LAS CÓNICAS

Cónicas en forma canónica (clásica)

Las "cónicas" son curvas planas que pueden obtenerse cortando mediante planos, de modos diferentes, una "superficie cónica de revolución". De ahí su nombre genérico. Son las siguientes curvas: Circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas.

Y una "superficie cónica de revolución" se puede pensar como la superficie lateral de un "cono de revolución" (cuerpo conocido) prolongada indefinidamente en ambos sentidos (o sea, más allá de la base del cono y también más allá de su vértice, en ambos casos alargando las generatrices del cono para completar las rectas del espacio que conforman dicha superficie).

¡Atención! En la explicación que sigue, cuando digamos "cono" nos referiremos al cuerpo y cuando digamos "superficie cónica" nos referiremos a la "superficie cónica de revolución" mencionada:

Matemáticamente, una "superficie cónica de revolución" es la descrita en el espacio $\mathbb{R}^3$ por una recta que gira alrededor de otra recta fija, a la cual corta en un punto fijo, formando un ángulo agudo de amplitud también fija. Así, el punto de corte de las dos rectas es "el centro de simetría" de la "superficie cónica" y se corresponde con "el vértice del cono"; la recta fija alrededor de la cual gira la recta móvil es "el eje de simetría de la superficie cónica" (prolongación en ambos sentidos de "la altura del cono", que es el segmento que va del vértice al centro de la base, que es un círculo); la recta móvil que al girar describe (o genera) la superficie cónica es, en cada una de sus posiciones, "una generatriz de dicha superficie cónica" (prolongación en ambos sentidos de una cierta generatriz del cono", que es un segmento), y el ángulo fijo que forman las dos rectas (la fija y la móvil) es el mismo ángulo agudo que forman "las generatrices del cono" con "la altura del cono".
(Ver la Sección 8.9 donde aparece la imagen de una superficie cónica de segundo grado, vertical, de parámetros a y b, que es la superficie a la que nos referimos cuando coinciden los parámetros, llamada en ese caso "superficie cónica de revolución").

Pues bien, las diferentes curvas llamadas "cónicas" se obtienen cortando la superficie cónica mencionada de diferentes modos:

1) Si se corta la superficie cónica de revolución por un plano perpendicular a su eje de simetría y que no pase por el centro de simetría de esa superficie, se obtiene una circunferencia.

2) Si se corta la superficie cónica de revolución por un plano que corte oblicuamente a su eje de simetría y que tampoco pase por su centro de simetría, se obtiene una elipse.

3) Si se corta la superficie cónica de revolución por un plano paralelo a su eje de simetría, se obtiene una hipérbola.

4) Y si se corta la superficie cónica de revolución por un plano paralelo a una de sus generatrices, se obtiene una parábola.

(Se aconseja ver por Internet imágenes ilustrativas de estos cortes. Hay muchas)

Veamos ahora esas diferentes cónicas, con sus definiciones geométricas en el plano $\mathbb{R}^2$, sus ecuaciones canónicas, sus puntos más característicos y sus propiedades principales:

1.- Circunferencias

Definición geométrica de circunferencia: La curva está formada por todos los puntos del plano cuya distancia a uno fijo (llamado "centro") es siempre la misma (esa distancia constante se llama "radio").

Cuando se coloca el centro en el origen de coordenadas, se obtiene la "ecuación canónica de la circunferencia" que es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \quad (r > 0) \quad r\text{: radio de la circunferencia}$$

Algunas propiedades: "El centro de simetría" de una circunferencia es su propio centro. Todas las rectas que pasen por el centro son "ejes de simetría" de la circunferencia. Y la recta tangente en cualquier punto de la circunferencia es perpendicular al segmento que va de su centro a dicho punto.

2.- Elipses horizontales y verticales

Definición geométrica de elipse: La curva está formada por todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos (llamados "focos") es siempre la misma (esa suma constante es mayor que la distancia entre los focos y se llama "eje mayor").

Se puede dibujar una elipse fijando los extremos de una cuerda inextensible a dos puntos de un plano (que representan los focos), siendo la longitud de la cuerda mayor que la distancia entre dichos puntos; de modo que, tensando sobre el plano la cuerda mediante la punta de un lápiz, podrá dibujarse la curva, que resulta como una circunferencia achatada: alargada en la dirección de la recta que pasa por los focos y acortada en la dirección perpendicular.

2.1.- Cuando se colocan los focos sobre el eje OX, en los puntos $(c\ ,\ 0)$ y $(-c\ ,\ 0)$, **la elipse se llama "horizontal"** y su "ecuación canónica" es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(es } \boldsymbol{a} > \boldsymbol{b} \text{ y ambos positivos)}$$

$2a$: **eje mayor (sobre OX)** $2b$: eje menor (sobre OY) $(a^2 = b^2 + c^2)$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$: distancia focal (distancia del centro a ambos focos)

2.2.- Cuando se colocan los focos sobre el eje OY, en los puntos $(0\ ,\ c)$ y $(0\ ,\ -c)$, **la elipse se llama "vertical"** y su "ecuación canónica" es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(es } \boldsymbol{b} > \boldsymbol{a} \text{ y ambos positivos)}$$

$2b$: **eje mayor (sobre OY)** $2a$: eje menor (sobre OX) $(b^2 = a^2 + c^2)$

$c = \sqrt{b^2 - a^2}$: distancia focal (distancia del centro a ambos focos)

Se tienen las siguientes características comunes a estas elipses horizontales y verticales:

Centro de simetría: El origen Ejes de simetría: Los ejes de coordenadas

Vértices: Son los puntos de corte de la curva con los ejes de simetría. O sea, sobre el eje OX son $(a\ ,0)$ y $(-a\ ,0)$, y sobre el eje OY son $(0\ ,b)$ y $(0\ ,-b)$. Estos son los únicos puntos de la curva donde la recta tangente es perpendicular al segmento que une el centro con cada punto.

Obsérvese que si en la ecuación canónica de una elipse hacemos $a = b$, se obtiene la ecuación canónica de una circunferencia cuyo radio es a (o b). Por tanto, podemos considerar a una circunferencia como si fuese una elipse especial, de semiejes iguales (por tanto, ya no es elipse). En este caso sería $c = 0$ y los focos coincidirían con el centro. Además, en vez de haber sólo dos ejes de simetría (la recta que pasa por los focos y su perpendicular por el centro) habría infinitos ejes de simetría (cualquier recta que pase por el origen será eje de simetría). Por último, todos los puntos de una circunferencia son vértices de la misma en vez de haber solamente cuatro vértices.

Excentricidad de una elipse: Es el cociente entre la distancia focal (c) y el semieje mayor (a o b). O sea, $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ si la elipse es horizontal y $\boxed{e = \frac{c}{b}}$ si la elipse es vertical.

La excentricidad indica el mayor o menor "achatamiento" de la elipse: Menos achatada es cuando los semiejes a y b son más parecidos en sus longitudes, con lo cual c será pequeño (recuérdese que $c^2 = a^2 - b^2$ si es $a > b$ y $c^2 = b^2 - a^2$ si es $a < b$), con lo cual resultará la excentricidad más próxima a cero. Más achatada es cuando las longitudes de los dos semiejes son más diferentes entre sí, con lo cual c será grande y la excentricidad será mayor (e es siempre menor que 1, porque la distancia focal siempre será menor que el semieje mayor).

Para una circunferencia, al ser $a = b$, será $c = 0$ y resulta $e = 0$ (no hay achatamiento).

3.- Hipérbolas horizontales y verticales

Definición geométrica de hipérbola: La curva está formada por todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos fijos (llamados "focos") es siempre la misma (esa diferencia constante es menor que la distancia entre los focos, se llama "eje transverso").

Nota: La diferencia de distancias es en valor absoluto, o sea la mayor menos la menor.

3.1.- Cuando se colocan los focos sobre el eje OX, en los puntos $(c\ ,0)$ y $(-c\ ,0)$, **la hipérbola se llama "horizontal"** y su "ecuación canónica" es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (a > 0\ ;\ b > 0) \quad 2a: \text{eje transverso (sobre OX)} \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}: \text{distancia focal} \quad (\text{puede ser } a > b,\ a < b \text{ o } a = b)$$

La hipérbola posee **dos arcos separados entre sí**, los cuales se llaman "ramas de la hipérbola". En este caso quedan a derecha e izquierda del eje OY, de modo que cortan al eje OX en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Además, las dos ramas de la hipérbola se acercan progresivamente a dos rectas que se cortan en el origen de coordenadas y que son simétricas respecto al eje OY, las cuales son "sus asíntotas" (sus pendientes son opuestas y por tanto sus ángulos de inclinación también). Desde los focos, las ramas de la hipérbola se ven cóncavas y desde el origen de coordenadas se ven convexas.

Restantes características de esta hipérbola horizontal:

Centro de simetría: El origen

Ejes de simetría: Los ejes de coordenadas

Vértices: Son los puntos de corte con los ejes de simetría, o sea (a, 0) y ($-a$, 0). Estos son los únicos puntos de la curva donde la recta tangente es perpendicular al segmento que une el centro con cada punto. (Obsérvese que el "eje transverso" ($2a$) coincide con la distancia entre los dos vértices).

Asíntotas: Son las rectas de ecuaciones $\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ e $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$.

Rectángulo de referencia: Dibujando un rectángulo de centro el origen, con lados horizontales de longitud $2a$ y con lados verticales de longitud $2b$, las asíntotas de la hipérbola son las rectas que contienen a las diagonales de dicho rectángulo y **las ramas de la hipérbola (situadas en los ángulos derecho e izquierdo, de los cuatro formados por las asíntotas) son tangentes a los lados verticales del rectángulo en sus puntos medios**. Esto permite dibujar la hipérbola con mucha facilidad (se aconseja hacerlo). La distancia focal aparece en este rectángulo como la distancia de su centro a cualquiera de los 4 vértices, pero se mide sobre el eje OX (donde están los focos).

Un caso particular importante es el que corresponde a valores iguales de los parámetros a y b, en cuyo caso la hipérbola horizontal se llama "equilátera" y sus asíntotas serán perpendiculares (pues su rectángulo de referencia es un cuadrado).

3.2.- Cuando se colocan los focos de la hipérbola sobre el eje OY, en los puntos de coordenadas (0 , c) y (0 , $-c$), **la hipérbola se llama "vertical"** y su "ecuación canónica" es:

$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$ $(a > 0 \,;\, b > 0)$ $2b$: **eje transverso (sobre OY)** $(c^2 = a^2 + b^2)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$: distancia focal (puede ser $a > b$, $a < b$ o $a = b$)

La hipérbola tiene ahora sus ramas por encima y por debajo del eje OX, de modo que cortan al eje OY en los puntos (0 , b) y (0 , $-b$).

Restantes características de esta hipérbola vertical:

Centro de simetría: El origen Ejes de simetría: Los ejes de coordenadas

Vértices: Son los puntos de corte con los ejes de simetría, o sea (0 , b) y (0 , $-b$). Estos son los únicos puntos de la curva donde la recta tangente es perpendicular al segmento que une el centro con cada punto. Aquí también se cumple que la distancia entre los dos vértices es igual al eje transverso.

Asíntotas: Son las rectas de ecuaciones $\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ e $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$.

Rectángulo de referencia: El dibujo de esta hipérbola vertical se basa también en el rectángulo de centro el origen, con lados horizontales de longitud $2a$ y lados verticales de longitud $2b$. Las asíntotas son las mismas de la hipérbola horizontal si se toman los mismos valores de los parámetros a y b para ambas o valores que den el mismo cociente b/a , pero **las ramas de la hipérbola están ahora en los ángulos superior e inferior de los cuatro que forman las asíntotas** (y no en los ángulos derecho e izquierdo como antes). Y **las ramas son ahora tangentes a los lados horizontales del rectángulo en sus puntos medios**. (Recomendamos hacer el dibujo correspondiente). Otra vez la distancia focal aparece como la distancia de su centro a cualquiera de los 4 vértices del rectángulo, pero se mide ahora sobre el eje OY (donde están los focos).

Cuando sea $a = b$, la hipérbola vertical también se llama "equilátera" y sus asíntotas serán perpendiculares porque el rectángulo de referencia será un cuadrado.

Cuando ambas hipérbolas, horizontal y vertical, compartan los mismos valores de a y de b (siempre a^2 dividiendo a x^2 y b^2 dividiendo a y^2) se llamarán "hipérbolas conjugadas entre sí" (la diferencia entre sus ecuaciones se nota solamente en los signos que aparece en ambas: En la horizontal el signo $+$ corresponde al cociente x^2/a^2 y en la vertical el signo $+$ corresponde al cociente y^2/b^2). Comparten el rectángulo de referencia y por tanto las asíntotas, con lo cual también comparten la distancia focal.
Y un caso particular es el de las "hipérbolas equiláteras conjugadas" (una horizontal y otra vertical, pero ambas con $a = b$).

Excentricidad de una hipérbola : Es el cociente entre la distancia focal (c) y el semieje transverso (a o b). O sea, $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ si la hipérbola es horizontal y $\boxed{e = \frac{c}{b}}$ si la hipérbola es vertical.

La excentricidad indica si las ramas de la hipérbola están "más abiertas" o "menos abiertas" y siempre es mayor que 1. Si ambas ramas están en los ángulos agudos que forman las asíntotas, estarán "menos abiertas" y su excentricidad es menor (c será más aproximo al valor del semieje transverso, con lo cual la excentricidad estará más cerca de 1; puede comprobarse en un dibujo del rectángulo de referencia, siendo a muy distinto a b, dibujando las asíntotas y situando los arcos de hipérbola en los ángulos agudos). En cambio, si ambas ramas están en los ángulos obtusos que forman las asíntotas, estarán "más abiertas" y su excentricidad es bastante mayor (c estará más alejado del valor del eje transverso y entonces la excentricidad estará más lejos de 1; puede comprobarse también en un dibujo del rectángulo de referencia, con a y b muy diferentes, dibujando las asíntotas y situando los arcos de hipérbola en los ángulos obtusos).

O sea, a mayor ángulo entre asíntotas, donde estén las ramas de la hipérbola, mayor excentricidad de ésta.

Cuando sea $a = b$, el rectángulo de referencia será un cuadrado y las asíntotas serán perpendiculares. En este caso, las hipérbolas horizontal y vertical correspondientes se llaman "equiláteras" y ambas tienen la misma excentricidad (se comprueba fácilmente que $e = \sqrt{2}$ en este caso).

4.- Parábolas horizontales y verticales

Definición geométrica de parábola : La curva está formada por todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (llamado "foco") y de una recta fija que no pasa por el foco (llamada "directriz").

4.1.- Cuando se coloca el foco sobre el eje OX, en el punto (p , 0), y se usa como directriz la recta vertical $x = -p$, **la parábola se llama "horizontal"** y su "ecuación canónica" es:

$$\boxed{y^2 = 4px} \qquad (p \neq 0)$$

Se comprueba entonces que la parábola **pasa por el origen y además es simétrica respecto al eje OX** (por eso se llama horizontal). Si $p > 0$, abre hacia la derecha (cóncava hacia OX positivo), y si $p < 0$, abre hacia la izquierda (cóncava hacia OX negativo).

Restantes características de esta parábola horizontal:

Centro de simetría: No hay Vértice: Punto de corte con el eje de simetría, o sea (0 , 0)

$|p|$ es la distancia del foco al vértice, llamada distancia focal

Nota: La distancia focal no se llama c como en los casos anteriores porque esta cónica no tiene centro (c era la distancia de cualquier foco al centro; en cambio $|p|$ es la distancia del único foco al único vértice).

4.2.- Cuando se coloca el foco sobre el eje OY, en el punto $(0\ ,p)$, y se usa como directriz la recta horizontal $y=-p$, **la parábola se llama "vertical"** y su "ecuación canónica" es:

$$\boxed{x^2=4py} \qquad (p\neq 0)$$

Esta parábola también **pasa por el origen y además es simétrica respecto al eje OY** (por eso se llama vertical). Si $p>0$, abre hacia arriba (cóncava hacia OY positivo), y si $p<0$, abre hacia abajo (cóncava hacia OY negativo).

Restantes características de esta parábola vertical:

Centro de simetría: No hay   Vértice: Punto de corte con el eje de simetría, o sea (0 , 0)

Obsérvese que las parábolas carecen de centro (centro de simetría) y poseen un solo vértice (único punto de la curva donde la recta tangente es perpendicular al segmento que va del foco a dicho punto). Además, para circunferencias, elipses e hipérbolas en forma canónica el centro es el origen de coordenadas, y para parábolas en forma canónica el vértice es también el origen de coordenadas.

En lo que sigue, cuando necesitemos referirnos a un solo punto importante relacionado con una determinada cónica, dicho punto será el centro si se trata de circunferencia, elipse o hipérbola, y será el vértice si se trata de parábola.

Para las parábolas en forma canónica (tanto horizontales como verticales) todo queda determinado por el valor del parámetro p. En particular, la parábola es "más abierta" cuanto menor sea $|p|$. Y la excentricidad de cualquier parábola es 1 (aquí la excentricidad se define como la razón de las distancias de cualquier punto de la curva al foco y a la directriz).

RESUMEN DE CARACTERÍSTICAS DE LAS CÓNICAS EN FORMA CANÓNICA:

CÓNICA	CENTRO	FOCOS	EJES	VÉRTICES	EXCENTRIC.
circunferencia	el origen	no hay	cualquier recta que pase por O	todos sus puntos	$e=0$
elipse horizontal	el origen	$(c\ ,0)$ y $(-c\ ,0)$	OX y OY	$(a\ ,0)$, $(-a\ ,0)$, $(0\ ,b)$ y $(0\ ,-b)$	$e=\frac{c}{a}<1$
elipse vertical	el origen	$(0\ ,c)$ y $(0\ ,-c)$	OX y OY	$(a\ ,0)$, $(-a\ ,0)$, $(0\ ,b)$ y $(0\ ,-b)$	$e=\frac{c}{b}<1$
hipérbola horizontal	el origen	$(c\ ,0)$ y $(-c\ ,0)$	OX y OY	$(a\ ,0)$ y $(-a\ ,0)$	$e=\frac{c}{a}>1$
hipérbola vertical	el origen	$(0\ ,c)$ y $(0\ ,-c)$	OX y OY	$(0\ ,b)$ y $(0\ ,-b)$	$e=\frac{c}{b}>1$
parábola horizontal	no hay	$(p\ ,0)$	OX	el origen	$e=1$
parábola vertical	no hay	$(0\ ,p)$	OY	el origen	$e=1$

Cónicas obtenidas por traslación, en forma reducida

1.- Traslación de ejes y cambio de coordenadas asociado

Supongamos que aplicamos un desplazamiento a los ejes de coordenadas OXY, para convertirlos en otros ejes de coordenadas que llamamos O'X'Y', de modo que los ejes O'X' y O'Y' queden respectivamente paralelos a los antiguos ejes OX y OY y donde el vector que va del punto O al punto O' tenga componentes escalares h y k, o sea $\overrightarrow{OO'} = (h\,, k)$. En estas condiciones diremos que el sistema OXY se ha transformado en el O'X'Y' mediante una "traslación de vector $(h\,, k)$".

Si tomamos un punto P cualquiera del plano, es fácil ver que las relaciones entre las coordenadas (x, y) de ese punto respecto al sistema OXY y las coordenadas (x', y') de P respecto al nuevo sistema O'X'Y' serán entonces: $\boxed{x' = x - h}$; $\boxed{y' = y - k}$ (se llaman **ecuaciones del cambio de coordenadas por la traslación de vector $(h\,, k)$** en el plano). Y efectivamente, el punto O' tiene coordenadas $(h\,, k)$ en el sistema OXY y tiene coordenadas (0 , 0) en el sistema O'X'Y', como indican las ecuaciones anteriores.
Y si hacemos un dibujo con los dos sistemas de coordenadas descritos tomando un $h > 0$ y un $k > 0$, al elegir un punto P del primer cuadrante de ambos sistemas y señalar en el dibujo las coordenadas (x, y) y (x', y') de P en ambos sistemas, así como señalando en el dibujo las coordenadas h y k de O' respecto al sistema OXY original , se verán claramente las relaciones dadas en las ecuaciones anteriores.

Pues bien, lo mismo ocurre para otros puntos del plano y también ocurre para otros signos de las componentes h y k, aunque es algo más incómodo de ver en general (sin embargo, podemos comprobar su cumplimiento en ejemplos numéricos concretos de esos casos). (Se aconseja hacer algunas de estas comprobaciones, teniendo cuidado con los signos).

2.- Ecuaciones reducidas de las cónicas horizontales o verticales cuando su centro (o su vértice si es parábola) es un punto diferente del origen

Razonaremos con una elipse horizontal, pero de modo análogo podría hacerse con una elipse vertical, con una circunferencia, con una hipérbola (horizontal o vertical) o con una parábola (horizontal o vertical):

Si aplicamos a una elipse horizontal de ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (con $a > b$) una traslación de vector no nulo $\vec{v} = (h\,, k)$, quedará desplazada paralelamente, de modo que su nuevo centro será el punto C $(h\,, k)$ del plano y sus nuevos vértices serán los puntos $(h + a\,, k)$ y $(h - a\,, k)$ en posición horizontal, así como $(h\,, k + b)$ y $(h\,, k - b)$ en posición vertical. (Hacer dibujo para comprobar lo que decimos). También se ve claramente que ahora los ejes de simetría son las rectas $x = h$ e $y = k$, y los focos son los puntos $(h + c\,, k)$ y $(h - c\,, k)$, situados horizontalmente sobre la recta $y = k$. (Desde luego, la nueva elipse tiene los mismos valores de los semiejes a y b, con lo cual se sigue cumpliendo la relación $a^2 = b^2 + c^2$).

Esta elipse que resulta de la traslación se seguirá llamando "**elipse horizontal**" porque sus focos están en la recta horizontal que pasa por su centro y su eje mayor está sobre dicha recta.

Queremos ahora conocer qué ecuación tiene, respecto del sistema de coordenadas original, esta nueva elipse que hemos obtenido por traslación de la primera.

Procedemos así: Tomamos su centro C $(h\,, k)$ como el origen O' de un nuevo sistema de coordenadas y tomamos sus ejes de simetría como los ejes O'X' y O'Y' (el nuevo eje O'X' sobre la recta horizontal $y = k$ y el nuevo eje O'Y' sobre la recta vertical $x = h$). Entonces, los ejes O'X'Y' resultarán de aplicarle a los ejes OXY la misma traslación de vector $\vec{v} = (h\,,k)$ que habíamos usado para convertir la primera elipse en la segunda elipse.

Pero entonces, esta segunda elipse tendrá, respecto a los ejes O'X'Y', la ecuación canónica siguiente: $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ (ya que su centro está en O', sus focos están en el eje O'X' y tiene los mismos semiejes a y b).

Y como las relaciones entre coordenadas $(x\,,y)$ y (x',y') son $x' = x - h$ e $y' = y - k$, se tendrá que cumplir también la ecuación:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad (a > b)$$

con lo cual hemos obtenido la ecuación buscada de la segunda elipse respecto de los ejes originales OXY (la cual se suele llamar "**ecuación en forma reducida**" o "**ecuación reducida**" de una elipse horizontal de centro el punto C $(h\,,k)$ y cuyos semiejes son a y b).

Pues bien, partiendo de las ecuaciones canónicas de las restantes cónicas horizontales y verticales conocidas y aplicándoles a las mismas el procedimiento utilizado anteriormente con la elipse horizontal para llegar a su ecuación reducida, se obtienen las respectivas "ecuaciones reducidas" de esas otras cónicas, que son las siguientes:

"Ecuación reducida" de la **elipse vertical** con centro en C $(h\,,k)$ y semiejes a y b:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad (b > a)$$

"Ecuación reducida" de la **circunferencia** de centro C $(h\,,k)$ y radio r:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2} \qquad (r > 0)$$

"Ecuación reducida" de la **hipérbola horizontal** de centro C $(h\,,k)$ y parámetros a y b:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad (a > 0) \quad (b > 0)$$

$2a$: eje transverso

"Ecuación reducida" de la **hipérbola vertical** de centro C $(h\,,k)$ y parámetros a y b:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1} \qquad (a > 0) \quad (b > 0)$$

$2b$: eje transverso

Nota: Las asíntotas de las dos hipérbolas anteriores son: $y - k = \pm\frac{b}{a}\cdot(x-h)$

"Ecuación reducida" de la **parábola horizontal** de vértice V $(h\,,k)$ y distancia focal p:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p\cdot(x-h)} \qquad (p \neq 0)$$

"Ecuación reducida" de la **parábola vertical** de vértice V $(h\,,k)$ y distancia focal p:

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p\cdot(y-k)} \qquad (p \neq 0)$$

(Nótese que en todos los casos, las ecuaciones canónicas que habíamos visto quedan incluidas en las anteriores cuando tomemos $h = 0$ y $k = 0$).

Cónicas horizontales y verticales en forma general y su determinación

Si desarrollamos los cuadrados en las ecuaciones reducidas anteriores, pasando todos los términos a un mismo miembro y ordenándolos de mayor a menor grado (pudiendo además multiplicar o dividir toda la ecuación por un número real distinto de cero), se obtienen ecuaciones en la forma general:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0} \qquad (A \neq 0 \text{ o } B \neq 0)$$

Con las siguientes particularidades:

1) Si la cónica es circunferencia, se obtiene $A = B$.
2) Si la cónica es elipse (horizontal o vertical), se obtiene $A \neq B$ pero $A \cdot B > 0$ (signos de A y de B iguales).
3) Si la cónica es hipérbola (horizontal o vertical), se obtiene $A \cdot B < 0$ (signos de A y de B diferentes).
4) Si la cónica es parábola horizontal, se obtiene $A = 0$ y $B \neq 0$.
5) Y si la cónica es parábola vertical, se obtiene $A \neq 0$ y $B = 0$.

Ahora bien, toda ecuación en la anterior forma general no representa una de las cónicas consideradas.

Ejemplos:

1) La ecuación $x^2 + y^2 = 0$ no es una circunferencia, aunque sea $A = B$ (representa un sólo punto, en este caso el origen, y se llama circunferencia degenerada).
2) La ecuación $9x^2 + 4y^2 + 36 = 0$ no es una elipse, aunque sea $A \neq B$ y $A \cdot B > 0$ (no tiene puntos de coordenadas reales y se llama elipse imaginaria).
3) La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ no es una hipérbola, aunque sea $A \cdot B < 0$ (representa dos rectas que se cortan en un punto, en este caso las rectas $y = x$ e $y = -x$, y se llama hipérbola degenerada).
4) La ecuación $x^2 = 0$ no es una parábola vertical, aunque sea $A \neq 0$ y $B = 0$ (representa dos rectas coincidentes, en este caso la $x = 0$ doble, y se llama parábola degenerada).
5) La ecuación $y^2 - 1 = 0$ no es una parábola horizontal, aunque sea $A = 0$ y $B \neq 0$ (representa dos rectas paralelas, en este caso $y = 1$ e $y = -1$, y es otra parábola degenerada).

Entonces, ¿cómo se sabe si una ecuación con la forma general $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ representa realmente a una cónica? Muy fácil: Se busca pasar de esta forma general a una de las ecuaciones reducidas dadas anteriormente. Si se logra, representa una cónica horizontal o vertical, que sabremos representar gráficamente; en caso contrario, no representará una cónica de las descritas hasta ahora (cónicas ordinarias), sino que representará otra cosa que puede llamarse cónica degenerada o cónica imaginaria, según el caso (como en los ejemplos anteriores); será degenerada si todos sus puntos tienen ambas coordenadas reales y será imaginaria si todos sus puntos tienen coordenadas complejas, con al menos una de ellas imaginaria.

Pues bien, para intentar pasar de la ecuación general anterior a una de las ecuaciones reducidas vistas anteriormente, tendrá que usarse inicialmente la técnica conocida como "completación de cuadrados" (cuando A y C sean distintos de cero podrá completarse un cuadrado donde aparecerá solamente la variable x, y cuando B y D sean distintos de cero podrá completarse un cuadrado donde aparecerá solamente la variable y). El proceso final se reduce a operar con la ecuación que incluye ya los cuadrados para llevarla a una de las formas reducidas anteriores.

En ese proceso, de transformación de la ecuación general en una de las ecuaciones reducidas, es muy importante haber analizado los valores de A y de B para saber a cuál de dichas ecuaciones puede llegarse. De modo que si $A = B$ sólo podría llegarse a la ecuación reducida de una circunferencia ordinaria o bien se llega a una circunferencia degenerada en un solo punto o a una circunferencia imaginaria. Del mismo modo, cuando $A \neq B$ pero se cumple $A \cdot B > 0$, sólo puede llegarse a la ecuación reducida de una elipse ordinaria (horizontal o vertical, según la comparación de los valores de a y b), o bien se llega a una elipse degenerada en un solo punto o a una elipse imaginaria. Pero si es $A \cdot B < 0$ sólo podrá llegarse a la ecuación reducida de una hipérbola ordinaria (horizontal o vertical, según como queden los signos de la ecuación) o bien se llega a una hipérbola degenerada en dos rectas que se cortan (no hay hipérbolas imaginarias). Por último, si $A = 0$ y $B \neq 0$ podríamos llegar únicamente a la ecuación reducida de una parábola horizontal ordinaria o se llega a una parábola degenerada en dos rectas paralelas o coincidentes o bien imaginaria y finalmente si $A \neq 0$ y $B = 0$ llegaríamos a la ecuación reducida de una parábola vertical ordinaria o se llega a una parábola degenerada en dos rectas paralelas o coincidentes o bien imaginaria.

Ejemplos :

1) Identificar la cónica representada por la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$.

Al ser $A \neq B$ y $A \cdot B > 0$, sólo podrá llegarse a la ecuación reducida de una elipse (ordinaria, degenerada o imaginaria).
Empezamos completando cuadrados:

$$2x^2 - 4x = 2 \cdot (x^2 - 2x) = 2 \cdot [(x-1)^2 - 1] = 2(x-1)^2 - 2$$
$$3y^2 + 12y = 3 \cdot (y^2 + 4y) = 3 \cdot [(y+2)^2 - 4] = 3(y+2)^2 - 12$$

con lo cual la ecuación dada puede escribirse:

$$2(x-1)^2 - 2 + 3(y+2)^2 - 12 + 2 = 0$$

o bien $$2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 12$$

Conviene ahora dividir todo por 12, para obtener el 1 del segundo miembro de la "ecuación reducida" de una elipse: $\frac{2(x-1)^2}{12} + \frac{3(y+2)^2}{12} = 1$

y simplificando las fracciones se llega a: $\boxed{\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1}$

con lo cual vemos que se trata de una **elipse ordinaria** de centro C $(1\ ,\ -2)$ y semiejes $a = \sqrt{6}$ y $b = 2$ (por tanto, **horizontal**). Su distancia focal será $c = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$. Ahora, con los valores obtenidos ya podríamos escribir coordenadas de los cuatro vértices y dibujarla (las coordenadas de los vértices son $(1+\sqrt{6}\ , -2), (1-\sqrt{6}\ , -2), (1, -2+2)$ y $(1, -2-2)$). También podríamos dibujar sus focos, de coordenadas $(1+\sqrt{2}, -2)$ y $(1-\sqrt{2}, -2)$.

---

2) Identificar la cónica cuya ecuación general es $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$.

Obsérvese que la ecuación difiere de la del ejemplo anterior solamente en el término independiente E (antes era 2 y ahora es 14). Por tanto, la completación de cuadrados es idéntica y la ecuación puede escribirse como $2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 0$, con lo cual no podremos obtener esta vez la ecuación reducida de una elipse ordinaria . El único punto que verifica la ecuación es el $(1\ ,\ -2)$, luego se trata de una **elipse degenerada**.

---

3) Identificar la cónica cuya ecuación general es $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 15 = 0$.

Ahora, haciendo los mismos cálculos, se llega a $2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = -1$, ecuación que no cumple ningún punto del plano. Como esta ecuación sólo se cumple para valores imaginarios de al menos una de las variables, se dice que es una **elipse imaginaria** (no tiene representación geométrica).

---

4) Identificar la cónica de ecuación $3x^2 + 2x - 5y + 1 = 0$.

Como en este caso es $A \neq 0$ y $B = 0$, transformaremos la ecuación anterior en la ecuación canónica de una parábola vertical (ordinaria, degenerada o imaginaria).
Completamos un solo cuadrado con los términos en x :

$$3x^2 + 2x = 3\left(x^2 + \tfrac{2}{3}x\right) = 3\left[\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] = 3\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{3}$$

con lo cual la ecuación dada se convierte en $\left[3\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\right] - 5y + 1 = 0$

o bien $$3\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 = 5y - \tfrac{2}{3}$$

Como la ecuación reducida que buscamos tiene en el primer miembro sólo $(x - h)^2$, dividimos todo por 3 y queda:

$$\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{5}{3}\,y - \tfrac{2}{9}$$

y como dicha ecuación reducida tiene segundo miembro $4p(y - k)$, sacamos factor común $5/3$:

$$\boxed{\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{5}{3}\left(y - \tfrac{2}{15}\right)}$$

Así que tenemos una **parábola vertical** de vértice V$(-1/3\ ,\ 2/15)$, siendo $4p = 5/3$, o sea $p = 5/12$ (Podríamos dibujarla hallando algunos de sus puntos, como el corte con el eje OY y su simétrico respecto del eje de simetría que es la recta $x = -1/3$; abre hacia arriba por ser $p > 0$). Obsérvese que al ser positiva la ordenada del vértice y ser cóncava hacia arriba, esta parábola no cortará al eje OX (pero en otro caso si podría haber cortes, que son puntos importantes para la representación gráfica).

---

5) Identificar la cónica de ecuación $3x^2 + 2x + 1 = 0$

Notemos que es como la ecuación anterior, pero sin el término Dy (ahora es D $= 0$). Por tanto, nos sirve la completación del cuadrado que hicimos antes, quedando:

$$\left[3\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\right] + 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad \boxed{\left(x + \tfrac{1}{3}\right)^2 = -\tfrac{2}{9}}$$

ecuación que no cumple ningún valor real de x, y por tanto se trata de una **parábola imaginaria** (no tiene representación geométrica).

Ecuación general de cualquier cónica y su determinación

1.- Rotación de ejes y cambio de coordenadas asociado

Supongamos que se aplica al sistema de coordenadas OXY una rotación (o giro) alrededor del punto O y de ángulo orientado α (en sentido antihorario si α es positivo y en sentido horario si α es negativo). Obtenemos así otro sistema de referencia OX'Y', de origen común, de modo que el ángulo entre OX y OX' será α y el ángulo entre OY y OY' será también α. (Hacer dibujo con los dos sistemas de coordenadas). Aunque α puede ser cualquier ángulo, para lo que sigue nos limitaremos a ángulos agudos positivos y negativos.

Tomando un punto P cualquiera del primer cuadrante de OXY y de OX'Y', se demuestra (calculando proyecciones de segmentos) que las relaciones entre las coordenadas (x, y) de P (respecto al sistema inicial OXY) y las coordenadas (x', y') del mismo punto (respecto al nuevo sistema OX'Y' que resultó de girar OXY un ángulo α agudo positivo alrededor del origen) son:

$$\boxed{x = x' \cdot cos\,\alpha - y' \cdot sen\,\alpha} \quad ; \quad \boxed{y = x' \cdot sen\,\alpha + y' \cdot cos\,\alpha}$$

Se demuestra que estas relaciones también se siguen cumpliendo cuando P esté en cualquier otra posición del plano y también cuando α sea agudo negativo. Para $\alpha = 0$ es evidente que se cumplen, pues entonces los dos sistemas serán el mismo (y efectivamente queda en ese caso $x = x'$ e $y = y'$). Por tanto, las relaciones de la página anterior se cumplen para todo punto del plano $\mathbb{R}^2$ y para todo ángulo agudo positivo o negativo.

2.- Ecuación general de cualquier cónica

Si la cónica es circunferencia, en cualquier posición que esté, su ecuación general es siempre $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $A = B$. Pero, ¿cuál será el tipo de ecuación que tendrá una elipse, una hipérbola o una parábola que no estén en posición horizontal o vertical, o sea cuando sus ejes de simetría (o el único eje de simetría en el caso de una parábola) no sean paralelos a los ejes de coordenadas?

Para verlo supongamos que una cónica (no circunferencia) es inicialmente horizontal o vertical, y rotemos los ejes un ángulo agudo α (positivo o negativo). Entonces dicha cónica, respecto del nuevo sistema OX'Y', ya no será horizontal ni vertical, luego su ecuación respecto de OX'Y' será de la forma que queremos conocer.

Tomemos entonces una cónica horizontal o vertical, cuya ecuación sabemos que será de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $A \neq B$ para que no sea circunferencia.

Al aplicar la rotación de ejes de ángulo agudo α , se tendrá $\boxed{x = x' \cdot cos\,\alpha - y' \cdot sen\,\alpha}$ así como $\boxed{y = x' \cdot sen\,\alpha + y' \cdot cos\,\alpha}$, con lo cual la ecuación de la misma cónica respecto de los ejes girados OX'Y' será:

$$A(x'cos\,\alpha - y'sen\,\alpha)^2 + B(x'sen\,\alpha + y'cos\,\alpha)^2 + C(x'cos\,\alpha - y'sen\,\alpha) +$$
$$+D(x'sen\,\alpha + y'cos\,\alpha) + E = 0$$

la cual, desarrollando los cuadrados, agrupando términos semejantes y ordenándola, queda en la forma:

$$\boxed{A_1(x')^2 + B_1x'y' + C_1(y')^2 + D_1x' + E_1y' + F_1 = 0}$$

es decir, de la misma forma inicial (ecuación de segundo grado con dos variables), pero ahora incluye término en $x'y'$ (mientras que la inicial no incluía término en xy).

Obsérvese además que el coeficiente correspondiente (B_1) proviene únicamente de los desarrollos de los dos cuadrados de la versión anterior. Así se tiene que:

$$\boxed{B_1 = -2A \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha + 2B \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha = (B - A) \cdot sen\,2\alpha}$$

Y puesto que $A \neq B$ y que $sen\,2\alpha \neq 0$, se tendrá con seguridad $\boxed{B_1 \neq 0}$ ($sen\,2\alpha \neq 0$, pues suponemos que es $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ y entonces será $0 < 2\alpha < \pi$, con lo cual será $sen\,2\alpha$ positivo, o bien será $-\pi < 2\alpha < 0$ y entonces será $sen\,2\alpha$ negativo).

Por tanto, cuando se hace una rotación de ejes de coordenadas con α agudo (positivo o negativo), la aparición del término en $x'y'$ es segura.

Conclusión : Si la cónica dada no es circunferencia y tampoco está en posición horizontal ni en posición vertical respecto a los ejes OXY, su ecuación general será necesariamente de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $B \neq 0$.

En efecto: Podemos considerar que el sistema actual OXY es el resultado de haber girado otro sistema anterior alrededor del origen un cierto ángulo agudo α, de modo que en ese otro sistema la cónica hubiese estado en posición horizontal o vertical y entonces será $B \neq 0$ por lo dicho anteriormente (veremos más adelante que ese ángulo α podrá calcularse, con lo cual el otro sistema del cual proviene el que tenemos podría obtenerse girando el mismo un ángulo $-\alpha$ alrededor del origen).

Pero entonces, **todas las cónicas**, en cualquier posición que tengan, vendrán dadas por una **ecuación general completa de segundo grado**: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$:
Si fuese $B = 0$, la cónica será una circunferencia (que puede ser ordinaria, degenerada o imaginaria), será una cónica horizontal (ordinaria, degenerada o imaginaria) o será una cónica vertical (ordinaria, degenerada o imaginaria). Y si fuese $B \neq 0$, la cónica no será circunferencia, no será cónica horizontal ni será cónica vertical.

Observación importante: Cuando la cónica esté en la forma general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siendo $B \neq 0$, ya no son aplicables los criterios que teníamos para saber de antemano si será una elipse, una hipérbola o una parábola (los cuales se referían a los valores y los signos de los coeficientes de x^2 e y^2). Estos criterios sólo valen cuando es B = 0.

3.- Hipérbolas equiláteras referidas a sus asíntotas

Sabemos que la hipérbola horizontal $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se llama equilátera cuando es $a = b$.
Pero entonces su ecuación puede escribirse $x^2 - y^2 = a^2$ y sabemos que sus asíntotas son las rectas $y = x$ e $y = -x$ (las bisectrices de los ángulos que forman los ejes de coordenadas y que, por tanto, forman ángulos de 45º con ambos ejes).

Entonces, si aplicamos a los ejes OXY una rotación alrededor del origen de ángulo 45º, el eje OX pasa a la posición de la bisectriz $y = x$, y al mismo tiempo el eje OY pasa a la posición de la otra bisectriz $y = -x$. Y las dos ramas de la hipérbola quedan situadas en los cuadrantes 2º y 4º del nuevo sistema OX'Y'. (Comprobar esto en un dibujo).

¿Cuál será la nueva ecuación de la hipérbola? Partimos de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = a^2$ y sustituimos aquí las ecuaciones conocidas del cambio de coordenadas por rotación alrededor del origen, con $\alpha = 45º$, que son:
$x = x' \cdot cos\, 45^o - y' \cdot sen\, 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$; $y = x' \cdot sen\, 45^o + y' \cdot cos\, 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$
con lo cual obtenemos: $\frac{1}{2} \cdot (x' - y')^2 - \frac{1}{2} \cdot (x' + y')^2 = a^2$, o sea $-x'y' - x'y' = a^2$, que nos da la ecuación: $x' \cdot y' = -\frac{a^2}{2}$ o sea $\boxed{x' \cdot y' = k \text{ con } k < 0}$ (ramas en los cuadrantes 2º y 4º)

De igual modo, si partimos de la hipérbola equilátera vertical $y^2 - x^2 = a^2$, cuyas asíntotas vuelven a ser las rectas $y = x$ e $y = -x$, y aplicamos a los ejes OXY la misma rotación de ángulo 45º, sus dos ramas quedarán en los cuadrantes 1º y 3º del nuevo sistema OX'Y'. (Comprobarlo con un dibujo). Repitiendo los cálculos hechos antes, se obtiene la ecuación de esta hipérbola, referida a los nuevos ejes (que son sus propias asíntotas), la cual resulta de la forma:

$$\boxed{x' \cdot y' = k \;\text{ con } k > 0} \text{ (ramas en los cuadrantes 1º y 3º)}$$

De lo anterior se concluye que las ecuaciones de la forma $\boxed{x \cdot y = k}$ (con k distinto de cero) representan **hipérbolas equiláteras, cuyas asíntotas son los propios ejes de coordenadas** (si $k > 0$ las ramas de la hipérbola estarán en los cuadrantes 1º y 3º, y si $k < 0$ las ramas estarán en los cuadrantes 2º y 4º).
Este es un ejemplo notable de cónica no horizontal ni vertical, cuya ecuación como vemos incluye el término en xy.

4.- Eliminación del término en xy de la ecuación general de una cónica

Sea una cónica de ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $B \neq 0$, que no se reduzca a $xy = k$ (la cual ya conocemos si $k \neq 0$ como hipérbola equilátera ordinaria y si $k = 0$ es una hipérbola degenerada, formada por los puntos de ambos ejes de coordenadas).

La ecuación anterior nos indica que la cónica correspondiente no es circunferencia, ni podrá ser otra cónica cualquiera que esté en posición horizontal o vertical (por ser $B \neq 0$).

¿Cómo saber qué cónica es y dónde está situada?

La idea es aplicar a los ejes OXY una rotación alrededor del origen, de ángulo agudo α **conveniente** (positivo o negativo), de modo que los nuevos ejes obtenidos OX' y OY' queden paralelos a los ejes de simetría de la cónica dada (o si es parábola, que uno de los nuevos ejes quede paralelo al único eje de simetría), con lo cual la nueva ecuación de la cónica será de la forma $A_1(x')^2 + B_1x'y' + C_1(y')^2 + D_1x' + E_1y' + F_1 = 0$, con $\boxed{B_1 = 0}$.

Y para conocer ese ángulo α **conveniente**, lo que se hace es aplicar a los ejes OXY una rotación de ángulo agudo cualquiera (sin determinar) y luego buscaremos dicho ángulo para que resulte $\boxed{B_1 = 0}$.
Entonces, después de sustituir las ecuaciones dadas en la pág. 11 (que corresponden a la rotación de ejes de ángulo α) en la ecuación dada de la cónica y después de hacer las operaciones que quedarán indicadas, podremos igualar a cero el coeficiente que resulte para el término $x'y'$.

Pero ese coeficiente B_1 provendrá solamente de sumar los coeficientes de $x'y'$ que aparezcan en $A \cdot (x' \cdot cos\,\alpha - y' \cdot sen\,\alpha)^2$, en $B \cdot (x' \cdot cos\,\alpha - y' \cdot sen\,\alpha) \cdot (x' \cdot sen\,\alpha + y' \cdot cos\,\alpha)$ y en $C \cdot (x' \cdot sen\,\alpha + y' \cdot cos\,\alpha)^2$. En el primer cuadrado aparecerá $-2A \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha$ como coeficiente de $x'y'$; en la segunda expresión aparecerá $B \cdot (cos^2\alpha - sen^2\alpha)$ como coeficiente de $x'y'$, y en el segundo cuadrado aparecerá $2C \cdot sen\,\alpha \cdot \cos\alpha$ como coeficiente de $x'y'$.

En conclusión: El coeficiente de $x'y'$ en la nueva ecuación obtenida al aplicar la rotación de ángulo α será $\boxed{-A \cdot sen\,2\alpha + B \cdot cos\,2\alpha + C \cdot sen\,2\alpha = (C - A) \cdot sen\,2\alpha + B \cdot cos\,2\alpha}$.

Entonces, si es $A \neq C$, para que este coeficiente valga cero, habrá que tomar α de modo que se cumpla $tan\,2\alpha = B/(A - C)$, de donde resulta:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \cdot arc\,tan\left(\frac{B}{A-C}\right)}$$

Y si es $A = C$ el coeficiente se reducirá a $B \cdot \cos 2\alpha$, que valdrá cero cuando sea $2\alpha = \pi/2$ o sea $2\alpha = -\pi/2$. Por tanto, en ese caso debemos tomar: $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ o bien $\boxed{\alpha = -\frac{\pi}{4}}$ (en la práctica se toma $\alpha = \pi/4$ en estos casos).

Entonces, vemos que α quedará en valor absoluto entre 0 y $\pi/4$, pudiendo llegar a valer $\pi/4$ en el caso $A = C$ (recuérdese que la función arco tangente toma sus valores entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ sin llegar a esos valores, con lo cual su mitad estará entre $-\pi/4$ y $\pi/4$, sin alcanzarlos). Además, en todo caso α tendrá el mismo signo que $B/(A - C)$.

Y ya conocido el ángulo α , puede obtenerse la ecuación de la cónica dada respecto al sistema OX'Y' (la cual no tendrá término en $x'y'$) y luego pasar a la correspondiente ecuación reducida por completación de cuadrados (como hacíamos anteriormente para las cónicas horizontales o verticales). Finalmente, podremos representar gráficamente dicha cónica en el sistema OX'Y' (con lo cual quedará también su representación respecto al sistema inicial OXY, porque podemos dibujar este sistema aplicándole a OX'Y' una rotación alrededor de O de ángulo $-\alpha$).

Ejemplo 1: Identificar la cónica de ecuación general

$$23x^2 - 26\sqrt{3}\,xy - 3y^2 - (36\sqrt{3} + 16)x + (36 - 16\sqrt{3})y - 124 = 0$$

Aquí $A \neq C$, con lo cual tomamos: $\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \cdot arc\ tan\left(\frac{-26\sqrt{3}}{23+3}\right) = \frac{1}{2} \cdot arc\ tan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}}$

Las ecuaciones del cambio de coordenadas (pág. 11) serán entonces:

$$(1) \quad \boxed{x = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} \quad ; \quad y = \frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2}}$$

Las cuales, sustituidas en la ecuación de la cónica dada, nos conducen a la ecuación de la misma en el sistema OX'Y' que resulta de rotar el OXY alrededor de O un ángulo de $-\pi/6$ radianes o de -30º: La cual, después de operar, simplificar y ordenar resulta ser:

$$9(x')^2 - 4(y')^2 - 18x' - 8y' - 31 = 0$$

(obsérvese que no tiene término en $x'y'$, como debe ser)

Nos damos cuenta ahora de que se trata de una hipérbola, porque $9 \cdot (-4) < 0$.

Completando cuadrados, operando y ordenando, se llega finalmente a la ecuación reducida de dicha hipérbola en OX'Y':

$$\boxed{\frac{(x'-1)^2}{4} - \frac{(y'+1)^2}{9} = 1}$$

Conclusión: La cónica es la **hipérbola horizontal** de centro el punto C'$(1\ ,\ -1)$ y de parámetros $a = 2$ y $b = 3$.

A partir de estos datos, podremos escribir las coordenadas de los dos vértices y de los dos focos, así como las ecuaciones de las dos asíntotas (todo en el sistema OX'Y'). Y, haciendo uso del corres-pondiente rectángulo de referencia, ya podremos representar gráficamente esa hipérbola en dicho sistema.

Y como el sistema OX'Y' se obtuvo aplicándole al sistema original OXY una rotación de -30º alrededor del origen, el sistema original resultará de aplicar a OX'Y' una rotación de 30º alrededor de O (rotación inversa). Y si dibujamos los dos sistemas, veremos la posición de la hipérbola respecto al sistema inicial (no horizontal ni vertical, sino en una posición oblicua).

1) Si quisiésemos obtener exactamente las coordenadas de algunos de los puntos importantes de la hipérbola en el sistema original OXY, bastaría usar las ecuaciones (1). Así, por ejemplo, el centro de la hipérbola respecto del sistema OXY se obtiene sustituyendo en esas ecuaciones x' por 1 e y' por -1, obteniéndose el punto:

$$\text{C}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ ,\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) Por otro lado, las ecuaciones de las asíntotas respecto a OX'Y' son:

$$\boxed{y' + 1 = \pm\frac{3}{2}(x' - 1)}$$

Y sus ecuaciones, respecto a OXY, se obtendrían despejando x' e y' del sistema (1) de dos ecuaciones con dos incógnitas, para luego sustituir las expresiones obtenidas en las ecuaciones anteriores de las asíntotas.

Así resultan $\boxed{x' = \frac{\sqrt{3}x - y}{2}}$ e $\boxed{y' = \frac{x + \sqrt{3}y}{2}}$, con lo cual ya podemos sustituir en las ecuaciones anteriores de las asíntotas, obteniendo:

$$\boxed{\frac{x + \sqrt{3}y}{2} + 1 = \pm\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2} - 1\right)}$$

que son las ecuaciones de las mismas asíntotas respecto del sistema inicial OXY (faltaría operar).

3) Finalmente, el eje de simetría que contiene al "eje transverso" y a los dos focos de esta hipérbola respecto a OX'Y' es la recta horizontal $y' = -1$ y el otro eje de simetría es la recta $x' = 1$ (vertical). Con lo cual, las ecuaciones de dichos ejes de simetría en el sistema OXY son las rectas de ecuaciones $x + \sqrt{3}y = -2$ (obtenida de la primera sustituyendo y' por la expresión dada en la página anterior) y $\sqrt{3}x - y = 2$ (obtenida de la segunda sustituyendo x' por la expresión de la página anterior).
Obsérvese que ninguna de estas rectas es horizontal ni vertical en el sistema de coordenadas OXY (como sabíamos desde el principio, ya que la ecuación dada de la cónica tenía término en xy).

Ejemplo 2: Identificar la cónica de ecuación $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 3 = 0$.

Aquí es $A = C$, luego tomamos $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$. Entonces, las ecuaciones del cambio de coordenadas por rotación de ejes serán:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')}$$

Y al sustituir estas expresiones en la ecuación de la cónica dada, queda (después de operar, simplificar y ordenar):

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{7}{2}(y')^2 - 3 = 0 \qquad \text{(no aparece término en } x'y'\text{, como debe ser)}$$

Pasando -3 al segundo miembro y dividiendo todo por 3, se obtiene:

$$\frac{(x')^2}{6} + \frac{7(y')^2}{6} = 1 \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{(x')^2}{6} + \frac{(y')^2}{6/7} = 1}$$

Conclusión: La cónica dada es la **elipse horizontal** (respecto al sistema OX'Y'), cuyo centro es el origen y de semiejes $a = \sqrt{6}$ y $b = \sqrt{6/7}$.

Puede dibujarse perfectamente esta elipse en el sistema de coordenadas OX'Y' y como el mismo se obtuvo del sistema original girándolo 45º alrededor del origen, el sistema OXY se obtendrá girando el OX'Y' un ángulo de -45º alrededor de O. Y si dejamos los dos sistemas dibujados, podremos ver cómo queda situada le elipse respecto al sistema inicial OXY (no quedará horizontal ni vertical, porque su ecuación inicial tenía término en xy).
