TRIGONOMETRÍA PLANA

Razones trigonométricas principales de un ángulo agudo

Se definen el seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo (menor que un recto), mediante un triángulo rectángulo que lo incluya como uno de sus ángulos: Basta que tracemos por un punto cualquiera de uno de los lados del ángulo agudo β la recta perpendicular al otro lado del ángulo, para que tengamos un cierto triángulo rectángulo ABC, donde podemos llamar A al vértice que corresponde al ángulo recto, B el vértice del ángulo agudo β considerado y C el tercer vértice. (Hacer un dibujo del mencionado triángulo ABC).

Entonces, si llamamos a a la longitud de la hipotenusa del triángulo ($a = \overline{BC}$), llamamos b a la longitud del cateto opuesto al ángulo β ($b = \overline{AC}$) y llamamos c a la longitud del cateto adyacente al ángulo β ($c = \overline{AB}$), se tienen las siguientes definiciones:

$\boxed{sen\,\beta = \frac{b}{a}}$ (cociente de longitudes: cateto opuesto entre hipotenusa)

$\boxed{cos\,\beta = \frac{c}{a}}$ (cociente de longitudes: cateto adyacente entre hipotenusa)

$\boxed{tan\,\beta = \frac{b}{c}}$ (cociente de longitudes: cateto opuesto entre cateto adyacente)

Por semejanza de triángulos, es fácil ver que estos valores no dependen del tamaño del triángulo rectángulo que hayamos construido, sino del tamaño o amplitud del ángulo agudo y se llaman "razones trigonométricas principales" de dicho ángulo agudo β, ("razones" porque son cocientes; "trígonométricas" porque se usan en Trigonometría, que es la parte de la Geometría que se dedica a encontrar la medida de los lados y de los ángulos de diferentes triángulos; y "principales" porque hay otras tres "razones" menos importantes: secante = recíproca del coseno; cosecante = recíproca del seno, y cotangente = recíproca de la tangente).

Como se sabe, la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180º (o π radianes). Por tanto, los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90º (o $\pi/2$ radianes) y se llaman "ángulos complementarios". Entonces, si llamamos γ al otro ángulo agudo del triángulo ABC (que habíamos construido para definir seno, coseno y tangente del ángulo agudo β que teníamos), se tendrá que $\beta + \gamma = 90^o$ y además tenemos:

$\boxed{sen\,\gamma = \frac{c}{a}}$ (c es el cateto opuesto a γ, como podemos comprobar en el triángulo)

$\boxed{cos\,\gamma = \frac{b}{a}}$ (b es el cateto adyacente a γ, como podemos comprobar en el triángulo)

Y por tanto, $\boxed{tan\,\gamma = \frac{c}{b}}$. (Obsérvese que $\boxed{tan\,\gamma = \frac{sen\,\gamma}{cos\,\gamma}}$, así como era $\boxed{tan\,\beta = \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}}$).

Entonces, $\boxed{\text{el seno de } \gamma \text{ coincide con el coseno de } \beta}$ y $\boxed{\text{el coseno de } \gamma \text{ coincide con el seno de } \beta}$

Y si llamamos "cotangente de β" al cociente c/b , será "cotangente de γ" el cociente b/c , con lo cual $\boxed{\text{la tangente de } \gamma \text{ coincide con la cotangente de } \beta}$ (escrito $tan\,\gamma = cotan\,\beta$).

Nota: Recordemos que un ángulo mide **1 radián** si, colocado su vértice en el centro de una circunferencia cualquiera, **dicho ángulo determina entre sus lados un arco de esa circunferencia que tenga igual longitud que el radio de la misma**. Por tanto, un ángulo llano medirá π radianes, un ángulo recto medirá $\pi/2$ radianes y un ángulo de 360º medirá 2π radianes (en efecto, la longitud de toda la circunferencia es $2\pi r$, y, como a un arco de la circunferencia de longitud r le corresponde un ángulo central que mide 1 radián, al arco de circunferencia que mide $2\pi r$ corresponderá un ángulo central que mide 2π radianes). Y el valor en grados de un ángulo de 1 radián es aproximadamente 57’3º ($360 \div 2\pi = 57'295\ldots$).

Identidades trigonométricas principales

$$\boxed{sen^2\beta + cos^2\,\beta \equiv 1} \quad ; \quad \boxed{tan\,\beta \equiv \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}}$$

En virtud del Teorema de Pitágoras aplicado al anterior triángulo rectángulo ABC se cumple $b^2 + c^2 = a^2$, luego también se cumplirá $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$, pero $sen\,\beta = \frac{b}{a}$ y $cos\,\beta = \frac{c}{a}$, luego la primera igualdad es cierta para todo ángulo agudo β.
Y la segunda igualdad ya la hemos mencionado y es consecuencia de una propiedad de los cocientes ($\frac{b}{c} = \frac{b/a}{c/a}$ si es $a \neq 0$, donde $\frac{b}{c} = tan\,\beta$, $\frac{b}{a} = sen\,\beta$ y $\frac{c}{a} = cos\,\beta$) .
Pero ambas igualdades se cumplen también para el ángulo γ del mismo triángulo y se cumplen para cualquier ángulo agudo que consideremos, construyendo el correspondiente triángulo rectángulo (por eso se llaman identidades y se usa el signo ≡ en vez del simple =).

Valores notables del seno, coseno y tangente de ángulos agudos

Se determinan sin mucho problema los siguientes valores del seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de 30º, 45º y 60º (o bien $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$ radianes):

$$sen\,30^o = 1/2 \qquad cos\,30^o = \sqrt{3}/2 \qquad tan\,30^o = 1/\sqrt{3}$$

$$sen\,45^o = \sqrt{2}/2 \qquad cos\,45^o = \sqrt{2}/2 \qquad tan\,45^o = 1$$

$$sen\,60^o = \sqrt{3}/2 \qquad cos\,60^o = 1/2 \qquad tan\,60^o = \sqrt{3}$$

En efecto, si tomamos un triángulo equilátero (los tres lados de longitud igual l y los tres ángulos de 60º) y lo descomponemos en dos triángulos rectángulos iguales mediante una de sus alturas, uno cualquiera de esos triángulos rectángulos tendrá un ángulo de 60º (el que se opone a la altura que habíamos trazado) y el otro agudo será de 30º (mitad del de 60º inicial que queda partido en dos por la altura); además, la altura h trazada será uno de sus catetos, el otro cateto tendrá longitud $l/2$ y su hipotenusa tendrá longitud l. (Ver esto en una figura). Por tanto, $h^2 + (l/2)^2 = l^2$, con lo cual obtenemos $\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l}$. Pero entonces se obtienen fácilmente los valores de la primera y la tercera líneas anteriores, aplicando las definiciones iniciales de seno, coseno y tangente para el ángulo de 30º y para el ángulo de 60º en uno cualquiera de esos dos triángulos rectángulos.

Y si tomamos un triángulo rectángulo que sea isósceles (los dos catetos iguales y sus dos ángulos agudos de 45º), llamando a a su hipotenusa y b a uno de sus catetos, se tendrá $a^2 = b^2 + b^2 = 2 \cdot b^2$, con lo cual se tiene $a = \sqrt{2} \cdot b$, o bien $\boxed{b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a}$. Y de aquí se obtienen fácilmente los valores de la segunda línea anterior.

Proyección de un segmento sobre una recta

Cuando se obtiene la “proyección perpendicular” de un segmento *AB* sobre una recta r cualquiera que no lo contenga y que no sea paralela ni sea perpendicular a la que lo contiene, obtenemos otro segmento $A'B'$ situado sobre r. (Hacer dibujo correspondiente). Pues bien, la relación entre las longitudes de ambos segmentos es la siguiente:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot cos\,\alpha$$

siendo α el ángulo agudo que forma la recta que contiene al segmento AB con la recta r donde lo hayamos proyectado. En efecto, basta desplazar el punto A sobre la recta que contiene al segmento AB hasta el punto P donde se corten las dos rectas, para tener un triángulo rectángulo donde α es uno de sus ángulos agudos, $\overline{AB}$ es su hipotenusa y $\overline{A'B'}$ es el cateto adyacente al ángulo α, con lo cual $cos\,\alpha = \overline{A'B'}/\overline{AB}$.

Ahora, si la recta r fuese paralela a la recta que contiene al segmento AB, obviamente sería $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, con lo cual tendrá que ser $cos\,\alpha = 1$ para que se siga cumpliendo la fórmula anterior (por ello, cuando dos rectas son paralelas, se considera que el ángulo que forman es de amplitud 0º y luego veremos que $cos\,0º = 1$).

Y en el caso en que ambas rectas sean perpendiculares, también es cierta la fórmula anterior, pues en ese caso sería $\overline{A'B'} = 0$ y $\alpha = 90^o$. (Pero también veremos que $cos\,90º = 0$).

Seno y coseno de un ángulo orientado cualquiera

Dado un "ángulo orientado" α cualquiera (de amplitud cero, agudo, recto, obtuso entre recto y llano, llano, obtuso superior a un llano o de amplitud todo lo grande queramos), donde consideramos uno de sus lados como "lado inicial" y el otro lado como "lado final", es decir, que **tiene un sentido establecido** (por lo cual le decimos “orientado”), consideraremos que ese sentido es “positivo” si es contrario al movimiento de las manecillas de un reloj (se llama “sentido antihorario”) y lo consideraremos “negativo” si es el de las manecillas de un reloj (llamado “sentido horario”).

Pues bien, podemos definir siempre el seno y el coseno de un “ángulo orientado” cualquiera del modo siguiente:

1) Tomamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal en el plano, con escalas iguales en ambos ejes.

2) Representamos en dicho sistema la circunferencia de centro el origen y radio 1 (llamada “circunferencia trigonométrica”), de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

3) Transportamos el ángulo orientado α sin cambiar su sentido, de forma que llevamos su vértice sobre el origen de coordenadas y su "lado inicial" sobre el semieje positivo OX. (Conviene hacer un dibujo con un ángulo orientado “positivo” ya colocado sobre el sistema de coordenadas y repetir el dibujo para un ángulo orientado “negativo”).

4) Consideramos el punto del "lado final" de α que esté situado sobre la circunferencia trigonométrica (ese punto es único). Llamemos a ese punto P_α , el cual tendrá unas únicas coordenadas (x_α, y_α). (Conviene localizar dicho punto en los casos α positivo y α negativo; siendo el ángulo de 0º, agudo, recto, obtuso no mayor que un llano, llano, obtuso mayor que un llano entre 180º y 270º, ángulo de 270º, obtuso entre 270º y 360º, ángulo de 360º y obtuso mayor de 360º).

5) Definimos ahora: $\boxed{cos\,\alpha = x_\alpha}$ y $\boxed{sen\,\alpha = y_\alpha}$

Obsérvese que si α es agudo positivo, P_α estará en el primer cuadrante del sistema de coordenadas tomado y tendremos un triángulo rectángulo O$P_\alpha P'_\alpha$, donde P'_α es la proyección perpendicular de P_α sobre el eje OX, cuya hipotenusa es de longitud 1 y donde el cateto opuesto al ángulo α

medirá entonces $sen\,\alpha$ (ordenada y_α) y el cateto adyacente al ángulo α medirá $cos\,\alpha$ (abscisa x_α). Con lo cual, la definición anterior concuerda con lo dicho inicialmente para ángulos agudos.

Pero hemos definido ahora el coseno y el seno **de cualquier "ángulo orientado"**. Y para obtener la tangente de cualquier "ángulo orientado" basta dividir su seno entre su coseno (si éste no vale cero). Por tanto, ya vemos que no tendrán tangente los ángulos cuyo coseno valga cero.

Así resultan los siguientes valores (comprobarlos viendo dónde está el punto P_α sobre la circunferencia trigonométrica):

$$sen\,0º = 0 \quad ; \quad cos\,0º = 1 \quad ; \quad tan\,0º = 0$$
$$sen\,90º = 1 \quad ; \quad cos\,90º = 0 \quad ; \quad tan\,90º \text{ no existe}$$
$$sen\,180º = 0 \quad ; \quad cos\,180º = -1 \quad ; \quad tan\,180º = 0$$
$$sen\,270º = -1 \quad ; \quad cos\,270º = 0 \quad ; \quad tan\,270º \text{ no existe}$$
$$sen\,360º = 0 \quad ; \quad cos\,360º = 1 \quad ; \quad tan\,360º = 0$$

Obsérvese ahora que, al ser la ecuación de la circunferencia trigonométrica $x^2 + y^2 = 1$, para cualquier ángulo orientado α será $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$, ya que el punto P_α está sobre la misma. Pero entonces siguen cumpliéndose las identidades

$$\boxed{cos^2\,\alpha + sen^2\alpha \equiv 1} \quad ; \quad \boxed{tan\,\alpha \equiv \frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}} \text{ (si } cos\,\alpha \neq 0\text{).}$$

Además, se observa fácilmente que el valor máximo que pueden alcanzar $cos\,\alpha$ y $sen\,\alpha$ es 1, y el valor mínimo que pueden alcanzar ambas razones trigonométricas es -1.

Por tanto, es siempre:

$$\boxed{-1 \leq cos\,\alpha \leq 1} \quad \text{y} \quad \boxed{-1 \leq sen\,\alpha \leq 1}$$

En cambio, el valor de $tan\,\alpha$ puede ser positivo, tan grande o pequeño como se quiera; puede ser negativo, tan grande o pequeño en valor absoluto como se quiera, y $tan\,\alpha$ es cero en muchas ocasiones. Es decir, la tangente de un ángulo puede ser cualquier número real.

Razones trigonométricas de ángulos que terminan en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto

1) Si el ángulo α cumple $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (o bien 90º < α < 180º), es decir que $\boxed{P_\alpha}$ está en el segundo cuadrante del sistema de coordenadas, puede relacionarse fácilmente con su "ángulo suplementario" $\beta = \pi - \alpha$ del primer cuadrante, de modo que los puntos P_α y P_β (simétricos respecto al eje OY) tienen abscisas de signos contrarios y ordenadas iguales (comprobarlo sobre la circunferencia trigonométrica). Por tanto:

$$\boxed{cos\,\alpha = -\,cos\,\beta = -cos(\pi - \alpha)} \quad ; \quad \boxed{sen\,\alpha = sen\,\beta = sen(\pi - \alpha)}$$
$$\boxed{tan\,\alpha = -\,tan\,\beta = -tan(\pi - a)}$$

Ejemplos notables:

$$cos\,120^o = -\,cos\,60^o = -\frac{1}{2}\,;\; sen\,120^o = sen\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; tan\,120^o = -\,tan\,60^o = -\sqrt{3}$$

$$cos\,135^o = -\,cos\,45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; sen\,135^o = sen\,45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; tan\,135^o = -\,tan\,45^o = -1$$

$$cos\,150º = -\,cos\,30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; sen\,150^o = sen\,30^o = \frac{1}{2}\,;\; tan\,150^o = -\,tan\,30^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) Si el ángulo α cumple $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (o bien 180º < α < 270º), es decir que $\boxed{P_\alpha}$ está en el tercer cuadrante, puede relacionarse fácilmente con el ángulo $\beta = \alpha - \pi$ del primer cuadrante, de modo que los puntos P_α y P_β (simétricos respecto al origen) tienen ambas coordenadas de signos contrarios (comprobarlo sobre la circunferencia trigonométrica). Por tanto:

$$\boxed{cos\,\alpha = -\,cos\,\beta = -cos(\alpha - \pi)} \quad ; \quad \boxed{sen\,\alpha = -sen\,\beta = -sen(\alpha - \pi)}$$
$$\boxed{tan\,\alpha = tan\,\beta = tan(\alpha - \pi)}$$

Ejemplos notables:

$$cos\,210^o = -\,cos\,30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; sen\,210^o = -sen\,30^o = -\frac{1}{2} \;;\; tan\,210^o = tan\,30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$cos\,225^o = -\,cos\,45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; sen\,225^o = -sen\,45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; tan\,225^o = tan\,45^o = 1$$

$$cos\,240^o = -\,cos\,60^o = -\frac{1}{2} \;;\; sen\,240^o = -sen\,60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; tan\,240^o = tan\,60^o = \sqrt{3}$$

3) Si el ángulo α cumple $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ (o bien 270º < α < 360º), es decir que $\boxed{P_\alpha}$ está en el cuarto cuadrante, puede relacionarse fácilmente con el ángulo $\beta = 2\pi - \alpha$ del primer cuadrante, de modo que los puntos P_α y P_β (simétricos respecto al eje OX) tienen abscisas iguales y ordenadas de signos contrarios (comprobarlo sobre la circunferencia trigonométrica). Por tanto:

$$\boxed{cos\,\alpha = cos\,\beta = cos(2\pi - \alpha)} \quad ; \quad \boxed{sen\,\alpha = -sen\,\beta - sen(2\pi - \alpha)}$$
$$\boxed{tan\,\alpha = -\,tan\,\beta = -tan(2\pi - \alpha)}$$

Ejemplos notables:

$$cos\,300^o = cos\,60^o = \frac{1}{2} \;;\; sen\,300^o = -sen\,60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; tan\,300^o = -\,tan\,60^o = -\sqrt{3}$$

$$cos\,315^o = cos\,45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; sen\,315^o = -sen\,45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; tan\,315^o = -\,tan\,45^o = -1$$

$$cos\,330^o = cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; sen\,330^o = -sen\,30^o = -\frac{1}{2} \;;\; tan\,330^o = -\,tan\,30^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) Si el ángulo α es negativo (sentido de las manecillas del reloj), siempre podrá usarse su relación con el ángulo positivo β de signo contrario ($\beta = -\alpha$), de modo que los puntos P_α y P_β tendrán también las mismas abscisas y ordenadas de signos contrarios (comprobarlo sobre la circunferencia trigonométrica). Por tanto:

$$\boxed{cos\,\alpha = cos\,\beta = cos(-\alpha)} \quad ; \quad \boxed{sen\,\alpha = -sen\,\beta = -sen(-\alpha)}$$
$$\boxed{tan\,\alpha = -\,tan\,\beta = -tan(-\alpha)}$$

Periodicidad de las razones trigonométricas principales

Si a un ángulo orientado α le sumamos o le restamos un ángulo de 2π radianes (una vuelta completa a la circunferencia trigonométrica), se obtienen otros ángulos con el mismo coseno y con el mismo seno, puesto que los puntos P_α, $P_{\alpha+2\pi}$ y $P_{\alpha-2\pi}$ coinciden. Igual sucede al sumar o restar un número mayor de vueltas completas. Por tanto:

$\boxed{cos(\alpha + 2k\pi) = cos\,\alpha}$; $\boxed{sen(\alpha + 2k\pi) = sen\,\alpha}$ (k: número entero positivo o negativo)

O bien, cuando α se mida en grados:

$\boxed{cos(\alpha + k \cdot 360^o) = cos\,\alpha}$; $\boxed{sen(\alpha + k \cdot 360^o) = sen\,\alpha}$ (k: entero positivo o negativo)

Esto se expresa diciendo que las razones trigonométricas "coseno" y "seno" son periódicas de periodo 2π (cuando los ángulos se dan en radianes) o de periodo 360º (cuando los ángulos se dan en grados).

En cambio, si a α le sumamos o le restamos un ángulo de π radianes (media vuelta a la circunferencia trigonométrica), se obtienen otros ángulos con la misma tangente (suponiendo que α tuviese tangente), porque habrán cambiado de signo el seno y el coseno, lo cual no afecta a la tangente. Igual sucede al sumar o restar un número mayor de medias vueltas. Por tanto:

$\boxed{tan(\alpha + k\pi) = tan\,\alpha}$, si $cos\,\alpha \neq 0$ (k: número entero positivo o negativo)

O bien, cuando α se mide en grados:

$\boxed{tan(\alpha + k \cdot 180^o) = tan\,\alpha}$, si $cos\,\alpha \neq 0$ (k: número entero positivo o negativo)

Lo cual se expresa diciendo que la razón trigonométrica "tangente" es periódica de periodo π (cuando los ángulos se dan en radianes) o de periodo 180º (cuando los ángulos se dan en grados).

Razones trigonométricas principales de sumas y diferencias de ángulos

Cuando intentamos calcular el seno, el coseno o la tangente del ángulo suma $\alpha + \beta$ o del ángulo diferencia $\alpha - \beta$ (siendo α y β ángulos orientados, medidos los dos en grados o medidos los dos en radianes), nos damos cuenta que no puede ser $sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha + sen\,\beta$, porque si fuesen $sen\,\alpha > 1/2$ y $sen\,\beta > 1/2$, resultaría el valor de $sen(\alpha + \beta)$ mayor que 1 (lo cual es imposible).

Se demuestra matemáticamente que:

$\boxed{sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta}$; $\boxed{sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta}$

$\boxed{cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$; $\boxed{cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$

$\boxed{tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\quad \cdot tan\,\beta}}$; $\boxed{tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\quad \cdot tan\,\beta}}$

Nota: Estas son **nuevas identidades trigonométricas**, que se agregan a las dos básicas que dimos anteriormente.

Ejemplos:

$$sen\,75^o = sen(30^o + 45^o) = sen\,30^o \cdot cos\,45º + cos\,30^o \cdot sen\,45^o = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$cos\,15^o = cos(45^o - 30^o) = cos\,45^o \cdot cos\,30º + sen\,45^o \cdot sen\,30^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(Han dado iguales porque 75º y 15º son ángulos complementarios: el seno de uno es el coseno del otro).

Razones principales de ángulos doble

Las razones seno, coseno y tangente del ángulo 2α se obtienen haciendo $\alpha = \beta$ en las expresiones anteriores de $sen(\alpha + \beta)$, $cos(\alpha + \beta)$ y $tan(\alpha + \beta)$.

Así tenemos:

$$\boxed{sen\,2\alpha = 2 \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha} \quad ; \quad \boxed{cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\alpha} \quad ; \quad \boxed{tan\,2\alpha = \frac{2 \cdot tan}{1 - tan^2\,\alpha}}$$

Nota: Estas son **nuevas identidades trigonométricas** de uso muy frecuente.

Ejemplos: $$sen\,\pi = sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot sen\frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$cos\frac{\pi}{2} = cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = cos^2\frac{\pi}{4} - sen^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tan\frac{2\pi}{3} = tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 \cdot tan\frac{\pi}{3}}{1 - tan^2(\frac{\pi}{3})} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Finalmente, si en la identidad que nos daba el coseno de 2α se sustituye $cos^2\,\alpha$ por $1 - sen^2\alpha$, resulta $cos\,2\,\alpha = 1 - 2 \cdot sen^2\alpha$, de donde se obtiene: $\boxed{sen^2\alpha = \frac{1 - cos}{2}}$ (**nueva identidad** que se usa mucho en Cálculo Integral).

Y si en la misma identidad que nos daba el coseno de 2α sustituimos $sen^2\alpha$ por $1 - cos^2\,\alpha$, resulta $cos\,2\,\alpha = 2 \cdot cos^2\,\alpha - 1$, de donde se obtiene: $\boxed{cos^2\,\alpha = \frac{1 + cos}{2}}$ (**nueva identidad** que se usa mucho en Cálculo Integral).

MUY IMPORTANTE: Cuando en Análisis Matemático se habla de "las funciones reales de variable real" $y = sen\,x$, $y = cos\,x$ o $y = tan\,x$, la variable independiente "x " representa siempre medidas de ángulos en radianes (nunca medidas en grados).
De igual modo, cuando se trata de "las funciones reales de variable real $y = arc\,sen\,x$, $y = arc\,cos\,x$ o $y = arc\,tan\,x$, la variable dependiente "y " representa también medidas de ángulos en radianes.
Por tanto, en Análisis Matemático, lo cual incluye el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, hay que usar siempre la calculadora en "modo radianes" (muchos alumnos se olvidan de esto y hacen mal muchos problemas al usar la calculadora dejando el modo en grados).
Por ejemplo, el límite de $sen\,x/x$ es 1 cuando x tiende a cero, solamente si x viene dado en radianes (por ejemplo, si tomamos $x = 0'1$ radianes, el cociente vale 0'99833…, muy cerca de 1; pero si tomamos $x = 0'1$ grados, el mismo cociente da 0'01745…, muy cerca de cero y no de 1); así mismo, la derivada de la función $sen\,x$ es la función $cos\,x$, solamente si x representa ángulos en radianes; también, los desarrollos de Taylor y de Maclaurin correspondientes a las distintas "funciones trigonométricas" son ciertos solamente si la variable independiente representa radianes y no grados; etc…

Los teoremas del seno y del coseno

Hay dos teoremas fundamentales para la determinación de los lados y los ángulos de triángulos cualesquiera, objeto principal de la Trigonometría.

TEOREMA DEL SENO: Dado un triángulo cualquiera de lados a, b y c, que se oponen respectivamente a los ángulos α, β y γ, se tiene:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

Nota 1: Obsérvese que $sen\,\alpha$, $sen\,\beta$ y $sen\,\gamma$ son siempre positivos, pues las tres ángulos serán agudos si el triángulo es acutángulo; uno será recto y los otros dos serán agudos si el triángulo es rectángulo, o bien habrá un ángulo obtuso (no mayor que un llano, o sea del segundo cuadrante sobre la circunferencia trigonométrica y por tanto con seno positivo) y los otros dos serán agudos si el triángulo es obtusángulo. Recuérdese además que la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre 180º o π radianes.

Nota 2: Cuando sea α recto, a será la hipotenusa y se tendrá $sen\,\alpha = 1$. Con lo cual, el Teorema nos dice que $sen\,\beta = b/a$ (cateto opuesto a β, que es b, dividido por la hipotenusa a) y nos dice que $sen\,\gamma = c/a$ (cateto opuesto a γ, que es c, dividido por la hipotenusa a). Lo cual sabemos que es cierto, pues fue la definición inicial del seno para un ángulo agudo.

Nota 3: La demostración del Teorema anterior es muy simple. Basta considerar la altura del triángulo dado que corresponde a uno de sus lados, la cual define dos triángulos rectángulos donde dicha altura es un cateto común, mientras que los dos lados que no corresponden a la altura trazada son las hipotenusas respectivas; además, los ángulos del triángulo que no corresponden a la altura trazada forman parte de ambos triángulos rectángulos si son agudos (y en el caso de que uno de ellos sea obtuso, formará parte de uno de los triángulos su suplementario, que es agudo y tiene el mismo valor del seno). (Es fundamental dibujar varios triángulos y ver lo que estamos diciendo).
Entonces, si trazamos por ejemplo la altura h_c correspondiente al lado c del triángulo dado, uno de los triángulos rectángulos definidos por la altura h_c tendrá a α como ángulo agudo opuesto a h_c y tendrá al lado b como su hipotenusa (ver en una figura adaptada a este ejemplo), mientras que el otro triángulo rectángulo tendrá a β como ángulo agudo opuesto a h_c y tendrá al lado a como su hipotenusa (en el caso de que α sea obtuso o β sea obtuso, el ángulo agudo opuesto a h_c en uno de los triángulos rectángulos será el suplementario de α o el suplementario de β, respectivamente, pero estos ángulos tienen igual valor del seno que α o β). Por tanto, podrá escribirse $\boxed{sen\,\alpha = h_c/b}$ y también podrá escribirse $\boxed{sen\,\beta = h_c/a}$, con lo cual, al eliminar h_c entre las dos igualdades anteriores, se tiene la siguiente relación $\boxed{a \cdot sen\,\beta = b \cdot sen\,\alpha}$, de donde resulta $\boxed{\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}}$.
Y trazando otra de las alturas, se llega de modo análogo a la relación $\boxed{a \cdot sen\,\gamma = c \cdot sen\,\alpha}$ o a la realción $\boxed{b \cdot sen\,\gamma = c \cdot sen\,\beta}$, de donde resulta $\boxed{\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma}}$ o bien $\boxed{\frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}}$. En conclusión, la igualdad de los tres cocientes es cierta, como dice el Teorema.

Y el otro teorema fundamental es

TEOREMA DEL COSENO: Sea un triángulo cualquiera de lados a, b y c, que se oponen respectivamente a los ángulos α, β y γ. Se cumplen las tres relaciones siguientes:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha} \;;\; \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\beta} \;;\; \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma}$$

Nota 1: Si el triángulo es rectángulo con $\alpha = 90º$, la primera relación será $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras, con a hipotenusa). Si es $\beta = 90º$ será $b^2 = a^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras, con b hipotenusa). Y si es $\gamma = 90º$ será $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras, con c hipotenusa). Por tanto, el teorema de Pitágoras es un caso particular del Teorema del Coseno.

Nota 2: Si el triángulo es obtusángulo y fuese por ejemplo α el ángulo obtuso, el coseno respectivo será negativo porque el ángulo será mayor de 90º y menor de 180º (segundo cuadrante del sistema de coordenadas sobre la circunferencia trigonométrica), pero entonces a^2 será mayor que la suma $b^2 + c^2$.
En resumen, si los tres ángulos son agudos, el cuadrado de cualquier lado será menor que la suma de los cuadrados de los otros dos. Si hay un ángulo recto, se cumple el Teorema de Pitágoras, con lo cual el lado que se opone al ángulo recto (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Y si hay un ángulo obtuso, el cuadrado del lado opuesto será mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Nota 3: Para la demostración, por ejemplo, de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha$, con α agudo, basta trazar la altura h_c que partirá al lado c en dos segmentos (uno de los cuales es la proyección m del lado b sobre el lado c y el otro será $c - m$, donde sabemos que $m = b \cdot cos\,\alpha$.
Pero entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que incluye como cateto al segmento $c - m$ y como hipotenusa al lado a (ver esto en una figura), se tendrá: $a^2 = {h_c}^2 + (c - m)^2 = {h_c}^2 + c^2 + m^2 - 2cm$. Pero, en el otro triángulo rectángulo se tiene también por el Teorema de Pitágoras ${h_c}^2 = b^2 - m^2$; con lo cual, sustituyendo ${h_c}^2$ en la expresión anterior, se llega a $a^2 = (b^2 - m^2) + c^2 + m^2 - 2cm$. O sea, $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cm}$. Pero, al ser $m = b \cdot cos\,\alpha$, finalmente tenemos $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot cos\,\alpha}$.
Y cuando sea α obtuso, la altura h_c que considerábamos ya no parte al lado c en dos segmentos más pequeños, sino que agrega a c otro segmento m, que sigue siendo la proyección del lado b sobre la recta que contiene al lado c, con lo cual ahora será $a^2 = {h_c}^2 + (c + m)^2$ (verlo en la correspondiente figura). Y otra vez es ${h_c}^2 = b^2 - m^2$. Con lo cual se llega a $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$. Pero en este caso se tiene que $m = b \cdot cos(\pi - \alpha) = -\, b \cdot cos\,\alpha$, con lo cual llegamos a la misma expresión $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot cos\,\alpha}$.
Y las demostraciones de las otras dos relaciones dadas por el Teorema del Coseno se hacen de forma similar.

Resolución de triángulos

"Resolver un triángulo" es conocer las longitudes de sus tres lados y conocer las amplitudes de sus tres ángulos.

Para resolver un triángulo hay que conocer tres datos del mismo, incluido siempre algún lado. Y la solución de cada problema consiste en obtener, a partir de los datos, los valores de los tres elementos que se desconocen. Hay cuatro casos básicos de este problema.

Primer caso: Se conocen las longitudes de los tres lados a, b y c. Hay que hallar los tres ángulos.

Solución: Dos de los ángulos se obtienen aplicando el Teorema del Coseno (usando dos de sus tres relaciones). El tercer ángulo será lo que le falte a la suma de los dos obtenidos para llegar a 180º o a π radianes. Pero el Teorema del coseno determina el coseno del ángulo que queramos obtener y entonces **el ángulo vendrá dado por la función arco coseno** (cos^{-1}), con la calculadora en modo grados sexagesimales [modo DEG], cuyos valores estarán entre 0º y 180º (si queremos resultados en grados), o en modo radianes [modo RAD], cuyos valores están entre 0 y π (si queremos resultados en radianes).

Segundo caso: Se conocen dos lados y el ángulo que ambos forman. Hay que hallar el tercer lado y los dos ángulos restantes.

Solución: Por ejemplo, supongamos conocidos los lados a y b y el ángulo γ formado por ellos. Entonces, el tercer lado, c, se obtiene aplicando la tercera relación del Teorema del Coseno, con lo cual $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}}$.

Ahora, si γ es obtuso, los dos restantes ángulos serán agudos. Entonces, lo más rápido es calcular el ángulo α (por ejemplo) mediante el Teorema del Seno, ya que será $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma}$, de donde se puede despejar $\boxed{sen\,\alpha = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{c}}$ (usando el valor de c calculado antes); y ahora **obtenemos α mediante la función arco seno** (sen^{-1}), con la calculadora en [modo DEG], que da sus valores entre -90º y 90º (pero como $\frac{a \cdot sen\,\gamma}{c}$ es positivo, el valor obtenido estará entre 0º y 90º). O bien, si queremos α en radianes usaremos la misma función en [modo RAD], obteniendo un valor entre 0 y $\pi/2$. (Como nos han dado el ángulo γ, debemos obtener α en la misma unidad de medida que γ). Y el tercer ángulo será $\beta = 180º - (\alpha + \gamma)$ con α y γ en grados, o bien $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ con α y γ en radianes.

Pero si el ángulo γ dado es agudo, no podemos estar seguros de que los otros dos ángulos también sean agudos, con lo cual debemos calcular α (por ejemplo) mediante el Teorema del Coseno, usando la primera relación dada en el mismo, obteniendo $\boxed{\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ (suponemos ya conocido c como dijimos al principio); finalmente obtenemos α mediante **la función arco coseno**, en [modo DEG] o en [modo RAD], que dará respuesta segura entre 0º y 180º o entre 0 y π radianes (en cambio, si aplicásemos el método anterior de obtener α a través del Teorema del Seno, se obtendría $sen\,\alpha$ con lo cual α resultaría necesariamente agudo a través de la función arco seno; pero esto puede ser incorrecto, pues el ángulo verdadero podría ser obtuso). (Misma recomendación dada anteriormente sobre la unidad de medida de ángulos a usar). Y el ángulo β se obtiene ya como dijimos anteriormente: $\beta = 180º - (\alpha + \gamma)$ con α y γ en grados, o bien $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ con α y γ en radianes.

Tercer caso: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Hay que hallar el tercer lado y los otros dos ángulos.

Solución: Por ejemplo, supongamos conocidos los lados a y b y el ángulo α opuesto al lado a.

Si α es obtuso o recto, sabemos que los otros dos ángulos serán agudos. Entonces el ángulo β, opuesto al lado b, se calcula mediante el Teorema del Seno, que nos dice $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$, de donde resulta $\boxed{sen\,\beta = \frac{b \cdot sen\,\alpha}{a}}$; entonces calculamos β usando la función arco seno (de modo que β quede en la misma unidad de medida que α). Ahora obtenemos el tercer ángulo: $\gamma = 180º - (\alpha + \beta)$ o bien $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Y ya podemos aplicar otra vez por el Teorema del Seno para obtener el lado c, pues se cumplirá $\frac{c}{sen\,\gamma} = \frac{a}{sen\,\alpha}$, de donde resulta $\boxed{c = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha}}$.

Pero si α es agudo, no podemos asegurar que los otros dos ángulos lo sean también. Podríamos hallar β agudo como explicamos antes (a través del Teorema del Seno y la función arco seno), pero también podría ser β el ángulo suplementario del anterior (obtuso), que tiene el mismo valor del seno. Ahora bien, si β fuese obtuso tendría que ser b el lado mayor del triángulo (porque en todo triángulo, al ángulo mayor se le opone siempre el lado mayor y viceversa). Por tanto, si vemos que el lado b es menor o igual que el lado a, la posibilidad de que β sea obtuso no puede darse, quedándonos entonces con el β agudo obtenido a través del Teorema del Seno, para calcular luego γ y c como dijimos en el párrafo anterior.

Supongamos ahora que α es agudo y que el lado b es mayor que el lado a, con lo cual podría ser todavía β el ángulo agudo que calculamos antes o también podría ser su suplementario obtuso β'.

Pero, si el ángulo que buscamos fuese β', tendría que ser la suma $\beta' + \alpha$ menor que 180º (o π radianes) para que pudiese haber ángulo γ, y ello implica que sea $\alpha < \beta$, siendo β el ángulo agudo que se había obtenido utilizando el Teorema del Seno (en efecto, $\beta' + \alpha < 180º$ implica que $(180º - \beta) + \alpha < 180º$, o sea $\alpha - \beta < 0$). Por tanto, en este caso, si se cumple que α es mayor o igual que β, la posibilidad de que el ángulo buscado fuese el obtuso β' no podrá darse y quedaría todo como lo hicimos en el primer párrafo de esta misma Solución (cuando α era obtuso, en la página anterior).

Finalmente, supongamos que se cumpla $b > a$ y $\alpha < \beta$, siendo β el ángulo agudo obtenido por el Teorema del Seno (caso posible, pues a mayor lado corresponde siempre mayor ángulo). Todavía puede ocurrir que el ángulo buscado sea el agudo β o sea su suplementario obtuso β' y entonces procedemos así:
Supondremos (por el momento) que el ángulo buscado sea el agudo β, con lo cual el ángulo γ será $\gamma = 180º - (\alpha + \beta)$ y $c = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha}$. Y ahora, con los valores obtenidos miramos si se cumple el Teorema del Coseno en su relación $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ (a modo de control, donde intervienen c y γ). Entonces, si la relación anterior se cumple, el problema está resuelto con los valores β, γ y c que hemos obtenido.
Y si no se cumple la relación anterior del Teorema del Coseno, desechamos al ángulo agudo β y usamos como ángulo válido el obtuso suplementario β'. Con lo cual será $\boxed{\gamma' = 180º - (\alpha + \beta')}$ y con este γ' calcularíamos el lado c', o sea $\boxed{c' = \frac{a \cdot sen\,\gamma'}{sen\,\alpha}}$. De modo que la solución correcta sería β', γ', c'.

Cuarto caso: Se conoce un solo lado y dos ángulos (con lo cual conoceremos los tres ángulos). Hay que hallar los otros dos lados.

Solución: Por ejemplo, supongamos conocido el lado a y los tres ángulos.
El lado b puede obtenerse aplicando el Teorema del Seno, ya que $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$ con lo cual se tendrá $\boxed{b = \frac{a \cdot sen\,\beta}{sen\,\alpha}}$. Y el lado c se obtiene del mismo modo, es decir $\boxed{c = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha}}$.

Resumen del tercer caso (el más complicado) con todas sus alternativas (datos a, b y α)

En el cuadro sinóptico que presentamos a continuación suponemos los ángulos medidos en grados y que el ángulo agudo $\beta = arc\ sen\left(\frac{b \cdot sen\,\alpha}{a}\right)$ debe ser calculado antes de hacer el desdoble que aparece en color verde (para hacer la comparación de β con el valor dado de α), lo cual corresponde a la situación $b > a$. Las soluciones 1 y 2 están debajo del cuadro.

$$\text{Caso 3}\begin{cases} \alpha\ obtuso\ o\ recto : Solución\ 1 \\ \alpha\ agudo \begin{cases} b \le a : Solución\ 1 \\ b > a \begin{cases} \alpha \ge \beta : Solución\ 1 \\ \alpha < \beta \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma : Solución\ 1 \\ c^2 \ne a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma : Solución\ 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Solución 1: $\beta = arc\ sen\left(\frac{b \cdot sen\,\alpha}{a}\right)$ (agudo) ; $\gamma = 180º - (\alpha + \beta)$; $c = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha}$
Solución 2: $\beta' = 180º - \beta$ (obtuso) ; $\gamma' = 180º - (\alpha + \beta')$; $c' = \frac{a \cdot sen\,\gamma'}{sen\,\alpha}$

Descripción del cuadro anterior:

Hay dos alternativas iniciales (α obtuso o recto y α agudo).
Luego la alternativa α agudo se desdobla en otras dos ($b \leq a$ y $b > a$).
A continuación, la alternativa $b > a$ se desdobla en otras dos ($\alpha \geq \beta$ y $\alpha < \beta$).
Y, finalmente la alternativa en que $\alpha < \beta$ se desdobla en las dos últimas (en negro).

En todos las alternativas se indica la solución que corresponde. En la Solución 1 el ángulo opuesto al lado b es β (agudo) y los valores de γ y c son los que le corresponden. Y en la Solución 2 el ángulo opuesto al lado b es el obtuso β' (suplementario de β), cambiando γ por γ', así como c por c'.

Observación: Todos las alternativas menos una tienen la Solución 1. Solamente la alternativa α agudo, acompañada por $b > a$, por $\alpha < \beta$ y no cumpliéndose la relación del Teorema del Coseno que da c^2, tiene la Solución 2 (donde el obtuso β' es el ángulo opuesto al lado b, acompañado de γ' y de c').
Se entiende perfectamente que para que el ángulo opuesto a b sea obtuso, ha de ser α agudo, también ha de ser $b > a$ (porque b será el lado mayor del triángulo) y la condición $\alpha < \beta$ se explica por la necesidad de que exista el tercer ángulo γ' (ya que tendrá que ser $\beta' + \alpha < 180º$, o sea $180º - \beta + \alpha < 180º$, que implica $\alpha < \beta$).

$\boxed{\text{Tres ejemplos del tercer caso}}$ (el más complicado):

1) Resolver el triángulo del cual se conocen el lado $a = 5$ (unidades de longitud), el lado $b = 3$ (u.l.) y el ángulo α opuesto al lado a que mide 125º.

Ejemplo de la alternativa en que $\boldsymbol{\alpha}$ **es obtuso**.

No hay duda de que el ángulo β (opuesto al lado b) y el tercer ángulo, γ, serán ambos agudos (triángulo obtusángulo, con α obtuso, con lo cual $\beta + \gamma < 90º$). Aplicamos lo dicho en la pág.10 para este subcaso y se tiene:

$$sen\,\beta = \frac{b \cdot sen\,\alpha}{a} = \frac{3\,\cdot sen\,125º}{5} \cong 0'4914912 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta \cong arc\,sen\,0'4914912 \cong 29'44º}$$

con lo cual $\boxed{\gamma = 180º - (\alpha + \beta) \cong 25'56º}$ y entonces $\boxed{c = \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha} \cong 2'634 \text{ (u.l.)}}$

Podemos comprobar que se cumple la relación $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma}$ del Teorema del Coseno, donde aparecen dos de los valores obtenidos (γ y c). En efecto, el primer miembro es aproximadamente 6'94 y el segundo miembro, después de operar tomando $\cos\gamma \cong 0'902$, da aproximadamente 6'94.

---

2) Resolver el triángulo del cual se conocen el lado $a = 5$ (u.l.), el lado $b = 3$ (u.l.) y el ángulo α opuesto al lado a que mide 37º.

Ejemplo de la alternativa en que $\boldsymbol{\alpha}$ **es agudo y es** $\boldsymbol{b < a}$.

Según lo explicado para este subcaso (segundo párrafo de la pág. 10) el ángulo β no puede ser obtuso (ya que entonces el lado b sería el mayor del triángulo, lo cual es falso en este caso). Por tanto, hallaremos β utilizando el Teorema del Seno y resulta

$$sen\,\beta = \frac{b \cdot sen\,\alpha}{a} = \frac{3 \cdot sen\,37º}{5} \cong 0'361089 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta \cong arc\,sen\,0'361089 \cong 21'167º}$$

con lo cual $\boxed{\gamma = 180º - (\alpha + \beta) \cong 121'833º}$ (este sí es obtuso) y $\boxed{c \cong \frac{a \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha} \cong 7'0586 \text{ (u.l.)}}$

Podemos comprobar la misma relación del Teorema del Coseno que utilizamos en el ejercicio anterior y vemos que ésta se cumple. En efecto, el primer miembro es aproximadamente 49'824 y el segundo miembro, después de operar tomando $\cos\gamma \cong -0'52744$, da 49'823 (la pequeña discrepancia se explica porque estamos tomando aproximaciones con pocas cifras decimales).

---

3) Resolver el triángulo del cual se conocen el lado $a = 3$ (u.l.), el lado $b = 4$ (u.l.) y el ángulo α opuesto al lado a que mide 37º.

Ejemplo de la alternativa en que $\boldsymbol{\alpha}$ **es agudo y es** $\boldsymbol{b > a}$.

Según lo explicado en este subcaso (tercer párrafo de la pág. 10) hay que calcular un ángulo β agudo usando el Teorema del Seno. Y, para saber si éste es el correcto o quizás lo sea su suplementario β'(que tiene igual seno), habrá que comparar los valores de α y β. De modo que, si fuese α mayor o igual que β, éste ángulo sería el correcto, y si fuese α menor que β, habría duda todavía sobre si β sería el correcto o lo sería su suplementario β' (la duda se resolvería a través del Teorema del Coseno: La solución será β si el Teorema se cumple con sus valores γ y c correspondientes y la solución será β' en caso contrario).

Calculamos β agudo por el Teorema del Seno:

$$sen\,\beta = \frac{b \cdot sen\,\alpha}{a} = \frac{4 \cdot sen\,37º}{3} \cong 0'80242 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta \cong arc\,sen\,0'80242 \cong 53'362º}$$

Con lo cual vemos que es $\boxed{\alpha < \beta}$ y entonces podría ser correcto el ángulo agudo β calculado o también podría serlo su suplementario $\boxed{\beta' = 180º - \beta \cong 126'638º}$ (ver explicación dada en el segundo párrafo de la pág. 11). En ese párrafo se explica que esta duda se resuelve calculando γ y c a partir del β que tenemos y luego viendo si los valores obtenidos cumplen o no la relación del Teorema del Coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma$. Entonces, si se cumple la relación anterior, el ángulo β obtenido es válido, así como los valores correspondientes de γ y c, y si no se cumple dicha relación, el ángulo válido es β' (para el cual habrá que calcular los valores γ' y c' que le corresponden).

Calculamos el ángulo γ y el lado c que corresponden a β:

$$\boxed{\gamma = 180º - (\alpha + \beta) \cong 89'638º} \text{ y entonces } \boxed{c = \frac{b \cdot sen\,\gamma}{sen\,\alpha} \cong 6'646 \text{ (u.l.)}}$$

Y ahora podemos ver si se cumple o no la relación $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma$: El primer miembro es aproximadamente 44'175 y el segundo miembro, después de operar tomando $\cos\gamma \cong 0'0063$, da 24'849, con lo cual vemos que no se cumple la relación mencionada. Por tanto, descartamos el ángulo agudo β que habíamos obtenido por aplicación del Teorema del Seno y tomamos como verdadero el ángulo obtuso suplementario $\beta' \cong$ 126'638º.

Finalmente, hallamos los correspondientes valores γ' y c' que serán los definitivos:

$$\boxed{\gamma' = 180º - (\alpha + \beta') \cong 16'362º} \text{ y entonces } \boxed{c' = \frac{a \cdot sen\,\gamma'}{sen\,\alpha} \cong 1'4043 \text{ (u.l.)}}$$

Podemos ahora, si queremos, comprobar el cumplimiento del Teorema del Coseno que antes no se cumplía $\boxed{(c')^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma'}$. En efecto, su primer miembro da aproximadamente 1'972 y su segundo miembro, después de operar tomando $\cos\gamma' \cong 0'9595$, da aproximadamente 1'972.