

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

(Prerrequisitos: Ecuaciones diferenciales ordinarias básicas. Complemento de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas de ecuaciones lineales)

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n se llama “lineal” cuando pueda adoptar una expresión de la forma siguiente:

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_3(x) \cdot y''' + a_2(x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

donde las funciones $a_i(x)$ (para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) son funciones reales de una variable real, siendo la función $a_n(x)$ diferente de la función constante cero y donde $b(x)$ es otra función real de variable real cualquiera. O sea, la ecuación es de primer grado en la función incógnita y en todas su derivadas sucesivas hasta la de orden n inclusive.

En los casos en que la función $b(x)$ del segundo miembro sea la función constante cero, la EDO se llama “lineal homogénea”.

Un caso particularmente importante corresponde a que todas las funciones $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_3(x), a_2(x), a_1(x)$ y $a_0(x)$ sean contantes reales (con $a_n \neq 0$). Se llaman “ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes”. A su vez, las hay “homogéneas” y “no homogéneas” (también llamadas “completas”), según sea la función $b(x)$ del segundo miembro.

Y dentro de las que tienen coeficientes variables, son importantes unas que veremos más adelante, llamadas “ecuaciones de Euler - Cauchy”, las cuales se caracterizan porque cada coeficiente es una cierta constante real multiplicada por una potencia del tipo $(mx + n)^p$, con m y n reales fijos, donde p coincide con el orden de la derivada que acompaña a ese coeficiente. Es decir, tienen la forma:

$$a_n(mx + n)^n y^{(n)} + a_{n-1}(mx + n)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2(mx + n)^2 y'' + a_1(mx + n) y' + a_0 y = b(x)$$

con $a_n \neq 0$ y $m \neq 0$.

Recordamos ahora que la “solución general” de una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una familia n -paramétrica de funciones, de la forma $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ o bien en forma explícita $y = F(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, de forma que cada función de esta familia, obtenida dándole valores reales cualesquiera (a veces con algunas limitaciones) a las n constantes, sea una “solución particular” de la EDO (es decir, la ecuación se convertirá en una identidad cuando sustituamos en ella esa función y todas sus derivadas).

En las aplicaciones prácticas interesan solamente ciertas “soluciones particulares”, que podrán hallarse por métodos numéricos directos o bien determinándolas a partir de las “soluciones generales” correspondientes, imponiendo ciertas condiciones. Entre ellas, destacan las llamadas “condiciones iniciales”, de la forma

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1, y''(a) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

(n condiciones en total, para determinar los valores de las n constantes C_1, C_2, \dots, C_n que correspondan a la solución particular que interese).

Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

Estas ecuaciones se resuelven hallando por un lado la “solución general” de la correspondiente ecuación homogénea (que resulta de poner la función cero en el segundo miembro, cuando la

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

dada no lo sea) y por otro lado hallando una única “solución particular” de la ecuación completa dada (si se trata de este caso). Por tanto:

Si y_H es la “solución general” de la EDO lineal homogénea asociada e y_C es la “solución particular” hallada para la EDO lineal completa, es $y = y_C + y_H$ la “solución general” de la ecuación lineal completa.

SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES:

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0} \quad (a_n \neq 0)$$

Se llama “ecuación característica” asociada a la EDO anterior, a la ecuación polinómica de grado n siguiente:

$$\boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

Nos referiremos a ella en forma resumida como $\boxed{P(\lambda) = 0}$.

TEOREMA FUNDAMENTAL:

1) Si $\boxed{\lambda = p}$ es una solución real de multiplicidad m de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, las m funciones e^{px} , $x \cdot e^{px}$, $x^2 \cdot e^{px}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{px}$ serán “soluciones particulares” linealmente independientes de la EDO lineal homogénea.

2) Si $\boxed{\lambda = a + bi}$ y $\boxed{\lambda = a - bi}$ son soluciones imaginarias conjugadas de multiplicidad m de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, las $2m$ funciones
 $e^{ax} \cdot \cos bx$ y $e^{ax} \cdot \sen bx$; $x \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$ y $x \cdot e^{ax} \cdot \sen bx$;
 $x^2 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$ y $x^2 \cdot e^{ax} \cdot \sen bx$; \dots ; $x^{m-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$ y $x^{m-1} \cdot e^{ax} \cdot \sen bx$
son “soluciones particulares” linealmente independientes de la EDO lineal homogénea.

Observaciones:

1) Ser “linealmente independientes” significa que ninguna puede ser obtenida mediante una combinación lineal de las demás (o sea, ninguna puede ser el resultado de multiplicar las demás por ciertas constantes y sumarlas).

2) Hay tantas “soluciones particulares” linealmente independientes de la EDO como raíces totales tenga la ecuación característica, contando cada una tantas veces como indique su posible multiplicidad, pues las soluciones que correspondan a raíces diferentes son siempre linealmente independientes: Por cada raíz real simple (no repetida), tendremos una solución particular. Por cada dos soluciones imaginarias conjugadas simples (no repetidas) tendremos dos soluciones particulares independientes. Si una raíz real es doble (aparece dos veces), habrá dos soluciones particulares independientes. Etc... Si dos soluciones imaginarias conjugadas son dobles (aparecen dos veces), habrá cuatro soluciones particulares independientes. Etc...

3) Como la ecuación característica es de grado n , habrá un total de n raíces, entre reales e imaginarias conjugadas, contando cada una tantas veces como indique su multiplicidad. Por tanto, siempre tendremos un número total de n “soluciones particulares” linealmente independientes de la EDO lineal homogénea de orden n .

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Ahora damos otro Teorema de gran importancia, relacionado con el Álgebra Lineal:

TEOREMA: El conjunto de todas las “soluciones particulares” de una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes, de orden n , es un “espacio vectorial de dimensión n ”. Esto quiere decir que cualquier conjunto de n “soluciones particulares” linealmente independientes del espacio, es “una base” de dicho espacio; o sea, que si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son n “soluciones particulares” linealmente independientes e $y_H(x)$ es cualquier “solución particular” dada de la EDO, podrá siempre escribirse $y_H(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n \cdot y_n(x)$, donde C_1, C_2, \dots, C_n son ciertos valores reales (únicos para cada $y_H(x)$ elegida, de modo que valores distintos de esas constantes corresponderán siempre a “soluciones particulares” diferentes).

Y damos una consecuencia inmediata o Corolario de este Teorema.

COROLARIO: La “solución general” de una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n puede darse como $y_H = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n$, siendo las funciones y_1, y_2, \dots, y_n las n “soluciones particulares” asociadas a las n raíces de la correspondiente ecuación característica $P(\lambda) = 0$ (incluida cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad).

Ejemplos:

1) Hallar la solución general de $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

La ecuación característica correspondiente es $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$, que tiene tres raíces reales simples: 0, 3 y -1. Por tanto, hay tres soluciones particulares asociadas: $e^{0x} = 1$, e^{3x} y e^{-x} . Con lo cual, la solución general de esta EDO es $y_H = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} + C_3 \cdot e^{-x}$.

2) Hallar la solución general de $y''' + y'' - y' - y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, que tiene una raíz real simple ($\lambda = 1$) y otra raíz real doble ($\lambda = -1$). Entonces tenemos que las tres soluciones particulares asociadas son: e^x , e^{-x} y $x \cdot e^{-x}$. Luego la solución general de la EDO es

$$y_H = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot x \cdot e^{-x}$$

3) Hallar la solución general de $y''' + 2y'' + 5y' - 26y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 26 = 0$, que tiene una raíz real ($\lambda = 2$) y dos raíces imaginarias conjugadas ($-2 + 3i$ y $-2 - 3i$). Por tanto, las tres soluciones particulares asociadas serán: e^{2x} , $e^{-2x} \cdot \cos 3x$ y $e^{-2x} \cdot \sen 3x$. Con lo cual, la solución general de la EDO es

$$y_H = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x + C_3 \cdot e^{-2x} \cdot \sen 3x$$

4) Hallar la solución general de $y^v - 2y^{iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, que tiene una raíz real $\lambda = 2$ simple y dos raíces imaginarias conjugadas $\lambda = i$, $\lambda = -i$ dobles (aquí $a = 0$ y $b = 1$). Por tanto, las cinco soluciones particulares asociadas son: e^{2x} , $\cos x$, $\sen x$, $x \cdot \cos x$ y $x \cdot \sen x$. Con lo cual, la solución general de la EDO es

$$y_H = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \sen x + C_4 \cdot x \cdot \cos x + C_5 \cdot x \cdot \sen x$$

Hallemos, por ejemplo, la “solución particular” de la EDO anterior que cumpla las “condiciones iniciales” $y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1$ e $y^{iv}(0) = -2$. Derivando cuatro veces

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

la “solución general” obtenida anteriormente, sustituyendo $x = 0$ en las expresiones obtenidas e igualando a los valores dados en las “condiciones iniciales”, se tendrán las siguientes cinco ecuaciones que deben cumplir las cinco constantes C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 :

$$C_1 + C_2 = 3 \quad ; \quad 2C_1 + C_3 + C_4 = -1 \quad ; \quad 4C_1 - C_2 + 2C_5 = 0 \quad ; \\ 8C_1 - C_3 - 3C_4 = 1 \quad ; \quad 16C_1 + C_2 - 4C_5 = -2$$

Sistema cuya solución única es: $C_1 = 1/25$; $C_2 = 74/25$; $C_3 = -32/25$; $C_4 = 1/5$; $C_5 = 7/5$.

Por tanto, $y_p = \frac{1}{25} \cdot (e^{2x} + 74 \cdot \cos x - 32 \cdot \sen x + 5x \cdot \cos x + 35x \cdot \sen x)$

SOLUCIÓN PARTICULAR DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES:

Sea la EDO lineal de coeficientes constantes completa (no homogénea) de orden n :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \quad (a_n \neq 0)$$

Veremos dos métodos clásicos para determinar una cierta “solución particular” y_C de esta ecuación: 1) Método de coeficientes indeterminados. 2) Método de variación de las constantes.

Método de coeficientes indeterminados:

Se basa en que la solución particular buscada tiene, en muchas ocasiones, una forma prevista que se relaciona con el segundo miembro de la ecuación diferencial. Pero para ello, dicho segundo miembro tiene que poseer derivadas sucesivas expresables solamente con un número finito de funciones distintas (ver Nota 5 de la página siguiente).

Se trata de escribir entonces la posible solución, con la forma que le corresponda, pero dejando indicados los coeficientes que intervengan en ella. La sustitución de esa posible solución y de sus derivadas en la EDO, imponiendo que ésta se cumpla, permitirá llegar a un sistema de ecuaciones que deban cumplir los coeficientes desconocidos, resolviendo el cual se tendrán sus valores.

A continuación, presentamos un cuadro que indica distintas posibilidades de la función $b(x)$ del segundo miembro de la EDO, acompañadas de las formas previstas para la solución particular correspondiente (la ecuación característica se representa por $P(\lambda) = 0$):

Forma de $b(x)$	Forma prevista de la solución particular y_C
e^{ax}	$A \cdot e^{ax}$, si $P(a) \neq 0$
e^{ax}	$x^m \cdot A \cdot e^{ax}$, si $x = a$ es raíz de mult. m de $P(\lambda) = 0$
$x^k \cdot e^{ax}$	$Q_k(x) \cdot e^{ax}$, si $P(a) \neq 0$
$x^k \cdot e^{ax}$	$x^m \cdot Q_k(x) \cdot e^{ax}$, si $x = a$ es raíz de mult. m de $P(\lambda) = 0$
x^k	$Q_k(x)$, si $P(0) \neq 0$
x^k	$x^m \cdot Q_k(x)$, si $x = 0$ es raíz de mult. m de $P(\lambda) = 0$
$\sen bx$ o $\cos bx$	$A \cdot \sen bx + B \cdot \cos bx$, si $P(\pm bi) \neq 0$
$\sen bx$ o $\cos bx$	$x^m \cdot (A \cdot \sen bx + B \cdot \cos bx)$, si $\pm bi$ son raíces de mult. m de $P(\lambda) = 0$
$x^k \sen bx$ o $x^k \cos bx$	$Q_k(x) \cdot \sen bx + R_k(x) \cdot \cos bx$, si $P(\pm bi) \neq 0$
$x^k \sen bx$ o $x^k \cos bx$	$x^m \cdot [Q_k(x) \cdot \sen bx + R_k(x) \cdot \cos bx]$, si $\pm bi$ son de mult. m de $P(\lambda) = 0$
$e^{ax} \sen bx$ o $e^{ax} \cos bx$	$e^{ax} \cdot (A \cdot \sen bx + B \cdot \cos bx)$, si $P(a \pm bi) \neq 0$
$e^{ax} \sen bx$ o $e^{ax} \cos bx$	$x^m \cdot e^{ax} \cdot (A \cdot \sen bx + B \cdot \cos bx)$, si $a \pm bi$ son de mult. m de $P(\lambda) = 0$
$x^k e^{ax} \sen bx$ o $x^k e^{ax} \cos bx$	$e^{ax} \cdot [Q_k(x) \cdot \sen bx + R_k(x) \cdot \cos bx]$, si $P(a \pm bi) \neq 0$
$x^k e^{ax} \sen bx$ o $x^k e^{ax} \cos bx$	$x^m e^{ax} [Q_k(x) \cdot \sen bx + R_k(x) \cdot \cos bx]$, si $a \pm bi$ son de mult. m de $P(\lambda) = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Notas importantes:

- 1) En la tabla anterior se supone en todos los casos k entero positivo.
- 2) También hemos representado por $Q_k(x)$ y $R_k(x)$ ciertos polinomios con coeficientes indeterminados de grados menor o igual que k (cada uno tendrá $k + 1$ coeficientes a determinar).
- 3) Si hubiese una constante cualquiera que multiplicase a alguno de los segundos miembros señalados en dicha tabla, la solución particular correspondiente y_c se obtendrá del mismo modo anterior (de modo que dicha constante influirá naturalmente en los valores de los coeficientes a determinar).
- 4) Si el segundo miembro de una EDO dada fuese una suma algebraica de dos o más de los segundos miembros previstos en la tabla (multiplicados eventualmente por ciertas constantes), se pueden hallar las respectivas soluciones particulares en forma separada y luego sumar algebraicamente los resultados (esto se llama **“principio de superposición”**). O sea, que si una EDO fuese: [primer miembro = $k_1 \cdot b_1(x) + k_2 \cdot b_2(x)$], hallaríamos la $(y_c)_1$ correspondiente a [mismo primer miembro = $k_1 \cdot b_1(x)$], hallaríamos la $(y_c)_2$ correspondiente a [mismo primer miembro = $k_2 \cdot b_2(x)$] y la solución particular de la EDO que nos han dado sería $(y_c)_1 + (y_c)_2$. En la práctica conviene buscar directamente la solución particular como $(y_c)_1 + (y_c)_2$, usando diferentes coeficientes indeterminados para los dos sumandos (análogamente si son tres sumandos o más).
- 5) Obsérvese que las derivadas sucesivas de e^{ax} son expresables solamente con esa misma función acompañada de algunas constantes (interviene en las derivadas una sola función).
Las derivadas sucesivas de $x^k \cdot e^{ax}$ son siempre expresables por funciones similares con el exponente k cada vez menor, acompañadas de ciertas constantes y sumadas entre sí (intervienen en las derivadas $k + 1$ funciones diferentes como máximo).
Las derivadas sucesivas de x^k son siempre expresables por funciones similares con el exponente k cada vez menor, hasta llegar a una función constante y la función cero (intervienen en las derivadas $k + 2$ funciones diferentes en total, incluyendo la función cero).
Las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen} bx$ y las de $\operatorname{cos} bx$ son siempre expresables por estas dos únicas funciones acompañadas de ciertas constantes (intervienen en las derivadas dos funciones diferentes).
Las derivadas sucesivas de $x^k \cdot \operatorname{sen} bx$ y las de $x^k \cdot \operatorname{cos} bx$ son siempre expresables por funciones similares a ambas, con el exponente k cada vez menor (intervienen en las derivadas un máximo de $2 \cdot (k + 1)$ funciones diferentes).
Las derivadas sucesivas de $e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx$ y las de $e^{ax} \cdot \operatorname{cos} bx$ son siempre expresables por funciones similares a ambas (intervienen en las derivadas dos funciones diferentes).
Las derivadas sucesivas de $x^k \cdot e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx$ y las de $x^k \cdot e^{ax} \cdot \operatorname{cos} bx$ son siempre expresables por funciones similares a ambas, con el exponente k cada vez menor (intervienen en las derivadas un máximo de $2 \cdot (k + 1)$ funciones diferentes).

Ejemplo 1: Hallar una solución particular de $y''' - 3y'' + 4y = x \cdot e^{2x}$.

El segundo miembro es de la forma $\overline{x^k \cdot e^{ax}}$, con $k = 1$ y $a = 2$. Veamos si 2 es raíz de la ecuación característica, que es $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$. Se tiene $P(2) = 0$, luego es raíz. ¿Qué multiplicidad tiene? El cociente del polinomio $P(\lambda)$ entre el factor $\lambda - 2$ nos da $\lambda^2 - \lambda - 2$, que se anula también para $\lambda = 2$, luego 2 es raíz doble como mínimo. El nuevo cociente, de dividir el anterior polinomio de grado 2 entre $\lambda - 2$ es $\lambda + 1$, que no se anula para $\lambda = 2$, luego la multiplicidad de esta raíz es $m = 2$. Entonces, según lo establecido en el cuadro dado, la solución particular debe ser

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

$$y_c = x^m \cdot Q_k(x) \cdot e^{ax} = x^2 \cdot Q_1(x) \cdot e^{2x} = x^2 \cdot (Ax + B) \cdot e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2) \cdot e^{2x}$$

Falta hallar los coeficientes A y B . Para ello derivamos 3 veces y_c :

$$\begin{aligned}y'_c &= [2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx] \cdot e^{2x} \\y''_c &= [4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B] \cdot e^{2x} \\y'''_c &= [8Ax^3 + (36A + 8B)x^2 + (36A + 24B)x + (6A + 12B)] \cdot e^{2x}\end{aligned}$$

Y sustituyendo ahora todo en la EDO, se debe cumplir

$$[18Ax + (6A + 6B)] \cdot e^{2x} \equiv x \cdot e^{2x}$$

con lo cual tendrá que ser $18A = 1$; $6A + 6B = 0$. Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde resultan $A = 1/18$; $B = -1/18$.

Conclusión: Una solución particular de la EDO dada es $y_c = \frac{x^3 - x^2}{18} \cdot e^{2x}$

Notas:

1) Decimos “una solución particular” porque hay infinitas.

2) Usamos el símbolo \equiv en la ecuación que resulta de sustituir todo en la EDO porque debe resultar una identidad (ahí estamos imponiendo que la EDO se cumpla).

3) Si, por ejemplo, el segundo miembro de la EDO fuese $5x \cdot e^{2x}$, la nueva solución particular sería la anterior multiplicada por 5. En efecto, todos los cálculos anteriores servirían pero, al llegar a la identidad final, el segundo miembro sería $5x \cdot e^{2x}$ en vez de $x \cdot e^{2x}$, con lo cual el sistema sería $18A = 5$; $6A + 6B = 0$ y su solución sería $A = 5/18$; $B = -5/18$ (los valores obtenidos anteriormente multiplicados por 5).

Ejemplo 2: Hallar una solución particular de $y'' - y' - 2y = 3 \cos 2x$.

El segundo miembro es la constante 3 multiplicada por el segundo miembro previsto en el cuadro con la forma $[\cos bx]$ siendo $b = 2$. Tendremos que ver si $\pm 2i$ son raíces de la ecuación característica, que es $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son 2 y -1, luego $P(\pm 2i) \neq 0$, con lo cual debe ser según el cuadro

$$y_c = A \cdot \sen 2x + B \cdot \cos 2x$$

Falta hallar A y B . Para ello derivamos dos veces y tenemos:

$$y'_c = 2A \cdot \cos 2x - 2B \cdot \sen 2x \quad e \quad y''_c = -4A \cdot \sen 2x - 4B \cdot \cos 2x$$

Sustituyendo todo en la EDO, se debe cumplir

$$(-6A + 2B) \cdot \sen 2x + (-2A - 6B) \cdot \cos 2x \equiv 3 \cos 2x$$

con lo cual tendrá que ser $-6A + 2B = 0$; $-2A - 6B = 3$. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde resultan $A = -3/20$; $B = -9/20$.

Conclusión: Una solución particular de la EDO dada es $y_c = \frac{-3 \cdot \sen 2x - 9 \cdot \cos 2}{20}$

Ejemplo 3: Hallar una solución particular de $y'' + 4y = 5 \cdot \sen 2x$.

El segundo miembro es la constante 5 multiplicada por el segundo miembro previsto en el cuadro con la forma $[\sen bx]$ siendo $b = 2$. Tendremos que ver si $\pm 2i$ son raíces de la ecuación característica, que es $P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$. En este caso sí son raíces, de multiplicidad uno. Por tanto, tenemos $m = 1$ y según el cuadro:

$$y_c = x \cdot (A \cdot \sen 2x + B \cdot \cos 2x)$$

Falta hallar A y B . Para ello derivamos dos veces y tenemos:

$$\begin{aligned}y'_c &= (A \cdot \sen 2x + B \cdot \cos 2x) + x \cdot (2A \cdot \cos 2x - 2B \cdot \sen 2x) \\y''_c &= (-4B \cdot \sen 2x + 4A \cdot \cos 2x) + x \cdot (-4A \cdot \sen 2x - 4B \cdot \cos 2x)\end{aligned}$$

Sustituyendo todo en la EDO, se debe cumplir

$$(-4B \cdot \sen 2x + 4A \cdot \cos 2x) \equiv 5 \cdot \sen 2x$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

con lo cual tendrá que ser $-4B = 5$; $4A = 0$. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde resultan $A = 0$; $B = -5/4$.

Conclusión: Una solución particular de la EDO dada es $y_C = \frac{-5x \cdot \cos 2x}{4}$

Ejemplo 4: Hallar una solución particular de $3y'' - 2y' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

El segundo miembro es uno de los previstos en el cuadro dado, con la forma $x^k \cdot \operatorname{sen} bx$, siendo $k = 2$ y $b = 1$. Tendremos que ver si $\pm i$ son raíces de la ecuación característica, que es $P(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son 1 y $-1/3$, luego $P(\pm i) \neq 0$, con lo cual será

$$y_C = Q_2(x) \cdot \operatorname{sen} x + R_2(x) \cdot \cos x = (Ax^2 + Bx + C) \cdot \operatorname{sen} x + (Dx^2 + Ex + F) \cdot \cos x$$

Para hallar las 6 constantes que intervienen en y_C , derivamos dos veces y tenemos:

$$y'_C = [-Dx^2 + (2A - E)x + (B - F)] \cdot \operatorname{sen} x + [Ax^2 + (B + 2D)x + (C + E)] \cdot \cos x$$

$$y''_C = [-Ax^2 + (-B - 4D)x + (2A - C - 2E)] \cdot \operatorname{sen} x + \\ + [-Dx^2 + (4A - E)x + (2B + 2D - F)] \cdot \cos x$$

Sustituyendo todo en la EDO dada, la misma debe cumplirse

$$[(-4A + 2D)x^2 + (-4A - 4B - 12D + 2E)x + (6A - 2B - 4C - 6E + 2F)] \cdot \operatorname{sen} x + \\ + [(-2A - 4D)x^2 + (12A - 2B - 4D - 4E)x + (6B - 2C + 6D - 2E - 4F)] \cdot \cos x \equiv \\ \equiv x^2 \operatorname{sen} x$$

con lo cual tendrá que ser:

$$-4A + 2D = 1 \quad ; \quad -4A - 4B - 12D + 2E = 0 \quad ; \quad 6A - 2B - 4C - 6E + 2F = 0$$

$$-2A - 4D = 0 \quad ; \quad 12A - 2B - 4D - 4E = 0 \quad ; \quad 6B - 2C + 6D - 2E - 4F = 0$$

Sistema lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, de donde resultan los valores:

$$A = -1/5 \quad ; \quad B = -9/25 \quad ; \quad C = 119/250 \quad ; \quad D = 1/10 \quad ; \quad E = -13/25 \quad ; \quad F = -46/125$$

Conclusión: Una solución particular de la EDO dada es

$$y_C = \frac{-50x^2 - 90x + 119}{250} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{25x^2 - 130x - 92}{250} \cdot \cos x$$

Método de variación de las constantes:

Se basa en encontrar una solución particular y_C de la EDO lineal de coeficientes constantes completa (no homogénea), que tenga la misma estructura que la solución general y_H de la ecuación homogénea asociada, pero sustituyendo las n constantes que aparecen en la misma por n funciones que habrá que determinar.

O sea, que si la solución general de una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes, de orden n , es $y_H = C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x) + \dots + C_n \cdot f_n(x)$, donde las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$ son soluciones particulares conocidas de dicha EDO, linealmente independientes, la solución particular y_C que buscamos de la correspondiente EDO completa será de la forma:

$$y_C = c_1(x) \cdot f_1(x) + c_2(x) \cdot f_2(x) + \dots + c_n(x) \cdot f_n(x) \quad (1)$$

donde habrá que determinar las funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Para determinar las funciones anteriores se utiliza un artificio que permite obtener sus derivadas primeras $c'_1(x)$, $c'_2(x)$, ..., $c'_n(x)$ y luego, por integración indefinida, se obtienen las funciones buscadas.

Veámoslo en el caso $n = 3$ (y de manera similar en cualquier otro caso): Se supone que la EDO completa es $a_3 \cdot y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x)$, con $a_3 \neq 0$ y donde $b(x)$ no es la función cero. Y escribamos la solución particular que buscamos como

$$y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3$$

(de una manera simple, pero sabemos que en el segundo miembro sólo hay funciones de la variable x). Entonces, la primera derivada de y_c se puede escribir:

$$y'_c = (c'_1 \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 + c_3' \cdot y_3) + (c_1 \cdot y_1' + c_2 \cdot y_2' + c_3 \cdot y_3')$$

Pues bien, imponemos la condición $c'_1 \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 + c_3' \cdot y_3 = 0$, con lo cual queda y'_c igual al contenido del segundo paréntesis anterior.

Pero entonces será:

$$y''_c = (c'_1 \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' + c_3' \cdot y_3') + (c_1 \cdot y_1'' + c_2 \cdot y_2'' + c_3 \cdot y_3'')$$

Ahora imponemos la nueva condición $c'_1 \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' + c_3' \cdot y_3' = 0$, con lo cual queda y''_c igual al contenido del segundo paréntesis anterior.

Por tanto, será:

$$y'''_c = (c'_1 \cdot y_1'' + c_2' \cdot y_2'' + c_3' \cdot y_3'') + (c_1 \cdot y_1''' + c_2 \cdot y_2''' + c_3 \cdot y_3''')$$

Y ahora imponemos la tercera condición $c'_1 \cdot y_1'' + c_2' \cdot y_2'' + c_3' \cdot y_3'' = b(x)/a_3$, con lo cual queda y'''_c igual al contenido del segundo paréntesis anterior más $b(x)/a_3$.

Así, supuesto que se cumplan las tres condiciones impuestas a c'_1 , c'_2 y c'_3 , se puede probar que la función $y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3$ cumple la EDO no homogénea dada (basta sustituir las expresiones simplificadas que han quedado para y'_c , y''_c e y'''_c , comprobando que resulta la identidad $b(x) \equiv b(x)$, después de haber eliminado todos los términos que incluyan la función y_1 y sus derivadas (por ser y_1 solución de la EDO homogénea), habiendo eliminado también todos los términos que incluyan la función y_2 y sus derivadas (por ser y_2 solución de la EDO homogénea), etc...

Pero resulta que esas 3 condiciones impuestas forman un sistema lineal de 3 ecuaciones con las 3 incógnitas c'_1 , c'_2 , c'_3 , que es compatible determinado. En efecto, el determinante de los coeficientes de las incógnitas en ese sistema es:

$$w(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

llamado el "wronskiano" de las tres funciones y_1 , y_2 , y_3 (que como sabemos son soluciones particulares linealmente independientes de la EDO homogénea) y se demuestra que este determinante es distinto de la función cero, por ser precisamente dichas tres funciones linealmente independientes. Con lo cual, podremos aplicarle la Regla de Cramer a ese sistema, obteniendo c'_1 , c'_2 y c'_3 (la solución única no puede ser $c'_1 = 0$, $c'_2 = 0$, $c'_3 = 0$, porque el sistema lineal no es homogéneo, ya que los segundos miembros de las tres ecuaciones son 0 , 0 y $b(x)/a_3$).

Finalmente, bastará realizar la integración indefinida de las tres funciones obtenidas resolviendo el sistema anterior y tendremos $c_1(x)$, $c_2(x)$ y $c_3(x)$, con lo cual ya conoceremos la solución particular (1) buscada. OJO: Este puede ser el punto problemático del método, pues sabemos que algunas integrales indefinidas no tienen resultados que sean "funciones elementales".

Ejemplo 1: Hallar una solución particular de $y''' - y' = -2x$.

La ecuación homogénea asociada es $y''' - y' = 0$, que tiene ecuación característica $\lambda^3 - \lambda = 0$, cuyas raíces son 0 , 1 y -1 (todas simples). Por tanto, su solución general será

$$y_H = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Buscamos entonces una solución particular de la EDO completa de la forma

$$y_c = c_1(x) \cdot 1 + c_2(x) \cdot e^x + c_3(x) \cdot e^{-x}$$

Y para ello, establecemos el sistema de 3 ecuaciones lineales con las 3 incógnitas c_1', c_2', c_3' cuyo determinante de coeficientes es el wronskiano de las 3 soluciones independientes $1, e^x, e^{-x}$:

$$w(1, e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2$$

Dicho sistema es:

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1' + e^x \cdot c_2' + e^{-x} \cdot c_3' = 0 \\ 0 \cdot c_1' + e^x \cdot c_2' - e^{-x} \cdot c_3' = 0 \\ 0 \cdot c_1' + e^x \cdot c_2' + e^{-x} \cdot c_3' = -2x/1 \end{cases}$$

Y su solución única, aplicando la regla de Cramer, será:

$$c_1' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ -2x & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot (-2) = 2x$$

$$c_2' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & -2x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -e^{-x} \\ -2x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2xe^{-x}) = -xe^{-x}$$

$$c_3' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & -2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & -2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2xe^x) = -xe^x$$

En conclusión:

$$\boxed{c_1(x) = \int 2x dx = x^2} \quad ; \quad \boxed{c_2(x) = \int -xe^{-x} dx = (x+1)e^{-x}}$$

$$\boxed{c_3(x) = \int -xe^x dx = (-x+1) \cdot e^x}$$

con lo cual $\boxed{y_c = x^2 + (x+1) \cdot e^{-x} \cdot e^x + (-x+1) \cdot e^x \cdot e^{-x} = x^2 + 2}$

(podemos comprobar con mucha facilidad, por sustitución directa, que $y_c = x^2 + 2$ es efectivamente solución particular de la EDO completa). Omitimos las constantes de integración al calcular $c_1(x)$, $c_2(x)$ y $c_3(x)$, pues queremos una solución particular y no muchas.

Nota 1: Si hubiésemos aplicado el anterior método de coeficientes indeterminados, sería

$$y_c = x^m \cdot Q_1(x) = x \cdot (Ax + B)$$

pues $x = 0$ es solución de multiplicidad $m = 1$ de la ecuación característica. Pero entonces, al ser $y_c = Ax^2 + Bx$, tenemos $y_c' = 2Ax + B$, $y_c'' = 2A$ e $y_c''' = 0$. Y al sustituir todo en la EDO completa, tendrá que cumplirse $0 - (2Ax + B) \equiv -2x$. Esto implica que $A = 1$ y $B = 0$, con lo cual $\boxed{y_c = x^2}$.

Alguien podría pensar que hay algún error, pues no coinciden los resultados por ambos métodos. Pero esto es normal, pues hay infinitas soluciones particulares y no tiene por qué llegarse a la misma usando dos métodos diferentes. Veamos: ¿Cuál es la solución general de la EDO dada? Desde el principio dijimos que la solución general de la ecuación completa es la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada (y_H) y la solución particular de la completa que hayamos encontrado (y_c). Entonces, en el caso de aplicar el método de coeficientes indeterminados, se llegará a $\boxed{y = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-x} + x^2}$. Y en el caso de aplicar el método de variación de las constantes, la solución y_c obtenida ha sido $x^2 + 2$, con lo cual la solución general se escribe $\boxed{y = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-x} + x^2 + 2}$. Pareciese que hay algún error, pero ¡las dos están bien! Pues en la primera, la solución x^2 se obtiene para $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ y la solución

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

$x^2 + 2$ resulta haciendo $C_1 = 2$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 0$. En cambio, en la segunda x^2 se obtiene haciendo $C_1 = -2$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 0$ mientras que la solución $x^2 + 2$ resulta haciendo $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Nota 2: En este ejemplo, la obtención de y_C por el método de “variación de las constantes” resultó más largo que aplicando el método de “coeficientes indeterminados”, pero esto no siempre es así, pues depende del número de coeficientes a determinar (recuérdese lo laborioso que fue el ejercicio 4 de la pág. 7, a pesar de que facilitamos la solución del sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas). Además, recuérdese que el método de “coeficientes indeterminados” sólo puede aplicarse para segundos miembros del tipo previsto en el cuadro dado en la pág. 4. En cambio, el método de “variación de las constantes” siempre es aplicable (su dificultad principal puede estar en las integrales indefinidas que hay que resolver al final).

Veamos a continuación dos ejemplos donde no puede aplicarse el método de “coeficientes indeterminados” para obtener una solución particular de la EDO dada, que es no homogénea. Sin embargo, la obtendremos por el método de “variación de las constantes”.

Ejemplo 2: Hallar una solución particular de $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\text{sen } x}$ (nótese que este segundo miembro no está previsto en el cuadro de la pág. 4, porque sus derivadas sucesivas incluyen infinitas funciones distintas y entonces no puede aplicarse el método de “coeficientes indeterminados”).

La EDO homogénea asociada es $y'' + 2y' + 2y = 0$, cuya ecuación característica es entonces $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Las soluciones de ésta son $-1 \pm i$, luego dos soluciones particulares independientes de la EDO homogénea, serán $e^{-x} \cdot \text{sen } x$ y $e^{-x} \cdot \text{cos } x$. Por tanto, la solución general de esa EDO homogénea es $y_H = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \text{sen } x + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \text{cos } x$

Buscamos ahora, por el método de “variación de las constantes”, una solución particular de la EDO completa, que será de la forma:

$$y_C = c_1(x) \cdot e^{-x} \cdot \text{sen } x + c_2(x) \cdot e^{-x} \cdot \text{cos } x$$

para lo cual escribimos el sistema lineal de 2 ecuaciones con las incógnitas c_1' y c_2' :

$$\begin{cases} (e^{-x} \text{sen } x) \cdot c_1' + (e^{-x} \text{cos } x) \cdot c_2' = 0 \\ e^{-x}(\text{cos } x - \text{sen } x) \cdot c_1' + e^{-x}(-\text{cos } x - \text{sen } x) \cdot c_2' = \frac{e^{-x}}{\text{sen } x} \end{cases}$$

y, multiplicando ambas ecuaciones por e^x , se llega al nuevo sistema:

$$\begin{cases} (\text{sen } x) \cdot c_1' + (\text{cos } x) \cdot c_2' = 0 \\ (\text{cos } x - \text{sen } x) \cdot c_1' + (-\text{cos } x - \text{sen } x) \cdot c_2' = \frac{1}{\text{sen } x} \end{cases}$$

donde el determinante de “los coeficientes” de las incógnitas vale -1 . Entonces, aplicando la Regla de Cramer, se obtiene:

$$c_1' = - \begin{vmatrix} 0 & \text{cos } x \\ \frac{1}{\text{sen } x} & -\text{cos } x - \text{sen } x \end{vmatrix} = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} \quad ; \quad c_2' = - \begin{vmatrix} \text{sen } x & 0 \\ \text{cos } x - \text{sen } x & \frac{1}{\text{sen } x} \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, $c_1(x) = \int \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} dx = \ln|\text{sen } x|$ y $c_2(x) = \int -1 dx = -x$, con lo cual una solución particular de la EDO completa es:

$$y_C = \ln|\text{sen } x| \cdot e^{-x} \cdot \text{sen } x - x \cdot e^{-x} \cdot \text{cos } x$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Nota: Comprobar esta solución es laborioso y para hacerlo conviene aplicar la regla

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

Ejemplo 3: Hallar la solución particular de $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$ que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$. (No puede utilizarse el método de “coeficientes indeterminados” por la misma razón del ejemplo anterior).

La EDO homogénea asociada es $y'' - y' = 0$, cuya ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda = 0$, que tiene las soluciones 0 y 1, luego dos soluciones independientes de la homogénea son 1 y e^x . Por tanto, la solución general de esa EDO homogénea es $y_H = C_1 + C_2 \cdot e^x$.

Buscamos ahora una solución particular de la EDO completa por el método de “variación de las constantes”, que será de la forma

$$y_C = c_1(x) + c_2(x) \cdot e^x$$

para lo cual llegamos escribimos el sistema lineal de 2 ecuaciones con las incógnitas c_1' y c_2' siguiente:

$$\begin{cases} c_1' \cdot 1 + c_2' \cdot e^x = 0 \\ c_1' \cdot 0 + c_2' \cdot e^x = 1/(1 + e^x) \end{cases}$$

de donde resulta $c_1' = \frac{-1}{1+e^x}$ y $c_2' = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$.

E integrando ambos resultados (mediante el cambio de variable $e^x = t$), se obtiene finalmente:

$$c_1(x) = \ln(1 + e^{-x}) \quad ; \quad c_2(x) = \ln(1 + e^{-x}) - e^{-x}$$

Así, la solución particular encontrada para la EDO completa es:

$$y_C = (1 + e^x) \cdot \ln(1 + e^{-x}) - 1$$

Pero esta solución no cumple la primera condición inicial dada, pues $y_C(0) = 2 \cdot \ln 2 - 1$ y nos piden que $y(0) = 2$ (sería mucha casualidad que hubiesen coincidido estos valores).

Debemos entonces buscar la “solución particular” pedida entre las infinitas de la “solución general” de la EDO completa, que es:

$$y = y_H + y_C = C_1 + C_2 \cdot e^x + (1 + e^x) \cdot \ln(1 + e^{-x}) - 1$$

donde podemos omitir la constante -1 al agruparla con C_1 , con lo cual la “solución general” puede escribirse más fácilmente así:

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^x + (1 + e^x) \cdot \ln(1 + e^{-x})$$

Hallemos ahora la “solución particular” que cumpla las condiciones dadas, usando esta última versión de la “solución general”:

La primera condición $y(0) = 2$ implica que $2 = C_1 + C_2 + 2 \cdot \ln 2$ (2)

Derivamos la “solución general” y se tiene: $y' = C_2 \cdot e^x + e^x \cdot \ln(1 + e^{-x}) + (1 + e^x) \cdot \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

luego la segunda condición $y'(0) = -1$ implica: $-1 = C_2 + \ln 2 - 1$ (3)

Tenemos entonces el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3), con las incógnitas C_1 y C_2 .

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Resolviéndolo se obtiene $C_1 = 2 - \ln 2$ y $C_2 = -\ln 2$.

Por tanto, la solución pedida es: $y_p = 2 - \ln 2 - (\ln 2) \cdot e^x + (1 + e^x) \cdot \ln(1 + e^{-x})$

Comprobemos el resultado anterior:

$y_p' = -(\ln 2) \cdot e^x + e^x \cdot \ln(1 + e^{-x}) - 1$; $y_p'' = -(\ln 2) \cdot e^x + e^x \cdot \ln(1 + e^{-x}) - \frac{e^x}{1+e^x}$
con lo cual $y_p'' - y_p' = -\frac{e^x}{1+e^x} + 1 = \frac{1}{1+e^x}$ (una identidad, luego y_p cumple la EDO dada).

Y además se cumple $y_p(0) = 2 - \ln 2 - \ln 2 + 2 \cdot \ln 2 = 2$, así como $y_p'(0) = -\ln 2 + \ln 2 - 1 = -1$ (por tanto, y_p cumple las condiciones iniciales dadas).

Ecuaciones de Euler - Cauchy

Son un tipo especial de EDO lineales de coeficientes variables de orden mayor que uno. Tienen la forma siguiente:

$$a_n \cdot (mx + n)^n \cdot y^{(n)} + \dots + a_2 \cdot (mx + n)^2 \cdot y'' + a_1 \cdot (mx + n) \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x)$$

con $a_n \neq 0$ y $m \neq 0$. Si $b(x)$ es la función cero, se llama homogénea. En caso contrario es no homogénea o completa.

Nota: Leonhard Euler fue un gran matemático suizo del siglo XVIII (uno de los más importantes de ese siglo). Y Augustin Louis Cauchy fue un gran matemático francés del siglo XIX.

En el intervalo donde sea $mx + n > 0$, se resuelven estas EDO aplicando el cambio de variable independiente $mx + n = e^t$ y en el intervalo donde se cumpla $mx + n < 0$, se aplica el cambio de variable $mx + n = -e^t$ de modo que la ecuación dada se transforma en una EDO lineal de coeficientes constantes en ambos casos. Hallada su solución general, deshacemos el cambio y tenemos la solución general de la EDO de Euler - Cauchy.

Supongamos inicialmente que sea $mx + n > 0$ y que queremos hacer el cambio de la variable independiente x por la variable independiente t , de modo que $mx + n = e^t$. La sustitución de las derivadas respecto a x de la función incógnita por las derivadas respecto a la nueva variable t de la misma función incógnita responde **una ley de formación especial**: En efecto, si llamamos D al "operador" que representa derivación respecto a t , con lo cual escribir Dy equivale a escribir dy/dt , escribir D^2y equivale a escribir d^2y/dt^2 (derivada segunda de y respecto t), escribir D^3y equivale a escribir d^3y/dt^3 (derivada tercera de y respecto a t), etc..., y si seguimos llamando $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ a las derivadas sucesivas de y respecto a x , se tiene:

1) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = Dy \cdot \frac{m}{mx+n}$, puesto que $t = \ln(mx + n)$ con lo cual $\frac{dt}{dx} = \frac{m}{mx+n}$, de donde resulta la primera relación de la ley de formación

$$(mx + n) \cdot y' = m \cdot Dy \quad (\text{primera relación de la ley de formación})$$

2) $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left[Dy \cdot \frac{m}{mx+n} \right] = \frac{d}{dx} (Dy) \cdot \frac{m}{mx+n} + Dy \cdot \frac{-m^2}{(mx+n)^2} = \frac{d}{dt} (Dy) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{m}{mx+n} + Dy \cdot \frac{-m^2}{(mx+n)^2} = D^2y \cdot \left(\frac{m}{mx+n} \right)^2 - Dy \cdot \left(\frac{m}{mx+n} \right)^2 = (D^2y - Dy) \cdot \frac{m^2}{(mx+n)^2}$

de donde resulta: $(mx + n)^2 \cdot y'' = m^2 \cdot D(D - 1)y$ (segunda relación de la ley de formación)

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

en la cual se ha sustituido $D^2y - Dy$ por $D(D - 1)y$.

3) Y de manera análoga se llega a la tercera relación de la ley de formación

$$(mx + n)^3 \cdot y''' = m^3 \cdot D(D - 1)(D - 2)y$$

también a la cuarta relación $(mx + n)^4 \cdot y^{(4)} = m^4 \cdot D(D - 1)(D - 2)(D - 3)y$

y así sucesivamente, donde la expresión $D(D - 1)(D - 2)y = (D^3 - 3D^2 + 2D)y$ significa efectuarle a la función y las operaciones siguientes: derivarla tres veces respecto a t , restarle 3 veces su derivada segunda respecto a t y sumarle 2 veces su derivada primera respecto a t . Y de modo análogo el significado de la expresión $D(D - 1)(D - 2)(D - 3)y$ de la cuarta relación.

Si suponemos ahora que queremos trabajar donde sea $mx + n < 0$, el cambio de variable independiente a utilizar será $mx + n = -e^t$, con lo cual tenemos $t = \ln(-mx - n)$ y al derivar respecto a x se obtiene $\frac{dt}{dx} = \frac{-m}{-mx-n} = \frac{m}{mx+n}$ (mismo resultado obtenido en el caso anterior). Por tanto, los cálculos de las expresiones que nos dan las derivadas sucesivas de y respecto a x en función de las derivadas de y respecto a t se repiten exactamente igual y su ley de formación será la misma. Lo único que debemos tener en cuenta es que, al deshacer el cambio, tendremos que sustituir la variable t por $\ln(-mx - n)$ y no por $\ln(mx + n)$.

Nota: El intervalo en que se cumple $mx + n > 0$ es $(-\frac{n}{m}, +\infty)$ si es $m > 0$ y es $(-\infty, -\frac{n}{m})$ si es $m < 0$. Y el intervalo donde es $mx + n < 0$ es $(-\infty, -\frac{n}{m})$ si es $m > 0$ y es $(-\frac{n}{m}, +\infty)$ si es $m < 0$.

Ejemplo 1: Hallar solución general de $(2x + 1)^3 \cdot y''' + 2 \cdot (2x + 1)^2 \cdot y'' + (2x + 1) \cdot y' = 0$.

Es una EDO de Euler - Cauchy de orden 3 y en este caso homogénea (con $m = 2$ y $n = 1$).

Por tanto, para resolver esta EDO en el intervalo donde $2x + 1 > 0$, que es $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, haremos el cambio $2x + 1 = e^t$, con lo cual las relaciones entre las derivadas de y respecto a x y las derivadas de y respecto a t serán:

$$(2x + 1) \cdot y' = 2 \cdot Dy \quad (2x + 1)^2 \cdot y'' = 2^2 \cdot D(D - 1)y = 4 \cdot (D^2 - D)y$$

$$(2x + 1)^3 \cdot y''' = 2^3 \cdot D(D - 1)(D - 2)y = 8 \cdot (D^3 - 3D^2 + 2D)y$$

Por tanto, sustituimos el producto $(2x + 1) \cdot y'$ por el producto $2 \cdot y'$ (nueva y'); sustituimos el producto $(2x + 1)^2 \cdot y''$ por el producto $4 \cdot (y'' - y')$ (nuevas y' e y''), y sustituimos el producto $(2x + 1)^3 \cdot y'''$ por el producto $8 \cdot (y''' - 3y'' + 2y')$ (nuevas y' , y'' e y'''). Queda entonces la EDO así:

$8 \cdot (y''' - 3y'' + 2y') + 8 \cdot (y'' - y') + 2y' = 0$, o sea $8y''' - 16y'' + 10y' = 0$ que podemos simplificar para dejarla como

$$4y''' - 8y'' + 5y' = 0 \quad (\text{EDO lineal homogénea de coeficientes constantes})$$

Su ecuación característica es $4\lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda = 0$, que tiene raíces 0 y $1 \pm \frac{1}{2}i$. Por tanto, soluciones particulares linealmente independientes de esta EDO son: 1, $e^t \cdot \sen \frac{t}{2}$ y $e^t \cdot \cos \frac{t}{2}$ (re-

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

cordemos que la variable independiente es t). Luego la solución general de esta EDO homogénea de coeficientes constantes será

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^t \operatorname{sen} \frac{t}{2} + C_3 \cdot e^t \operatorname{cos} \frac{t}{2}$$

Finalmente, al deshacer el cambio inicial que es $e^t = 2x + 1$, se tiene la solución general de la EDO de Euler - Cauchy dada, que será entonces:

$$y = C_1 + C_2 \cdot (2x + 1) \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{\ln(2x+1)}{2} \right] + C_3 \cdot (2x + 1) \cdot \operatorname{cos} \left[\frac{\ln(2x+1)}{2} \right] \quad (\text{si } x > -1/2)$$

Y si queremos la solución general de la misma EDO en el intervalo donde se cumpla $2x + 1 < 0$, que es $(-\infty, -\frac{1}{2})$, desharemos el cambio inicial que ahora sería $e^t = -2x - 1$ y tenemos la solución general de la EDO de Euler - Cauchy dada en ese intervalo:

$$y = C_1 + C_2 \cdot (-2x - 1) \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{\ln(-2x-1)}{2} \right] + C_3 \cdot (-2x - 1) \cdot \operatorname{cos} \left[\frac{\ln(-2x-1)}{2} \right] \quad (\text{si } x < -1/2)$$

Donde el factor $(-2x - 1)$ podría escribirse como $(2x + 1)$ incorporando el signo negativo a las constantes C_2 y C_3 , sin necesidad de cambiarlas (pues las mismas siguen siendo indeterminadas).

Ejemplo 2: Hallar la solución general de $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$ ($x > 0$).

Esta EDO es lineal de coeficientes variables no homogénea. Pero es de Euler - Cauchy, con los parámetros $m = 1$ y $n = 0$. Por tanto, para $x > 0$, aplicaremos el cambio de variable independiente dado por $x = e^t$ o bien $t = \ln x$. Y las relaciones entre derivadas queda de esta manera:

$$xy' = Dy \quad ; \quad x^2 y'' = D(D-1)y = (D^2 - D)y$$

luego sustituimos el producto xy' por la nueva y' , así como el producto $x^2 y''$ por $y'' - y'$ (nuevas derivadas), quedando entonces la EDO así $(y'' - y') - 2y' + 2y = e^{2t} - 2e^t + 2$.

O sea, la nueva EDO ordenada es $y'' - 3y' + 2y = e^{2t} - 2e^t + 2$ (EDO lineal de coeficientes constantes no homogénea, del mismo orden que la ecuación inicial).

Tenemos que resolver la homogénea asociada que es $y'' - 3y' + 2y = 0$, cuya ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, de raíces 1 y 2. Por tanto, su solución general será

$$y_H = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Y tenemos que hallar ahora una solución particular de la EDO completa, teniendo en cuenta que el segundo miembro es una suma algebraica de tres funciones distintas (la función e^{2t} , como la primera que aparece en la tabla de la pág. 4, con $a = 2$; la función $-2e^t$, como la anterior, pero con $a = 1$ y multiplicada por la constante -2 , y la función 2 , como las dos anteriores, pero con $a = 0$ y multiplicada por la constante 2). Aplicando el "principio de superposición" (nota 4 de la pág. 5), buscamos una solución particular de la forma $A \cdot t \cdot e^{2t} + B \cdot t \cdot e^t + C$ (suma de las tres soluciones particulares que corresponderían a las tres funciones que aparecen sumadas en el segundo miembro de la EDO, tomando en cuenta que tanto 1 como 2 son soluciones simples de la ecuación característica). Derivando dos veces y sustituyendo en la EDO completa, se obtiene $A = 1, B = 2$ y $C = 1$. Luego dicha solución particular será

$$y_C = t \cdot e^{2t} + 2t \cdot e^t + 1$$

Entonces la solución general de la EDO de coeficientes constantes que habíamos obtenido es:

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + t \cdot e^{2t} + 2t \cdot e^t + 1$$

Y, deshaciendo el cambio de variable independiente $e^t = x$, la solución general de la EDO de Euler - Cauchy dada será:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \cdot \ln x + 2x \cdot \ln x + 1 \quad (x > 0)$$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables, no de Euler-Cauchy, de cuyas homogéneas asociadas se conozca una solución particular

Supongamos una EDO lineal de segundo orden, de coeficientes variables, que no sea de Euler - Cauchy, la cual será de la forma $a_2(x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$, con $a_2(x)$ diferente de la función cero.

En principio no es fácil resolverla, pero vimos en la Sección 7.7 algunos casos en que su solución general se obtiene resolviendo dos ecuaciones de primer orden: Esto se podía hacer cuando la variable y estaba ausente, cuando la variable x estaba ausente y cuando era homogénea en las tres variables y , y' e y'' (cumpliéndose ahora esta última circunstancia, pues al ser “lineal” es homogénea de orden 1 en y , y' e y'').

Pero, por ser “lineal”, hay una cuarta alternativa para obtener la solución general de la ecuación dada a través de la resolución de dos EDO de primer orden: Y es cuando se conozca una cierta solución particular no trivial de la correspondiente EDO homogénea asociada (si es homogénea la dada, la solución particular será de ella misma). Y “no trivial” significa que esa solución particular no sea la función cero.

Sea entonces $a_2(x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$ la EDO dada y llamemos $y_1(x)$ a la solución particular conocida (no trivial) de la EDO homogénea asociada.

Por tanto, se cumple $a_2(x) \cdot y_1''(x) + a_1(x) \cdot y_1'(x) + a_0(x) \cdot y_1(x) \equiv 0$. Entonces, si hacemos el cambio de función incógnita $y = y_1 \cdot u$, se tendrá:

$$y' = y_1' \cdot u + y_1 \cdot u' \quad ; \quad y'' = y_1'' \cdot u + 2 \cdot y_1' \cdot u' + y_1 \cdot u''$$

De modo que, al sustituir en la EDO dada, queda:

$$a_2 \cdot (y_1'' \cdot u + 2 \cdot y_1' \cdot u' + y_1 \cdot u'') + a_1 \cdot (y_1' \cdot u + y_1 \cdot u') + a_0 \cdot y_1 \cdot u = b(x)$$

Pero $a_2 \cdot y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 \equiv 0$, luego queda $(a_2 y_1) \cdot u'' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1) \cdot u' = b(x)$ que es una EDO de segundo orden en las variables u , x , pero **con u ausente**.

Y como este es uno de los casos en que podemos reducir el problema de una EDO de segundo orden a la solución de dos EDO de primer orden, hacemos el nuevo cambio $u' = p$, $u'' = p'$ señalado en la Sección 7.7 para este caso, obteniendo $(a_2 y_1) p' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1) p = b(x)$ (**primera EDO de primer orden, que es lineal**). Se resuelve, a través de un factor integrante función de x , y su solución general puede darse en forma explícita.

Hallada la solución general de la EDO anterior, $p = F(x, C_1)$, deshacemos el cambio $u' = p$ y tenemos la **segunda EDO de primer orden** $u' = F(x, C_1)$, que se resuelve por integración directa, dándonos la solución general de la EDO de segundo orden con incógnita u :

$$u = G(x, C_1, C_2)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Finalmente, deshacemos el cambio de variable inicial $y = y_1 \cdot u$ y se tiene la solución general de la EDO dada:

$$y = y_1(x) \cdot G(x, C_1, C_2)$$

Ejemplo 1: Hallar la solución general de $x^2 \cdot (\ln x - 1) \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0$, sabiendo que la función $y = x$ es una solución particular (se supone $x > e$, con lo cual $\ln x > 1$).

Es una EDO de segundo orden donde no está ausente la variable dependiente y , ni está ausente la variable independiente x (por lo tanto, no puede reducirse a dos ecuaciones de primer orden por estas posibles características), pero es homogénea de orden 1 en las tres variables y , y' e y'' (por ser lineal homogénea) luego podría resolverse por el método específico correspondiente (visto en la Sección 7.7).

Pero se trata también de una EDO lineal de coeficientes variables, que no es de Euler - Cauchy, de la cual nos dicen que $y_1 = x$ es una solución particular de la homogénea asociada, que en este caso es la misma EDO (lo cual se comprueba inmediatamente). Pues bien, vamos a resolverla apoyándonos en este dato.

Aplicamos el cambio de variable dependiente $y = y_1 \cdot u = x \cdot u$, con lo cual tenemos

$$y' = u + x \cdot u' \quad ; \quad y'' = 2u' + x \cdot u''$$

y sustituyendo todo en la EDO dada, tenemos:

$$x^2 \cdot (\ln x - 1) \cdot (2u' + x \cdot u'') - x \cdot (u + x \cdot u') + x \cdot u = 0$$

o sea, $x^3 \cdot (\ln x - 1) \cdot u'' + x^2 \cdot (2 \ln x - 3) \cdot u' = 0$, que simplificada se reduce a

$$x \cdot (\ln x - 1) \cdot u'' + (2 \ln x - 3) \cdot u' = 0$$

la cual es lineal de orden 2, pero con u ausente.

Por tanto, podemos hacer el nuevo cambio $u' = p$ y $u'' = p'$, quedando la primera EDO de primer orden $x \cdot (\ln x - 1) \cdot p' + (2 \ln x - 3) \cdot p = 0$, que es de variables separables (por ser lineal y homogénea). Su solución general se obtiene separando las variables y haciendo en la integral en x el cambio de variable $\ln x = t$, para llegar a:

$$\ln|p| = -2 \cdot \ln x + \ln(\ln x - 1) + \ln C_1 \quad (C_1 > 0), \text{ o bien, quitando logaritmos}$$

$$p \cdot x^2 = C_1 \cdot (\ln x - 1) \quad (C_1 \neq 0)$$

Ahora deshacemos el último cambio $u' = p$ y tenemos $u' \cdot x^2 = C_1 \cdot (\ln x - 1)$ ($C_1 \neq 0$) que es la segunda EDO de primer orden, la cual es otra vez de variables separables. Su solución general se obtiene haciendo de nuevo el cambio de variable $\ln x = t$ en la integral que hay que resolver, obteniendo:

$$u = -C_1 \cdot \frac{\ln x}{x} + C_2 \quad (C_1 \neq 0)$$

Finalmente, deshacemos el primer cambio $y = x \cdot u$ y queda

$$y = -C_1 \cdot \ln x + C_2 \cdot x \quad (C_1 \neq 0)$$

que es la solución general de la EDO de segundo orden dada.

Comprobemos la solución general obtenida:

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

De $y = -C_1 \cdot \ln x + C_2 \cdot x$ se obtiene $y' = -\frac{C_1}{x} + C_2$ e $y'' = \frac{C_1}{x^2}$. Y sustituyendo todo en la EDO dada, que es $x^2 \cdot (\ln x - 1) \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0$, resulta:

$$C_1(\ln x - 1) + C_1 - C_2x - C_1 \cdot \ln x + C_2x = 0 \quad (\text{identidad } 0 = 0)$$

Obsérvese que tomando $C_1 = 0$, las funciones que se obtienen son $y = C_2 \cdot x$, siendo $y' = C_2$ e $y'' = 0$, de modo que al sustituir en la EDO resulta $-x \cdot C_2 + C_2 \cdot x = 0$ (identidad $0 = 0$). Es decir, que la restricción $C_1 \neq 0$ que arrastrábamos (consecuencia de una integración que hicimos en el proceso) puede quitarse de la solución general obtenida al final.

Ejemplo 2: Hallar la solución general de $(4x^2 - x) \cdot y'' + (4x - 2) \cdot y' - 4y = 12x^2 - 6x$, sabiendo que $y = 1/x$ es solución particular de la EDO homogénea correspondiente (trabajar con $x > 1/4$).

Esta EDO lineal de segundo orden no puede resolverse por estar y ausente, ni por estar x ausente, ni por ser homogénea en las variables y , y' e y'' (pues lineal pero no es homogénea). El único modo de proceder es aprovechar el dato de que la función $y_1 = 1/x$ es solución de la EDO homogénea asociada (que se puede comprobar sin problemas).

Entonces, hacemos el cambio de variable $y = y_1 \cdot u = \frac{u}{x}$, siendo sus derivadas $y' = \frac{x \cdot u' - u}{x^2}$ e $y'' = \frac{x^2 \cdot u'' - 2x \cdot u' + 2 \cdot u}{x^3}$.

Sustituimos todo en la EDO dada y después de operar y simplificar nos queda:

$$(4x - 1) \cdot u'' - 4 \cdot u' = 12x^2 - 6x \quad (\text{EDO de segundo orden con } u \text{ ausente})$$

Hacemos entonces el nuevo cambio $u' = p$ y $u'' = p'$, con lo cual obtenemos la primera EDO de primer orden:

$$(4x - 1) \cdot p' - 4 \cdot p = 12x^2 - 6x$$

que podemos escribir $p' - \frac{4}{4x-1} \cdot p = \frac{12x^2-6x}{4x-1}$ (forma típica de una lineal de primer orden)

que resolvemos utilizando el factor integrante $1/(4x - 1)$, y resulta su solución general

$$p = (12x^2 - 3x)/4 + 3/16 + C_1 \cdot (4x - 1)$$

Deshacemos el cambio de variable $u' = p$ y tenemos la segunda EDO de primer orden

$$u' = (12x^2 - 3x)/4 + 3/16 + C_1 \cdot (4x - 1)$$

que integramos directamente y se obtiene $u = x^3 - \frac{3x^2}{8} + \frac{3x}{16} + C_1 \cdot (2x^2 - x) + C_2$

Finalmente, deshacemos el cambio inicial $y = u/x$, obteniendo:

$$y = x^2 - \frac{3x}{8} + \frac{3}{16} + C_1 \cdot (2x - 1) + C_2 \cdot \frac{1}{x}$$

que se puede escribir de un modo más ordenado como $y = x^2 + \left(2C_1 - \frac{3}{8}\right)x + \frac{C_2}{x} + \left(\frac{3}{16} - C_1\right)$ y si sustituimos $\frac{16C_1-3}{16}$ por una nueva constante C_1 , podemos escribir de una forma más sencilla la expresión de la solución general de la EDO de segundo orden dada: $y = x^2 + 2C_1x + \frac{C_2}{x} - C_1$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE UNO

Comprobación: Tenemos $y = x^2 + 2C_1x + \frac{C_2}{x} + C_1$, $y' = 2x + 2C_1 - \frac{C_2}{x^2}$ e $y'' = 2 + \frac{2C_2}{x^2}$.

Pues bien, sustituyendo estas expresiones en el primer miembro de la EDO dada y después de efectuar todas las operaciones algebraicas necesarias, se llega finalmente la expresión $\frac{12x^4 - 6x^3}{x^2}$. Pero, como habíamos supuesto desde el principio $x > 1/4$, al ser $x \neq 0$ la expresión anterior es equivalente a $12x^2 - 6x$ (que es el segundo miembro de la EDO).

Por tanto, queda comprobado que la solución general que habíamos obtenido, al sustituirse junto con sus derivadas en la EDO dada, nos da una identidad matemática para cualesquiera valores de las constantes reales C_1 y C_2 .

Por tanto, representa una doble infinidad de “soluciones particulares” de la ecuación diferencial lineal de segundo orden que queríamos resolver.

Seleccionemos finalmente una de esas infinitas “soluciones particulares”: Queremos la que cumpla las “condiciones iniciales” $y(2) = -1$ e $y'(2) = 5$ (o sea, la solución debe tener una gráfica que pase por el punto $(2, -1)$, teniendo una pendiente 5 en dicho punto):

La condición $y(2) = -1$ implica que debe cumplirse la ecuación: $-1 = 4 + 4C_1 + \frac{C_2}{2} + C_1$, es decir, debe cumplirse $5C_1 + \frac{C_2}{2} = -5$.

Y la condición $y'(2) = 5$ implica que debe cumplirse la ecuación: $5 = 4 + 2C_1 - \frac{C_2}{4}$, o sea ordenando, debe cumplirse $2C_1 - \frac{C_2}{4} = 1$.

Resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas definido por las dos ecuaciones anteriores, resultan los valores $C_1 = -1/3$; $C_2 = -20/3$.

Conclusión: La “solución particular” buscada es $y = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{20}{3x} - \frac{1}{3}$.
