorizarla al tener también el término $-8y$. En este caso la EDO sería de primer orden y de tercer grado. En otros casos, sí puede despejarse y' pero se obtienen varios valores (como en la EDO de primer orden y segundo grado $(y')^2 - 4 = 0$, de la cual se obtienen los dos valores $y' = 2$ e $y' = -2$). (Trataremos ambos casos y otros más en la Sección 7.7)

Tampoco trataremos en esta Sección las EDO de orden mayor que uno (las veremos en la Sección 7.8), ni las EDP.

Tipos principales de EDO de primer orden y primer grado

Hay muchos tipos, pero los principales (que vamos a resolver a continuación) son:

1) De variables separables.
2) Homogéneas (se reducen a variables separables).
3) Lineales.
4) De Bernoulli (se reducen a lineales).
5) Exactas.
6) Reducibles a exactas.

---

1) ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES:

Su forma típica es $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$, **con la particularidad de que cada una de las funciones $\boldsymbol{P(x,y)}$ y $\boldsymbol{Q(x,y)}$ puedan expresarse como el producto de dos funciones de una sola variable**.

Por tanto, se podrán escribir siempre en la forma:

$$\boxed{f(x) \cdot g(y)\,dx + h(x) \cdot l(y)\,dy = 0}$$

pudiendo ser constantes algunas de las cuatro funciones f, g, h y l anteriores.

Ejemplos:

1) $\boxed{(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0}$, donde $f(x)$ es 1 y donde $l(y)$ es también 1.

2) $\boxed{x\cdot\sqrt{1+y^2}+y'\cdot y\cdot\sqrt{1+x^2}=0}$, que no está en la forma típica. Al poner $y'=dy/dx$ y multiplicar todo por dx, se tiene: $x\cdot\sqrt{1+y^2}\;\;dx+y\cdot\sqrt{1+x^2}\;\;dy=0$, donde tenemos que $f(x)$ es x , $g(y)$ es $\sqrt{1+y^2}$, $h(x)$ es $\sqrt{1+x^2}$ y $l(y)$ es y .

3) $\boxed{(1+x^2)\cdot e^y\,dy-2x\cdot(1+e^y)\,dx=0}$, que tampoco está en la forma típica. Basta cambiar el orden de los términos del primer miembro y se tendrá la forma típica, donde tenemos que $f(x)$ es $-2x$, $g(y)$ es $1+e^y$, $h(x)$ es $1+x^2$ y $l(y)$ es e^y.

MODO DE RESOLUCIÓN:

Lo veremos con un ejemplo. En otros casos, se procede de modo análogo.

Hallar solución general de la EDO: $\boxed{(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0}$

Vemos que es una EDO de primer orden y de primer grado, porque solamente incluye la derivada y', siendo de primer grado en y'. Pero en este caso no está en su forma típica (REGLA IMPORTANTE: PARA RESOLVER TODAS LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS ES MUY CONVENIENTE O ESENCIAL PARTIR DE SUS FORMAS TÍPICAS).

Vamos entonces a ponerla en la forma típica $\boxed{Pdx+Qdy=0}$: Sustituimos y' por su notación de Leibniz y multiplicamos todo por dx:

$$(y^2+xy^2)\frac{dy}{dx}+x^2-yx^2=0\;\;;\;\;(y^2+xy^2)\,dy+(x^2-yx^2)\,dx=0$$

ordenamos y se tiene ya la forma típica: $\boxed{(x^2-yx^2)\,dx+(y^2+xy^2)\,dy=0}$.

Pero necesitamos que las funciones P y Q puedan descomponerse en producto de funciones de una sola variable para que la EDO sea de “variables separables”, lo cual en este caso es posible:

$$P(x,y)=x^2-yx^2=x^2\cdot(1-y)\quad;\quad Q(x,y)=y^2+xy^2=(1+x)\cdot y^2$$

Escribimos entonces la EDO así: $\boxed{x^2\cdot(1-y)\,dx+(1+x)\cdot y^2\,dy=0}$

Viene ahora el proceso llamado “separación de variables”: Consiste en lograr que la ecuación quede escrita con todo lo que dependa de la variable x en un solo miembro, y con todo lo que dependa de la variable y en el otro miembro (esto siempre se podrá lograr en estas EDO).

En nuestro caso: $x^2\cdot(1-y)\,dx=-(1+x)\cdot y^2\,dy$; $\boxed{\frac{x^2}{1+x}\,dx=-\frac{y^2}{1-y}\,dy}$ (1)

(ahora la ecuación puede llamarse “de variables separadas”, pero inicialmente era “de variables separables).

Nota: En el proceso anterior hay que dejar dx y dy multiplicando y cada una acompañando a las funciones de la misma variable. O sea, no poner: $-\frac{1-y}{y^2}\cdot\frac{1}{dy}=\frac{1+x}{x^2}\cdot\frac{1}{dx}$

Ahora integramos ambos miembros de (1) por separado e igualamos los resultados de ambas integrales:

1ª integral: $\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+ln|x+1|+C_1$

2ª integral: $\int -\frac{y^2}{1-y}dy = \int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy = \frac{y^2}{2} + y + ln|y-1| + C_2$

Igualamos y ponemos una sola constante (que es la diferencia de las dos anteriores):

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - x + ln|x+1| = \frac{y^2}{2} + y + ln|y-1| + C}$$

Y esta es la "solución general" de la EDO de variables separables dada.

Nota: Las respuestas dadas en los libros de texto a ejercicios de hallar "soluciones generales" de EDO, como el que acabamos de hacer o los de otros tipos, suelen estar en una forma lo más corta posible, con lo cual se dificulta muchas veces la comparación de esas respuestas con los resultados que hayamos obtenido al aplicar los procedimientos dados para cada tipo. Así, en este caso, podríamos ver la respuesta como $\frac{x^2-y^2}{2} - (x+y) + ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right| = C$, siendo fácil comprobar que es la misma de antes. Pero también podríamos encontrar la respuesta como la anterior multiplicada por 2, así: $x^2 - y^2 - 2x - 2y + ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$, donde se ha sustituido $2C$ por C (lo que importa es que aparezca una constante cualquiera en el segundo miembro, dando igual llamarla $2C$ o C). O también podríamos encontrarnos la respuesta como $\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C \cdot e^{y^2-x^2+2x+2y}$, con $C > 0$ (esta constante positiva representa el resultado de e^C con la C anterior).
Y en otros muchos casos, la nueva forma de la respuesta encontrada en el texto proviene posiblemente de hacer una o varias transformaciones a la que se obtiene inicialmente por aplicación del método dado para cada tipo de EDO, con lo cual costará darse cuenta que son equivalentes. En particular, esto sucede muchas veces con las respuestas trigonométricas, ya que pueden haberse aplicado a las mismas diferentes identidades trigonométricas que las transforman mucho.

Ahora, siguiendo con el ejemplo anterior, si nos pidiesen la "solución particular" que pase por el punto $(-2\ ,\ 2)$, o bien que cumpla la "condición inicial" $\boxed{y(-2) = 2}$, calcularíamos el valor correspondiente de la constante C sustituyendo en la "solución general" obtenida $x = -2$ junto con $y = 2$, para luego despejar el valor de C: $2 + 2 + ln|-1| = 2 + 2 + ln|1| + C$, luego $\boxed{C = 0}$.
Por tanto, dicha "solución particular" será:

$$\boxed{(x^2/2) - x + ln|x+1| = (y^2/2) + y + ln|y-1|}$$

que también puede escribirse de varios modos.

---

2) ECUACIONES HOMOGÉNEAS:

Su forma típica es $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$, **con la particularidad de que las funciones $\boldsymbol{P(x,y)}$ y $\boldsymbol{Q(x,y)}$ sean "funciones homogéneas" del "mismo orden"**.

Nota: Se dice que una función $f(x,y)$ es "homogénea de orden k", si y sólo si se cumple $\boxed{f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)}$, para cualquier $t > 0$, siendo k es un cierto número real fijo.

Ejemplos: $2x^3 - 3xy^2 + 7y^3$ es función homogénea de orden 3 ; $\sqrt{3x-2y}$ es función homogénea de orden $1/2$; $\frac{3}{x^2+y^2}$ es función homogénea de orden -2 ; $cos\left(\frac{x}{y}\right)$ es función homogénea de orden cero.

Ejemplos de ecuaciones homogéneas:

1) $\boxed{(4x-3y)\,dx+(2y-3x)\,dy=0}$, que está en la forma típica, con $P(x,y)\equiv 4x-3y$ (homogénea de orden 1) y con $Q(x,y)\equiv 2y-3x$ (también homogénea de orden 1).

2) $\boxed{y'=\frac{2x}{3x^2-y^2}}$, que no está en la forma típica que hemos dado (aunque sí está en otra forma típica muy usada que es $\boldsymbol{y'=f(x,y)}$**, con** $\boldsymbol{f(x,y)}$ **homogénea de orden cero**). Nosotros preferimos la otra forma dada, a la cual se llega sustituyendo y' por dy/dx, multiplicando por dx y por $3x^2-y^2$, para luego poner todo en un solo miembro, obteniendo:

$$\boxed{2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy=0}$$

Por tanto, es $P(x,y)\equiv 2xy$ (homogénea de orden 2) y $Q(x,y)\equiv y^2-3x^2$ (también homogénea de orden 2).

3) $\boxed{x\cdot y'=y+\sqrt{y^2-x^2}}$, que no está en la forma típica. Sustituyendo y' por dy/dx, multiplicando todo por dx y ordenando, queda: $\boxed{\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)dx+x\,dy=0}$. En esta EDO tenemos $P(x,y)\equiv y-\sqrt{y^2-x^2}$ (homogénea de orden 1, como podemos comprobar) y $Q(x,y)\equiv x$ (también homogénea de orden 1).

MODO DE RESOLUCIÓN:

Estas ecuaciones se reducen a ecuaciones del tipo anterior (variables separables), mediante el cambio de función incógnita dado por $\boxed{\frac{y}{x}=u}$, de modo que la nueva ecuación obtenida queda con la nueva función incógnita u y con la misma variable independiente x. Una vez hallada la “solución general” de la de variables separables, se deshace el cambio efectuado, obteniéndose la “solución general” de la ecuación homogénea dada.

Lo veremos con un ejemplo. $\boxed{\text{En otros casos, se procede de modo análogo}}$.

Hallar la solución general de la EDO: $\boxed{\left(x-y\cdot cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cdot cos\frac{y}{x}\,dy=0}$ $(x>0)$

Vemos que es una EDO de primer orden y de primer grado, porque está en la forma típica $P\,dx+Q\,dy=0$.

Ahora veamos si las funciones P y Q son homogéneas del mismo orden:

$$P(tx,ty)=tx-ty\cdot cos\frac{ty}{tx}=tx-ty\cdot cos\frac{y}{x}=t\cdot\left(x-y\cdot cos\frac{y}{x}\right)=t^1\cdot P(x,y)$$

luego $P(x,y)$ es función homogénea de orden $k=1$.

$$Q(tx,ty)=tx\cdot cos\frac{ty}{tx}=tx\cdot cos\frac{y}{x}=t\cdot\left(x\cdot cos\frac{y}{x}\right)=t^1\cdot Q(x,y)$$

luego $Q(x,y)$ es función homogénea de orden $k=1$.

Por tanto, la EDO dada es homogénea (de orden 1).

Para resolverla, empezamos dividiendo ambos miembros de la ecuación por x^1 (si las funciones P y Q hubiesen sido homogéneas de orden k, dividiríamos ambos miembros de la ecuación por x^k; esto se hace para facilitar el cambio $\frac{y}{x}=u$), con lo cual queda:

$$\boxed{\left(1-\frac{y}{x}\cdot cos\frac{y}{x}\right)dx+cos\frac{y}{x}\,dy=0}\qquad (x>0)$$

Así escrita la EDO, aplicamos el cambio de variable $\boxed{\frac{y}{x}=u}$, o sea $y=x\cdot u$, que nos determina $\boxed{dy=x\,du+u\,dx}$. (Esto quiere decir que donde veamos $\frac{y}{x}$ debemos poner u, y donde esté dy debemos poner $x\,du+u\,dx$). Así nos queda:

$$(1 - u \cdot \cos u)\, dx + \cos u \cdot (x\, du + u\, dx) = 0$$

operando: $(1 - u \cdot \cos u)\, dx + x \cdot \cos u\ du + u \cdot \cos u\ dx = 0$

y simplificando: $\boxed{dx + x \cdot \cos u\ du = 0}$

que es una ecuación de variables separables (a dx le acompaña $1 \cdot 1$ y a du le acompaña $x \cdot \cos u$).

Vamos a obtener su "solución general" como explicamos en el caso anterior:

Separamos las variables y se tiene $\boxed{\frac{dx}{x} = -\cos u\, du}$ $(x > 0)$

Integrando ambos miembros resulta $\boxed{\ln x = -\operatorname{sen} u + C}$, que es su "solución general".

Finalmente, deshacemos el cambio de variable que habíamos hecho y se tiene

$$\boxed{\ln x = -\operatorname{sen} \frac{y}{x} + C}$$

que es la "solución general" de la ecuación homogénea dada.

Ahora, si nos pidiesen la "solución particular" que pase por el punto $(2\ , \pi)$, o bien que cumpla la "condición inicial" $y(2) = \pi$, sustituimos en la anterior "solución general" $x = 2$ e $y = \pi$, para luego despejar C: $\ln 2 = -\operatorname{sen}(\pi/2) + C$, de donde $\boxed{C = 1 + \ln 2}$. Por tanto, la "solución particular" pedida será: $\boxed{\ln x = -\operatorname{sen} \frac{y}{x} + 1 + \ln 2}$

---

3) ECUACIONES LINEALES:

Su forma típica es $\boldsymbol{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$: La variable dependiente aparece sólo una vez, multiplicando a una cierta función $P(x)$ y separada de la derivada y' que aparece sola en otro término del primer miembro; en el segundo miembro aparece otra función $Q(x)$. Se llaman "lineales" por ser de primer grado en y e y'.

Un ejemplo que no está en la forma típica es $\boxed{(3x^2 - 2y)\, dx + (x + 1)\, dy = 0}$, pero al dividir por dx se tiene $3x^2 - 2y + (x + 1)y' = 0$ (nótese que es de primer grado en y e y'). Ahora puede ponerse en su forma típica reordenando así $(x + 1)y' - 2y = -3x^2$, para luego dividir ambos miembros por $(x + 1)$: $\boxed{y' - \frac{2}{x+1} \cdot y = -\frac{3x^2}{x+1}}$ (aquí la función $P(x)$ sería $-\frac{2}{x+1}$, mientras que la función $Q(x)$ es $-\frac{3x^2}{x+1}$).
(Obsérvese que la EDO dada no es de variables separables porque $3x^2 - 2y$ no puede ponerse como un producto de la forma $f(x) \cdot g(y)$, pero podría haberlo sido, pues muchas veces una misma EDO es a la vez de varios de los tipos señalados).

Precisamente, conviene indicar que si el segundo miembro de una ecuación lineal es la función cero, la ecuación también es de variables separables, luego puede resolverse de dos modos diferentes (como EDO lineal y como EDO de variables separables).

Ejemplos:

1) $\boxed{y' - 2xy = 2x \cdot e^{x^2}}$, está en la forma típica, con $P(x) \equiv -2x$ y $Q(x) \equiv 2x \cdot e^{x^2}$.

2) $\boxed{y' = cos\, x \cdot (-y + sen\, x)}$, no está en la forma típica. Operando en el segundo miembro y pasando $-y \cdot cos\, x$ al primer miembro, la tenemos como: $\boxed{y' + y \cdot cos\, x = cos\, x \cdot sen\, x}$. Aquí es $P(x) \equiv cos\, x$ y $Q(x) \equiv cos\, x \cdot sen\, x$.

3) $\boxed{(x+1)\, dy - [2y + (x+1)^4]\, dx = 0}$, que está lejos de la forma típica, pero vemos que es de primer grado en y e y'. Dividimos todo por dx y se tiene $(x+1) \cdot y' = 2y + (x+1)^4$, o bien $(x+1) \cdot y' - 2y = (x+1)^4$. Dividiendo todo finalmente por $x+1$, se llega a la forma típica: $\boxed{y' - \frac{2}{x+1} \cdot y = (x+1)^3}$. Aquí es $P(x) \equiv -2/(x+1)$ y $Q(x) \equiv (x+1)^3$.

MODO DE RESOLUCIÓN:

Una ecuación de este tipo se resuelve siempre multiplicando su forma típica por una función, llamada "factor integrante", que representamos por $\mu(x)$ (al multiplicar la EDO por $\mu(x)$, ya puede resolverse fácilmente por integración).

El "factor integrante" responde a la siguiente expresión:

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}}$$

(donde, en la integral indefinida que aparece en el exponente, se toma la constante de integración igual a cero, porque queremos un solo factor integrante). Obsérvese que es fundamental que conozcamos $P(x)$, para lo cual tenemos que conocer la forma típica de la EDO lineal que queramos resolver.

Hallado $\mu(x)$, se multiplican ambos miembros de la EDO por este factor, teniéndose:

$$\boxed{y' \cdot \mu(x) + P(x) \cdot y \cdot \mu(x) = Q(x) \cdot \mu(x)}$$

Pero el primer miembro de esta nueva ecuación es exactamente la derivada del producto $y \cdot \mu(x)$. En efecto,

$$\frac{d}{dx}[y \cdot \mu(x)] = y' \cdot \mu(x) + y \cdot \mu'(x) = y' \cdot \mu(x) + y \cdot \mu(x) \cdot P(x)$$

pues la derivada de la exponencial $\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}$ es ella misma, $\mu(x)$, por la derivada de su exponente, que es $P(x)$.

Por tanto, podemos escribir la EDO dada así: $\boxed{\frac{d}{dx}[y \cdot \mu(x)] = Q(x) \cdot \mu(x)}$

De donde resulta: $y \cdot \mu(x) = \int Q(x) \cdot \mu(x)\, dx \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \int Q(x) \cdot \mu(x)\, dx}$

Que es la "solución general" en forma explícita, donde la constante de integración de esta última integral es el parámetro real C que tiene que aparecer en la misma.

Veamos lo anterior en un ejemplo. En otros casos, se procede de modo análogo.

Hallar la "solución general" de la EDO: $\boxed{2xy' - y = 3x^2}$ $(x > 0)$

Vemos que es una EDO de primer orden y de primer grado (porque es de primer grado en y'). Pero también es de primer grado en ambas variables y e y'. Por tanto, la ecuación es lineal.

Nota: Si la ecuación fuese por ejemplo $y \cdot y' = 4$, sería de primer grado en y', sería también de primer grado en y, pero sería de grado 2 en ambas funciones (con lo cual esta ecuación no es lineal).

Pero vemos que la ecuación dada no está en su forma típica. Por tanto, operamos para ponerla en esa forma antes de resolverla.
Dividiendo ambos miembros por $2x$, resulta: $\boxed{y' - \frac{1}{2x} \cdot y = \frac{3x}{2}}$

El factor integrante es entonces: $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{2x} dx} = e^{-\frac{1}{2} \cdot \ln x} = e^{\ln(x^{-1/2})} = x^{-1/2}$

(al resolver la integral, hemos puesto $\ln x$ en vez de $\ln|x|$ pues nos han dicho al principio que x es positivo; en caso de que fuese x negativo, la integral sería $\ln(-x)$ y el factor integrante sería $(-x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{-x}}$).

Multiplicando entonces la ecuación anterior por $x^{-1/2}$: $\boxed{y' \cdot x^{-1/2} - \frac{1}{2} x^{-3/2} \cdot y = \frac{3}{2} x^{1/2}}$

con lo cual el primer miembro es la derivada del producto $y \cdot \mu(x) = y \cdot x^{-1/2}$.

Por tanto, podemos escribir: $y \cdot x^{-1/2} = \int \frac{3}{2} x^{1/2}\,dx = x^{3/2} + C$

Conclusión: La "solución general" de la EDO en forma explícita es:

$$\boxed{y = x^{1/2} \cdot \left(x^{3/2} + C\right) = x^2 + C\sqrt{x}}$$

Si, por ejemplo, nos interesase la "solución particular" que pasa por el punto (4 , 1), sustituiríamos en la "solución general" anterior x por 4 e y por 1: $1 = 16 + 2C$, de donde $\boxed{C = -15/2}$.
Con lo cual, la "solución particular" que interesaría es: $\boxed{y = x^2 - (15/2) \cdot \sqrt{x}}$

---

4) ECUACIONES DE BERNOULLI (los hermanos Bernoulli fueron matemáticos suizos famosos de los siglos XVII Y XVIII).

Su forma típica es $\boldsymbol{y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^k}$ (siendo k en cierto número real diferente de cero y diferente de 1, pues si es $k = 0$ la ecuación será lineal y si es $k = 1$ podremos agrupar en uno solo los términos $P(x) \cdot y$ y $Q(x) \cdot y$, quedando la EDO así $y' + [P(x) - Q(x)] \cdot y = 0$, que vuelve a ser lineal pero con segundo miembro cero, por lo cual también es de variables separables).

Ejemplos:

1) $\boxed{y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 \cdot y^2}$, donde $P(x) \equiv 1/(x+1)$ y $Q(x) \equiv -\frac{1}{2}(x+1)^3$, con $k = 2$.

2) $\boxed{3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}}$, que no está en su forma típica. Dividiendo todo por $3x$ tenemos ya la forma típica: $\boxed{y' - \frac{2}{3x} \cdot y = \frac{x^2}{3} \cdot y^{-2}}$, donde $P(x) \equiv -2/3x$ y $Q(x) \equiv x^2/3$, con $k = -2$.

3) $\boxed{2y' \cdot sen\,x + y \cdot cos\,x = y^3 \cdot (x \cdot cos\,x - sen\,x)}$, que tampoco está en forma típica. Dividiendo todo por $2 \cdot sen\,x$, tenemos: $\boxed{y' + \frac{cos\,x}{2 \cdot sen\,x} \cdot y = \left(\frac{x \cdot cos\,x - sen\,x}{2 \cdot sen\,x}\right) \cdot y^3}$, donde $P(x) \equiv \frac{cos\,x}{2 \cdot sen\,x}$ y $Q(x) \equiv \frac{x \cdot \cos x - sen\,x}{2 \cdot sen\,x}$, con $k = 3$.

MODO DE RESOLUCIÓN:

Estas ecuaciones se reducen a ecuaciones del tipo anterior (lineales), mediante un cambio de función incógnita. Y una vez hallada la "solución general" de la ecuación lineal obtenida, se deshace el cambio efectuado teniéndose la "solución general" de la ecuación de Bernoulli dada.

Lo veremos con un ejemplo. En otros casos, se procede de modo análogo.

Hallar la "solución general" de la EDO: $\boxed{y' + xy = x^3 y^3}$

Vemos que es una EDO de primer orden y de primer grado (es de primer grado en y'), y además está en la forma típica mencionada al principio ($P(x) \equiv x$ y $Q(x) \equiv x^3$, con $k = 3$). Por tanto, es una ecuación de Bernoulli.
Multiplicamos ambos miembros por y^{-3} (en general sería por y^{-k}) para que quede solamente $Q(x)$ en el segundo miembro de la nueva ecuación. Se tiene:

$$\boxed{y^{-3} \cdot y' + x \cdot y^{-2} = x^3}$$

Ahora efectuamos el cambio de función incógnita dado por $\boxed{y^{-2} = u}$ (en general sería $y^{-k+1} = u$). Del cual se deduce que $-2 \cdot y^{-3} \cdot y' = u'$. Observamos que en la ecuación anterior había quedado el producto $y^{-3} \cdot y'$, luego se podrá sustituir por $u'/(-2)$. Por tanto, la nueva ecuación en las variables u y x será: $\boxed{-\frac{u'}{2} + x\,u = x^3}$ (lineal, aunque no en forma típica).

Ponemos la anterior ecuación lineal en su forma típica multiplicándola por -2, y queda:

$$\boxed{u' - 2x \cdot u = -2x^3}$$

Obsérvese que la nueva función $P(x)$ es $-2x$ (es la importante a partir de ahora), que no coincide con la función $P(x)$ de la ecuación dada.

El factor integrante es: $\boxed{\mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}}$ (se usa la función $P(x)$ de la lineal)

Entonces, multiplicamos todo por e^{-x^2} y queda:

$$\boxed{e^{-x^2} \cdot u' - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot u = -2x^3 \cdot e^{-x^2}}$$

El primer miembro es la derivada del producto $\mu(x) \cdot u = e^{-x^2} \cdot u$, luego podemos escribir:

$$\boxed{e^{-x^2} \cdot u = \int -2x^3 \cdot e^{-x^2}\, dx}$$

Calculamos la integral mediante el cambio de variable $-x^2 = t$, de donde $-2x\,dx = dt$, con lo cual la integral pasa a ser $-\int t \cdot e^t dt$, la cual se resuelve aplicando el método de integración por partes, resultando $e^t(1-t) + C$. Ahora, deshaciendo el cambio, la integral nos da finalmente $\boxed{e^{-x^2}(x^2+1) + C}$.

Por tanto, hemos llegado a: $e^{-x^2} \cdot u = e^{-x^2}(x^2+1) + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = x^2 + 1 + C \cdot e^{x^2}}$

que es la "solución general" de la ecuación lineal.

Y, deshaciendo el cambio inicial $y^{-2} = u$, se tiene finalmente: $\boxed{y^{-2} = C \cdot e^{x^2} + x^2 + 1}$

que es la "solución general" de la EDO de Bernoulli dada.

Y si quisiésemos la "solución particular" que pase por el punto (0 , 2), sustituimos en la anterior "solución general" x por 0 e y por 2, con lo cual: $1/4 = C + 1$, de donde resulta $\boxed{C = -3/4}$.
Entonces dicha "solución particular" será: $\boxed{y^{-2} = (-3/4) \cdot e^{x^2} + x^2 + 1}$

---

5) ECUACIONES EXACTAS

Su forma típica es $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$ **, con la particularidad de que se cumpla la llamada "condición de exactitud":** $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Esta condición de exactitud lo que nos dice es que la expresión $P\,dx + Q\,dy$ del primer miembro de la EDO, **es exactamente la diferencial de una cierta función de dos variables**. O sea, que hay una cierta función $F(x,y)$ tal que $\boxed{dF = P\,dx + Q\,dy}$, con lo cual será $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = P}$ y $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = Q}$.
Esto se demuestra matemáticamente y nosotros recordaremos en el próximo ejemplo cómo se halla función $F(x,y)$ (procedimiento visto en la Sección 7.3, pues las integrales curvilíneas de las expresiones $Pdx + Qdy$, cuando se cumpla la condición de exactitud, no dependerán del arco de curva plana que se utilice entre dos puntos A y B y darán $F(B) - F(A)$).

Pues bien, la "solución general" de la EDO exacta $Pdx + Qdy = 0$ dada será: $\boxed{F(x,y) = C}$

Ejemplos:

1) $\boxed{(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0}$, es exacta pues $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$.

2) $\boxed{\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy}$, no está en la forma típica, pero ésta se obtiene pasando todo al primer miembro de la ecuación. Así tenemos $P(x,y) = 2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}$, con lo cual $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$, y tenemos $\boxed{Q(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}}$, con lo cual $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$. Por tanto, es una EDO exacta.

3) $\boxed{\left(\frac{sen\,2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{se\ \ ^2x}{y^2}\right)dy = 0}$, es exacta pues:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{sen\,2x}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2 \cdot sen\,x \cdot cos\,x}{y^2} = -\frac{sen\,2x}{y^2}$$

MODO DE RESOLUCIÓN:

Se trata de hallar una función $F(x,y)$ que cumpla $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)}$ y $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)}$, con lo cual la "solución general" de la EDO será $\boxed{F(x,y) = C}$, como hemos dicho.

Entonces, si queremos que $F(x,y)$ cumpla la condición $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$, tendrá que ser:

$$\boxed{F(x,y) = \int P(x,y)\, dx + f(y)} \quad (1)$$

donde la integral es en la variable x, arrastrando la variable y como si fuese una constante (como en el proceso de derivar parcialmente respecto a x, pero integrando parcialmente respecto a x). La constante de integración se pone entonces como una función desconocida de y (ya que y actúa como una constante). Así se cumple obviamente la condición $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$.
Ahora, a partir de la expresión (1) de $F(x,y)$ obtenida anteriormente, hallaríamos $\frac{\partial F}{\partial y}$ y la igualaremos con Q, para que se cumpla la otra condición $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$. Veremos entonces que esto permite determinar $f'(y)$. E integrando esta función, conoceremos $f(y)$ (hasta ahora desconocida).

Conclusión: Al conocer $f(y)$, la sustituimos en la expresión (1) de $F(x,y)$, con lo cual esta función de dos variables ya se conoce y la "solución general" de la EDO exacta será $\boxed{F(x,y) = C}$.

Nota: La integración realizada para conocer $f(y)$ a partir de $f'(y)$ incluye una constante que quedará en F, con lo cual vemos que esta función no es única. Pero podemos darle a esa constante el valor cero, para tener solamente una de las funciones $F(x,y)$ que nos interesan, pues con eso basta (lo mismo se consigue igualando a cero la función $F(x,y)$ con la constante de integración incluida, pues podemos pasarla al segundo miembro).

Veamos lo anterior en un ejemplo. En otros casos, se procede de modo análogo.

Hallar la "solución general" de la EDO:

$$\boxed{\left(sen\, y + y \cdot senx + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cdot cos\, y - cos\, x + \frac{1}{y}\right) dy = 0}$$

Vemos que es una EDO de primer orden y de primer grado, porque está en la forma típica $P\, dx + Q\, dy = 0$. Además, $P_y = cos\, y + sen\, x$ mientras que $Q_x = cos\, y + sen\, x$. Por tanto, se cumple la "condición de exactitud" y entonces es una EDP exacta.

Vamos a hallar una función $F(x,y)$ tal que $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = P}$ y $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = Q}$:
Antes explicamos que se puede poner:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\, dx + f(y) = \int \left(sen\, y + y \cdot sen\, x + \frac{1}{x}\right) dx + f(y)$$

O sea: $\boxed{F(x,y) = x \cdot sen\, y - y \cdot cos\, x + ln|x| + f(y)}$ (con $f(y)$ todavía desconocida)

Comprobación de que vamos bien: $\frac{\partial F}{\partial x} = sen\, y + y \cdot sen\, x + \frac{1}{x} = P(x,y)$

Ahora hallamos $\frac{\partial F}{\partial y}$ e igualamos con la $Q(x,y)$ dada:

$$\boxed{x \cdot cos\, y - cos\, x + f'(y) = x \cdot cos\, y - cos\, x + \frac{1}{y}}$$

Y simplificando resulta $\boxed{f'(y) = \frac{1}{y}}$, con lo cual: $\boxed{f(y) = \int \frac{1}{y}\, dy = ln|y| + K}$

Sustituyendo esta $f(y)$ encontrada en la expresión inicial de $F(x,y)$, se tiene:

$$\boxed{F(x,y) = x \cdot sen\, y - y \cdot cos\, x + ln|x| + ln|y| + K}$$

Ahora tomamos $K = 0$, con lo cual tendremos una de las infinitas $F(x,y)$ posibles, y la igualamos a una constante arbitraria C, o bien igualamos directamente a cero la $F(x,y)$ obtenida (que ya lleva la constante arbitraria K, con lo cual $C = -K$).

Entonces, la "solución general" de la EDO exacta es:

$$\boxed{x \cdot sen\, y - y \cdot cos\, x + ln|x \cdot y| = C}$$

Si quisiésemos la "solución particular" que cumple la "condición inicial" $y(\pi) = \pi$, sustituiríamos en la "solución general" anterior $x = \pi$ e $y = \pi$, despejando el valor de C de la expresión obtenida $\pi \cdot sen\, \pi - \pi \cdot cos\, \pi + ln(\pi^2) = C$, de donde resulta $\boxed{C = \pi + 2\, ln\, \pi}$. Por tanto, esa "solución particular" será:

$$\boxed{x \cdot sen\, y - y \cdot cos\, x + ln|x \cdot y| = \pi + 2\, ln\, \pi}$$

que define a y como función de x en forma implícita (como ocurre con muchas soluciones de las EDO, salvo el caso de las EDO lineales cuyas "soluciones generales" se pueden dar siempre en forma explícita).

---

6) ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS:

Su forma típica es $\boldsymbol{P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0}$ **, con la particularidad de no ser exacta (por tanto, no se cumplirá la "condición de exactitud"), pero supondremos que se cumple al menos una de las siguientes condiciones**:

a) $\boxed{\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)}$ (el cociente simplificado es una función sólo de x)

b) $\boxed{\frac{Q_x - P_y}{P} = g(y)}$ (el cociente simplificado es una función sólo de y)

Si se cumple la condición a), la EDO admite un "factor integrante" que es función solamente de x. Dicho factor será: $\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)\, dx}}$

Y si se cumple la condición b), la EDO admite un "factor integrante" que es función solamente de y. Dicho factor será: $\boxed{\mu(y) = e^{\int g(y)\, dy}}$

Se demuestra que, en cualquiera de los dos casos, al multiplicar la EDO por el factor integrante obtenido, resulta una EDO exacta.

Ejemplos:

1) $\boxed{(1 - x^2 y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0}$, donde $P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ y $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2$, con lo cual no es exacta (estas derivadas parciales son diferentes). Pero se cumple

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2xy+2\;\;{}^{2}}{x^2(y-x)} = \frac{-2x(y-x)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}$$

luego la EDO admite un "factor integrante" que es función sólo de x.

2) $\boxed{(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0}$, donde $P_y=\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ y $Q_x=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$, con lo cual la EDO <u>no es exacta</u> (estas derivadas parciales son diferentes). Pero se cumple $\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{4y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$, luego <u>admite un "factor integrante" que es función sólo de x</u> (será el mismo del ejemplo anterior).

3) $\boxed{2xy\cdot\ln y\;dx+\left(x^2+y^2\cdot\sqrt{y^2+1}\right)dy=0}$, donde $P_y=2x\cdot(1+\ln y)$ y $Q_x=2x$, con lo cual la EDO <u>no es exacta</u> (estas derivadas parciales son diferentes). Pero se cumple $\frac{Q_x-P_y}{P}=\frac{-2x\cdot\ln y}{2xy\cdot\ln y}=-\frac{1}{y}$, luego <u>la EDO admite un "factor integrante" que es función sólo de y</u>.

MODO DE RESOLUCIÓN:

Una vez comprobado que la EDO no es exacta, miramos si se cumple la condición a), para lo cual hay que intentar simplificar el cociente $\left(P_y-Q_x\right)/Q$, de modo que quede solamente la variable x. <u>Si se cumple a) calculamos el factor integrante $\mu(x)$</u>. <u>Y si no se cumple a) miraremos si se cumple la condición b)</u>. <u>Al cumplirse b) calcularemos el factor integrante $\mu(y)$</u>. (Si no se cumplen a) ni b), la EDO tendrá posiblemente un factor integrante que dependerá de ambas variables x e y, <u>caso que no tratamos</u>). (A veces se cumplen a) y b), con lo cual hay dos factores integrantes de los tipos mencionados, válidos ambos para resolver la EDO).
Ahora, <u>obtenido el factor integrante que sea, multiplicaremos ambos miembros de la EDO dada por dicho factor integrante, resultando una nueva EDO que será exacta</u> (conviene comprobarlo, por si se ha cometido algún error de cálculo). <u>La "solución general" de ésta se obtiene como hemos explicado en el apartado anterior, la cual es también la "solución general" de la EDO dada inicialmente</u>.

<u>Veamos el método en un ejemplo</u>. <u>En otros casos, se procede de modo análogo</u>.

<u>Hallar la solución general de la EDO</u>: $\boxed{(2xy^2-3y^3)\,dx+(7-3xy^2)\,dy=0}$

Vemos que <u>es una EDO de primer orden y de primer grado</u>, porque está en la forma típica $P\,dx+Q\,dy=0$. Además, $P_y=4xy-9y^2$ mientras que $Q_x=-3y^2$, con lo cual <u>la EDO no es exacta</u>. Veamos entonces si cumple alguna de las condiciones a) o b) anteriores:

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{4xy-9\;{}^{2}+3y^2}{7-3xy^2}=\frac{4xy-6\;{}^{2}}{7-3xy^2}\text{ (no podemos simplificar esta fracción)}$$

$$\frac{Q_x-P_y}{P}=\frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}=\frac{2y\cdot(3y-2x)}{-y^2\cdot(3y-2x)}=-\frac{2}{y}\text{ (función sólo de } y\text{)}$$

Por tanto, <u>esta EDO es reducible a exacta, admitiendo un "factor integrante" que depende sólo de la variable y</u>:

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=e^{\ln(|y|^{-2})}=|y|^{-2}=y^{-2}$$

<u>Multiplicamos toda la ecuación dada por el "factor integrante" obtenido</u>:

$$\boxed{(2x-3y)\,dx+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)dy=0}$$

<u>Que debe ser una EDO exacta</u>. La llamamos $\boxed{P_1\,dx+Q_1\,dy=0}$ y se tiene $\frac{\partial P_1}{\partial y}=-3$ mientras que $\frac{\partial Q_1}{\partial x}=-3$. <u>Confirmado que es exacta</u>.

Para hallar su "solución general", buscamos una función $F(x, y)$ tal que $\boxed{F_x = P_1}$ y $\boxed{F_y = Q_1}$.

Entonces: $\boxed{F(x, y) = \int P_1(x, y)\, dx + f(y) = \int (2x - 3y)\, dx + f(y) = x^2 - 3xy + f(y)}$

Con lo cual, $F_y = -3x + f'(y)$. Igualando esta derivada parcial con Q_1, se tiene:

$$\boxed{-3x + f'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(y) = \frac{7}{y^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(y) = \int \frac{7}{y^2}\, dy = -\frac{7}{y} + K}$$

Conclusión: $\boxed{F(x, y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y}}$ (tomando $K = 0$). Con lo cual, la "solución general" de la EDO lineal y de la dada es:

$$\boxed{x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C}$$

Hallemos la "solución particular" que pasa por el punto (1 , 7) (o sea, que cumple la "condición inicial $y(1) = 7$). Para ello sustituimos en la "solución general" anterior x por 1 e y por 7, obteniendo el valor de C que corresponde a esta "solución particular": $1 - 21 - 1 = C$, luego será $\boxed{C = -21}$. Por consiguiente, la "solución particular" que queremos será:

$$\boxed{x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = -21}$$

Vamos en esta ocasión a comprobar la "solución general" obtenida (e igual podríamos haber hecho en todos las ejemplos resueltos anteriormente):

La EDO dada era $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$, o bien

$$\boxed{(2xy^2 - 3y^3) + (7 - 3xy^2) \cdot y' = 0}$$

La "solución general" obtenida, que es $\boxed{x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C}$, que define a y como función de x solamente en forma implícita (no puede despejarse y de la anterior expresión) y, por tanto, la derivada y' tendrá que obtenerse por derivación implícita de la expresión anterior, despejando luego el valor de y' que resultará función de x e y. Se tiene:

$$2x - 3 \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') + \frac{7}{y^2} \cdot y' = 0 \;; \qquad 2x - 3y - 3xy' + \frac{7}{y^2} \cdot y' = 0$$

$$y' \cdot \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right) = 3y - 2x \;; \qquad y' = \frac{3y - 2x}{\frac{7}{y^2} - 3x} \;; \qquad y' = \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2}$$

Entonces, al sustituir esta expresión de y' en la EDO se obtiene:

$$2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2) \cdot \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2} = 0 \text{ , que es la identidad } \boxed{0 = 0}$$

Pero vemos que esto se cumple para todo valor de C, lo cual demuestra que **todas las infinitas funciones incluidas en la "solución general" obtenida, son efectivamente "soluciones particulares" de la EDO**.

Con lo cual, la "solución particular" que habíamos obtenido anteriormente también cumplirá la EDO y, obviamente, también cumplirá la "condición inicial" $y(1) = 7$ porque obtuvimos el valor de la contante C correspondiente para que esto ocurriese. En efecto, esa "solución particular" era

$$x^2 - 3xy - \left(\frac{7}{y}\right) = -21$$

y al sustituir x por 1 e y por 7, se tiene $1 - 21 - 1 = -21$ que es la identidad $-21 = -21$.
