VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

(Prerrequisito: Trigonometría plana)

Vectores fijos y vectores libres del plano

Un "vector fijo" es un segmento rectilíneo orientado (o sea con un sentido de recorrido entre sus extremos). Por tanto, tendrá un punto inicial A (llamado también origen del vector) y un punto final B (llamado también extremo del vector). El vector se representa entonces por $\overrightarrow{AB}$. Los puntos A y B pueden estar en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, con lo cual cada uno tendrá tres coordenadas y el vector fijo correspondiente se considerará de dicho espacio, o pueden estar en el plano $\mathbb{R}^2$ (cada uno con dos coordenadas) y el vector fijo se considerará de dicho plano.

En lo que sigue, trataremos inicialmente vectores del plano $\mathbb{R}^2$con sus operaciones básicas y luego extenderemos los conceptos y propiedades al espacio $\mathbb{R}^3$, dando dos operaciones adicionales muy importantes que sólo existen en dicho espacio.

Un vector fijo del plano, cuyo punto inicial es A y cuyo punto final es B, tiene como "módulo" la longitud del intervalo AB; tiene como "dirección" la de la recta que lo contiene (o la de cualquier recta paralela, pues rectas paralelas definen la misma dirección), y tiene como "sentido" el que corresponde a pasar, sobre la recta AB, del punto A al punto B.

Si prescindimos de la importancia del origen del vector, y sólo nos interesasen su módulo, su dirección y su sentido, estaríamos en el concepto de "vector libre" (que se representa con una sola letra minúscula, en vez de dos mayúsculas). De modo que todos los vectores fijos que tengan el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$, se considerarán otros representantes de un único vector libre $\vec{v}$. Como $\overrightarrow{AB}$ es un representante de $\vec{v}$, podemos escribir $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Pero si $\overrightarrow{CD}$ es otro vector fijo que tiene el mismo módulo, dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$, también podremos escribir $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Una propiedad fundamental es que si damos un vector libre $\vec{v}$ y damos cualquier punto A del plano, existe un único vector fijo de origen A que sea representante del vector libre $\vec{v}$.
En efecto, sobre la única recta r del plano que pasa por A con la dirección dada por $\vec{v}$ (paralela al representante que tengamos de $\vec{v}$), tomaremos el único punto B que dista de A el valor del módulo de $\vec{v}$, de forma que el sentido del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ coincida con el del vector $\vec{v}$. Por tanto, hemos encontrado un único vector fijo de origen A que tiene el módulo, la dirección y el sentido del vector libre $\vec{v}$, luego es representante del mismo.
(Es fácil ver en una figura que hay dos alternativas para elegir el punto B sobre r a partir del punto A dado, de modo que el módulo de $\overrightarrow{AB}$ coincida con el de $\vec{v}$, pero solamente una de esas alternativas logra que el sentido de $\overrightarrow{AB}$ coincida con el de $\vec{v}$).

Un vector fijo que tenga sus puntos origen y extremo coincidentes, se llama "vector fijo cero" (se reduce a un punto, luego tiene módulo cero, no tiene dirección y no tiene sentido). Todos los vectores fijos cero son representantes del "vector libre cero", que se representa por $\vec{0}$.

Finalmente, dado el vector libre $\vec{v}$, hay siempre otro vector libre que tiene el mismo módulo, la misma dirección y **sentido contrario**. Se representa por $-\vec{v}$ y se llama "vector opuesto de $\vec{v}$".

Ángulo entre dos vectores libres

Dados dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$, consideremos los únicos representantes de ambos con origen común $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, respectivamente. Pues bien, hay dos ángulos del plano con vértice en A y cuyos lados contengan a los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (recordemos que los lados de un ángulo son **semirrectas** que tienen por origen el vértice de dicho ángulo). De esos dos ángulos planos, uno será menor de 180º y el otro será mayor de 180º, de forma que la suma de sus amplitudes será 360º, o bien los dos ángulos planos serán de 180º (cuando $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección y sentidos contrarios). Además, si dichos vectores libres tienen la misma dirección y el mismo sentido, el ángulo menor de 180º tendrá 0º y el otro tendrá 360º.

Pues bien, llamamos "ángulo de los dos vectores" $\vec{v}$ y $\vec{w}$ **al menor** de los dos ángulos planos determinados por los mismos como explicamos antes. Y en el caso de que los dos ángulos planos sean iguales, de 180º, el ángulo de los dos vectores será de 180º. Por tanto, llamando α a dicho ángulo, se tendrá siempre $\boxed{0º \leq \alpha \leq 180º}$, o en radianes $\boxed{0 \leq \alpha \leq \pi}$.

Componentes escalares de un vector libre del plano

Supongamos que el vector libre $\vec{v}$ tiene como representante suyo el vector fijo $\overrightarrow{AB}$. Si las coordenadas cartesianas del punto A son (x_1, y_1) y las coordenadas del punto B son (x_2, y_2), las "componentes escalares" del vector $\vec{v}$ son las diferencias $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$. Se demuestra que estas componentes escalares no dependen de que se elija para el vector libre $\vec{v}$ el representante fijo $\overrightarrow{AB}$ u otro representante fijo cualquiera. O sea, que si el vector fijo $\overrightarrow{CD}$ representa también al vector libre $\vec{v}$, siendo C(x_3, y_3) y D(x_4, y_4), se cumple:

primera componente escalar de $\vec{v}$: $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$
segunda componente escalar de $\vec{v}$: $y_4 - y_3 = y_2 - y_1$

Entonces, si representamos la primera componente escalar de $\vec{v}$ con la letra a y representamos la segunda componente escalar de $\vec{v}$ con la letra b, se escribe $\boxed{\vec{v} = (a\,,b)}$.

Es muy sencillo ver que si es $\vec{v} = (a\,,b)$, será $-\vec{v} = (-a\,,-b)$. Además, para el vector libre cero se tiene $\vec{0} = (0\,,0)$.

Ahora tenemos una relación importantísima entre el módulo del vector $\vec{v}$, que representamos por $|\vec{v}|$, y sus componentes escalares a y b:

$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (se supone **ortogonal** el sistema de referencia cartesiano)

Así, el módulo de un vector es siempre un número real positivo o cero (y es cero solamente cuando el vector sea $\vec{0}$). Además $|-\vec{v}| = |\vec{v}|$, cosa que sabíamos, pero lo confirma la expresión anterior del módulo al ser $-\vec{v} = (-a\,,-b)$ y ser $\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Operaciones con vectores libres del plano

1) Suma de vectores libres:

La suma de los vectores $\vec{v} = (a, b)$ y $\vec{w} = (c, d)$ se hace así: Se toma un representante cualquiera $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{v}$ y se toma el único representante de $\vec{w}$ que tenga su origen en el punto B. Será un vector fijo $\overrightarrow{BD}$. Tomamos ahora el nuevo vector fijo $\overrightarrow{AD}$, cuyo origen es el origen de $\overrightarrow{AB}$ y cuyo extremo es el extremo de $\overrightarrow{BD}$. Se tiene $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Y se demuestra que $\boxed{\vec{v} + \vec{w} = (a + c\,, b + d)}$.

Nota: La suma de $\vec{v}$ con $-\vec{v}$ da el vector libre cero. En efecto, $\vec{v}+(-\vec{v})=(a-a\,,b-b)=\vec{0}$

---

2) Diferencia de vectores libres:

La diferencia $\vec{v}-\vec{w}$ se obtiene sumando el vector $\vec{v}$ con el opuesto del vector $\vec{w}$. O sea, $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$. Se tiene entonces: $\boxed{\vec{v}-\vec{w}=(a-c\,,b-d)}$.

Nota: La diferencia $\vec{v}-\vec{v}$ da el vector libre cero, puesto que $\vec{v}-\vec{v}=\vec{v}+(-\vec{v})$.

---

3) Producto de un número real por un vector libre:

Si el número real k es positivo, el producto $k\vec{v}$ es otro vector libre, cuyo módulo resulta de multiplicar el módulo de $\vec{v}$ por k, cuya dirección es la misma de $\vec{v}$ y cuyo sentido es el mismo de $\vec{v}$. Por tanto, será $1\vec{v}=\vec{v}$.
Si el número real k es cero, el producto $k\vec{v}$ será $\vec{0}$.
Y si el número real k es negativo, el producto $k\vec{v}$ es otro vector libre, cuyo módulo resulta de multiplicar el módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k, cuya dirección es la misma de $\vec{v}$ y cuyo sentido es el contrario al de $\vec{v}$. Por tanto, será $(-1)\vec{v}=-\vec{v}$.

Se demuestra que si $\vec{v}=(a,b)$, en todos los casos es $\boxed{k\vec{v}=(k\cdot a\,,\ k\cdot b)}$. Con lo cual, $|k\vec{v}|=\sqrt{(k\cdot a)^2+(k\cdot b)^2}=\sqrt{k^2}\cdot|\vec{v}|=|k|\cdot|\vec{v}|$, donde $|k|$ es el valor absoluto del número real k. Y además, el producto de cualquier número k por el vector libre cero es el vector libre cero. O sea, $k\vec{0}=\vec{0}$ para todo k real.

---

4) Producto escalar de vectores libres:

Dados los vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$, distintos del vector cero, el producto escalar $\vec{v}\circ\vec{w}$ es el **número real** obtenido multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman dichos vectores. O sea,

$$\boxed{\vec{v}\circ\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot cos\,\alpha}$$

La operación se llama “producto escalar” porque el resultado es un escalar, o sea un número real; el cual será positivo si α es cero o α es un ángulo agudo; será cero si α es un ángulo recto, y será negativo si α es un ángulo obtuso comprendido entre un recto y un llano, o si α es llano. (Recuérdese que siempre es 0º $\leq \alpha \leq$ 180º, o bien $0\leq\alpha\leq\pi$ cuando α está en radianes).

Se demuestra que si $\vec{v}=(a\,,b)$ y $\vec{w}=(c\,,d)$, será $\boxed{\vec{v}\circ\vec{w}=a\cdot c+b\cdot d}$.

Y en esta forma puede extenderse el producto escalar al caso en que alguno de los vectores libres sea el vector cero, de forma que en ese caso el producto será siempre el número cero.

Por tanto, cuando los vectores $\vec{v}=(a,b)$ y $\vec{w}=(c,d)$ sean no nulos (distintos del vector cero) podremos escribir:

$$\boxed{a\cdot c+b\cdot d=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot cos\,\alpha}$$

de donde resulta:
$$\boxed{cos\,\alpha=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}}$$

que nos permite conocer el coseno del ángulo que forman los vectores.

Y como sabemos que dicho ángulo en radianes está entre 0 y π, podemos escribir:

$$\boxed{\alpha = arc\ cos\left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}}\right)}$$

pues los valores de la función arco coseno llenan el intervalo $[0\ ,\pi]$. (Ver Sección 2.2).

Propiedades principales de las operaciones con vectores libres del plano

Propiedades de la suma de vectores:

1) Para tres vectores dados es siempre $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (propiedad asociativa)
2) Para dos vectores dados es siempre $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (propiedad conmutativa)
3) Para cualquier vector $\vec{u}$ es siempre $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ es elemento neutro de esta operación)
4)Todo vector $\vec{u}$ tiene un vector opuesto $-\vec{u}$, de forma que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (existencia de simétrico para todos los vectores)

Propiedades del producto de número real por vector:

1) Siendo k un real, es siempre $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ (propiedad distributiva)
2) Si k_1 y k_2 son dos reales, es siempre $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$ (otra propiedad distributiva)
3) Si k_1 y k_2 son dos reales, es siempre $(k_1 \cdot k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$ (propiedad asociativa)
4) Para cualquier vector $\vec{u}$ es siempre $1\vec{u} = \vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ y $0\vec{u} = \vec{0}$.

Propiedades del producto escalar de vectores:

1) Para dos vectores dados es siempre $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$ (propiedad conmutativa)
2) Para tres vectores dados es siempre $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$ (propiedad distributiva)
3) Siendo k un real, es siempre $(k\vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ (k\vec{v}) = k \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$ (propiedad especial)
En particular: $(-\vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ (-\vec{v}) = -(\vec{u} \circ \vec{v})$ (el cambio de signo de uno de los factores cambia el signo del resultado)
4) Para cualquier vector $\vec{u}$ es siempre $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$ (el = se cumple solamente si $\vec{u} = \vec{0}$)

Coordenadas de un vector libre respecto de la base canónica del plano

El vector libre $\vec{\imath}$ es el que tiene módulo 1, dirección la del eje OX y sentido el positivo sobre dicho eje (de izquierda a derecha).

El vector libre $\vec{\jmath}$ es el que tiene módulo 1, dirección la del eje OY y sentido el positivo sobre dicho eje (de abajo a arriba).

Los vectores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ forman lo que se llama "la base canónica de los vectores libres del plano", porque todo vector libre $\vec{v}$ que demos se puede escribir de un modo único del siguiente modo: $\boxed{\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}}$, donde a y b son precisamente las componentes escalares del vector $\vec{v}$. (Por ello, estas "componentes escalares" del vector se llaman también "sus coordenadas respecto a la base canónica").

Nota: Obviamente, las coordenadas de $\vec{\imath}$ son (1 , 0) y las coordenadas de $\vec{\jmath}$ son (0 , 1).

Los vectores $a\vec{\imath}$ y $b\vec{\jmath}$, cuya suma nos da el vector $\vec{v}$, se llaman "componentes vectoriales" de dicho vector $\vec{v}$ según las direcciones de los ejes. Observamos que si a fuese negativa, la componente vectorial $a\vec{\imath}$ tendrá la dirección del eje OX pero tendrá sentido contrario al positivo del eje. Y si fuese negativa b, la componente $b\vec{j}$ tendrá la dirección del eje OY pero sentido contrario al positivo del eje.

Si hallamos el producto escalar $\vec{v} \circ \vec{i}$ obtenemos $|\vec{v}| \cdot \cos\alpha$, donde α es el ángulo menor que forma el vector $\vec{v}$ con la parte positiva del eje OX (que es el ángulo entre $\vec{v}$ e $\vec{i}$). Pero, a su vez, dicho producto escalar puede escribirse $a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$. Por tanto, tenemos $\boxed{a = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha}$.

Y si hallamos el producto escalar $\vec{v} \circ \vec{j}$ obtendremos $|\vec{v}| \cdot \cos\beta$, donde β es el ángulo menor que forma el vector $\vec{v}$ con la parte positiva del eje OY (que es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{j}$). Pero dicho producto es $a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$, luego tenemos $\boxed{b = |\vec{v}| \cdot \cos\beta}$.

Usando las dos expresiones obtenidas en los párrafos anteriores, podemos escribir:

$$\boxed{\vec{v} = (a\,, b) = (|\vec{v}| \cdot \cos\alpha\,, |\vec{v}| \cdot \cos\beta) = |\vec{v}|(\cos\alpha\,, \cos\beta)}$$

donde el nuevo vector $\vec{u} = (\cos\alpha\,, \cos\beta)$ es el **vector unitaro** (de módulo 1) que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$. Obsérvese que dicho vector unitario es entonces $\boxed{\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}}$.

Las componentes de dicho vector unitario $\vec{u}$ se suelen llamar "cosenos directores" del vector $\vec{v}$.

Extensión de todo lo anterior al espacio

En todo lo que sigue cuando digamos “espacio” nos estaremos refiriendo a $\mathbb{R}^3$, donde suponemos la existencia de un “sistema cartesiano ortogonal” de referencia (tres ejes mutuamente perpendiculares; con unidades de escala iguales sobre cada uno, y orientado de modo que si giramos en el plano OXY el semieje positivo OX un ángulo de 90º hasta que coincida con el semieje positivo OY, aplicándole el mismo giro a un tornillo normal con su cabeza en el origen y situado en la dirección y sentido del eje OZ positivo, el tornillo avanzaría en ese sentido positivo).

Nota: Suponemos que el tornillo es de los que “avanzan girando a la derecha”, como la inmensa mayoría, porque también hay tornillos que “avanzan girando a la izquierda”.

El concepto de “vector fijo” $\overrightarrow{AB}$ puede extenderse perfectamente al espacio, con puntos origen y extremo en $\mathbb{R}^3$ (por tanto, puntos con tres coordenadas, en vez de dos coordenadas), teniendo módulo, dirección y sentido que se definen análogamente.

Así mismo, el concepto de “vector libre” (donde no importa el origen del vector y que tiene solamente módulo, dirección y sentido) se define análogamente, con la misma notación que usábamos en el plano.

Y sigue ocurriendo que dados en vector libre $\vec{v}$ y un punto P cualquiera del espacio $\mathbb{R}^3$, hay siempre un único vector fijo con origen en P que representa a $\vec{v}$.

Siendo el punto A de coordenadas (x_1, y_1, z_1) y B de coordenadas (x_2, y_2, z_2), las “componentes escalares” del vector libre $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ son $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$. Como en el caso del plano, las componentes escalares de un cierto vector libre $\vec{v}$ no dependen de cuál sea su representante fijo y se usa la notación $\boxed{\vec{v} = (a, b, c)}$ (ya no importan las coordenadas de los puntos origen y extremo del vector fijo que lo represente, sino importan sus diferencias). Y se tiene ahora $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, porque el sistema cartesiano es ortogonal. Además, $-\vec{v} = (-a, -b, -c)$ y $\vec{0} = (0\,, 0\,, 0)$.

Las operaciones de suma y diferencia de vectores, así como la multiplicación de un número real por un vector, se extienden sin problemas al espacio (operando con las tres componentes escalares de cada vector, como hacíamos en el plano con las dos únicas componentes que teníamos).

De igual modo se extiende la definición dada para el producto escalar de vectores, como producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman, o bien como suma de los tres productos de sus correspondientes componentes escalares.

Y el ángulo que forman dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ se establece así: Como ángulo de 0 radianes, si los dos vectores tienen la misma dirección y el mismo sentido (así ocurría con los vectores del plano $\mathbb{R}^2$); como ángulo de π radianes, si los vectores tienen la misma dirección y sentidos contrarios (también como ocurría en el plano), y cuando los vectores tengan direcciones diferentes, se toman dos representantes fijos de ambos vectores que tengan origen común, con lo cual habrá un único plano que contenga a ambos vectores fijos y el ángulo que forman los vectores se define en dicho plano de igual modo que se hacía en $\mathbb{R}^2$(de los dos ángulos planos que se forman se elige el menor).

Así el ángulo de los vectores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$ viene dado por:

$$\alpha = arc\ cos\left(\frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$

con lo cual dos vectores no nulos serán perpendiculares solamente si su producto escalar es cero (su producto escalar es el numerador de la fracción anterior).

Las propiedades de las operaciones suma, producto de número real por vector y producto escalar de vectores (dadas para vectores del plano en la pág. 4) siguen cumpliéndose en el espacio.

"La base canónica de los vectores libres del espacio" está formada por los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$, todos de módulo 1 y con las direcciones y sentidos positivos de los tres ejes de coordenadas. Y todo vector libre $\vec{v}$ tiene como "coordenadas respecto de la base canónica" a sus propias componentes escalares. O sea, que si es $\vec{v} = (a, b, c)$, podemos escribir $\boxed{\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}$.

Finalmente, si el vector $\vec{v}$ forma con $\vec{i}$ el ángulo α, forma con $\vec{j}$ el ángulo β y forma con $\vec{k}$ el ángulo γ, se tiene: $\boxed{a = |\vec{v}| \cdot cos\,\alpha}$; $\boxed{b = |\vec{v}| \cdot cos\,\beta}$ y $\boxed{c = |\vec{v}| \cdot cos\,\gamma}$. Donde $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$ y $cos\,\gamma$ se llaman "cosenos directores" del vector $\vec{v}$.

Entonces será $\vec{v} = (|\vec{v}|.\,cos\,\alpha\,,\,|\vec{v}| \cdot cos\,\beta\,,\,|\vec{v}| \cdot cos\,\gamma) = |\vec{v}|\,(cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma)$, donde el vector $\boxed{\vec{u} = (cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma)}$ es **el vector unitario** (de módulo 1) que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, siendo entonces

$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \left(\frac{a}{|\vec{v}|}, \frac{b}{|\vec{v}|}, \frac{c}{|\vec{v}|}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)}$$

Producto vectorial de vectores del espacio

Dados dos vectores libres del espacio, hay otra operación que puede hacerse con ellos y que da como resultado **un nuevo vector**, por lo cual se llama "producto vectorial" (para diferenciarlo del "producto escalar", donde su resultado es siempre un número real). Esta operación no puede hacerse trabajando solo con vectores del plano, porque el vector resultante queda fuera del plano que contiene a los dos factores (se necesitan tres dimensiones).

Si tenemos los vectores del espacio $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$, el "producto vectorial" de $\vec{v}$ por $\vec{w}$, representado por $\vec{v} \times \vec{w}$, queda definido así:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

<u>Ejemplo</u>: Sean $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (1, -3, 2)$. Se tiene:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 7\vec{k} = (2, -4, -7)$$

Propiedades principales del producto vectorial

1) Se demuestra que $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot sen\ \alpha$, siendo α el ángulo de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (como es $0 \leq \alpha \leq \pi$, será siempre $sen\ \alpha \geq 0$).

2) <u>Si elegimos representantes fijos de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con un origen común y el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ no es el vector cero,</u> **<u>el módulo del mismo es el doble del área del triángulo que determinan ambos vectores fijos</u>**. O bien, <u>es al área del paralelogramo que determinan ambos vectores</u> (pues $|\vec{v}|$ es una base de dicho rectángulo y $|\vec{w}| \cdot sen\ \alpha$ es la correspondiente altura).

3) <u>Cuando $\vec{v} \times \vec{w}$ sea distinto del vector cero, el vector obtenido resulta ser perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$</u>.
En efecto, se tiene $\boxed{\vec{v} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = 0}$. Pues llamando de nuevo $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$, las tres coordenadas del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ serán $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (como establecimos anteriormente en la definición del producto escalar mediante un determinante). Por tanto, el producto escalar $\vec{v} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$ será

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

que <u>es el desarrollo por los elementos de la primera fila del determinante</u> $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, <u>el cual valdrá cero por tener las dos primeras filas iguales</u> (ver Sección 9.1).
Y análogamente ocurre con el segundo producto escalar $\vec{w} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$, que <u>será el desarrollo por los elementos de la primera fila del determinante</u> $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, <u>el cual también vale cero por tener las filas primera y tercera iguales</u>.

4) En ese mismo caso de que $\vec{v} \times \vec{w}$ es distinto del vector cero, se demuestra que **el sentido del producto vectorial viene dado por la llamada "regla del tornillo"**.
<u>Lo cual significa lo siguiente</u>: Si se toman vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que sean, respectivamente, representantes de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$, <u>el representante del producto vectorial que tenga su origen en A estará contenido en la recta perpendicular al plano ABC por el punto A</u>, por lo dicho en la propiedad anterior. Pues bien, si giramos en ese plano el vector $\overrightarrow{AB}$ alrededor del punto A hasta llevarlo sobre $\overrightarrow{AC}$ <u>recorriendo el ángulo más corto que forman ambos vectores</u>, ese movimiento aplicado a un tornillo con "rosca normal" que esté situado sobre esa recta perpendicular con su cabeza en

A (en uno de las dos sentidos posibles), avanzará o retrocederá (según la posición en que lo hayamos colocado sobre la perpendicular) **marcando en cualquiera de los dos casos el sentido que tiene el producto vectorial**. (Hacer un dibujo en perspectiva de lo que decimos, para aclarar la idea). (Nótese que al cambiar el orden de los factores, el giro se hace en sentido contrario y el tornillo avanzará o retrocederá también en sentido contrario). Se comprueba lo dicho anteriormente pues se tiene $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$ y también $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ (basta aplicar la definición usando el determinante). Con lo cual, $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ así como $\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

Nota: Decimos tornillo con "rosca normal", o sea que avance cuando giramos su cabeza en sentido horario. Porque hay tornillos que avanzan girándolos en sentido antihorario.

5) El producto vectorial no es conmutativo: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (propiedad anticonmutativa).
En efecto, al cambiar el orden de los factores, el módulo del producto será el mismo, la dirección también será la misma, pero como acabamos de explicar en la propiedad anterior el sentido del vector se habrá invertido.
También puede verse a través del determinante que nos sirvió para la definición del producto vectorial, pues el mismo cambiará de signo si intercambiamos sus dos últimas filas entre sí.

5) Si al menos uno de los vectores es el vector cero, el producto vectorial de ambos también es el vector cero. O sea, $\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0} \times \vec{0} = \vec{0}$.
En efecto, al ser nula la segunda o la tercera fila del determinante que define el producto vectorial, las tres coordenadas del mismo serán cero.

6) Si dos vectores son diferentes del vector cero pero son proporcionales (uno es el producto de un número real por el otro), su producto vectorial es el vector cero. O sea, para todo real λ real se tiene $\vec{v} \times (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}$. En particular, $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.
Pues al tener las dos últimas filas proporcionales o iguales, el determinante que define el producto vectorial dará $0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}$ (los tres menores que dan las coordenadas del producto valdrán cero). O bien, porque el ángulo α de $\vec{v}$ y $\lambda\vec{v}$ será cero si $\lambda > 0$ o será llano si $\lambda < 0$, con lo cual $sen\ \alpha = 0$ y entonces el módulo del producto vectorial será cero.

7) Si λ es un número real cualquiera, se tiene: $(\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\lambda\vec{w}) = \lambda(\vec{v} \times \vec{w})$
Pues si se multiplica por λ solamente la segunda fila o solamente la tercera fila del determinante que define el producto vectorial, las tres coordenadas de dicho producto quedarán multiplicadas por λ.

8) Finalmente, para tres vectores libres cualesquiera se tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \quad ; \quad (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$$

Nota importante: Una regla práctica similar a la mencionada "regla del tornillo" es la llamada "regla de la mano derecha" (más intuitiva).
Se puede explicar así: Se supone que tenemos ya representantes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que no sean proporcionales y por tanto tengan direcciones diferentes. Y sabemos que la dirección del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ es la de la recta perpendicular al plano ABC por el punto A. Queremos determinar el sentido del vector producto sobre dicha recta. Imaginamos la mano derecha cerrada y colocada sobre una cara del plano ABC, con la parte del lado meñique apoyada sobre dicho plano y situada cerca del punto A. Entonces, si la posición de los cuatro dedos mayores indica una rotación sobre el plano que lleve el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$, recorriendo **el ángulo menor** entre los vectores, el dedo pulgar extendido indicará el sentido del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.

Y si los dedos mayores indican rotación que lleve $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ pero no recorriendo el ángulo menor entre los vectores (que es el ángulo que ambos forman, por definición), el sentido del vector producto será el contrario al indicado por el dedo pulgar extendido.

Producto mixto de vectores en el espacio

Dados tres vectores libres en el espacio $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se puede considerar un doble producto realizado con los mismos (los dos últimos se multiplican vectorialmente y el primero se multiplica escalarmente por el vector resultante de ese producto, resultando finalmente un número real). Si representamos dicho doble producto por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, se tendrá:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

siendo α el ángulo que forma $\vec{u}$ con el vector $\vec{v} \times \vec{w}$ y siendo β el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Obsérvese que el signo de $\operatorname{sen}\beta$ será siempre positivo (pues estará entre 0º y 180º). Pero $\cos\alpha$ será positivo cuando α sea agudo, será negativo cuando α sea obtuso (entre 90º y 180º) y será cero cuando α sea recto (cuando $\vec{u}$ sea perpendicular al producto $\vec{v} \times \vec{w}$). En este último caso, si elegimos vectores fijos representativos de los tres vectores libres dados con un origen común, el representante de $\vec{u}$ estará en el plano determinado por los representantes de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, o sea los tres vectores serán coplanarios.
Es decir, que los valores de todos los productos mixtos posibles llenarán el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, ya que los módulos de los vectores pueden ser arbitrariamente grandes, manteniendo los ángulos.

Se tienen las siguientes propiedades del producto mixto:

1) Si es $\vec{u} = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + c_2\vec{k}$ y $\vec{w} = a_3\vec{\imath} + b_3\vec{\jmath} + c_3\vec{k}$, se tiene

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

En efecto, $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{k}$ (ver pág. 7), luego el producto escalar $\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$ será $a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, que es el desarrollo del determinante anterior por los elementos de la primera fila (ver Sección 9.1)

2) Al cambiar el orden de dos de los vectores entre si, el producto mixto cambia de signo.
Porque el cambio de orden entre dos de los tres vectores equivale a un intercambio solamente de las dos filas correspondientes en el determinante, lo cual cambia su signo (ver Sección 9.1).

3) El producto mixto será cero si hay una combinación lineal entre los tres vectores o entre dos de ellos (en cuyos casos los vectores serán coplanarios).
En efecto, entonces habrá una combinación lineal entre las filas del determinante y el mismo valdrá cero (ver Sección 9.1).

4) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$ (las “permutaciones cíclicas” de los tres vectores no alteran el resultado final).
En efecto, al pasar el último factor a primera posición dejando los otros dos en el orden anterior (cosa que ha hecho las tres veces), la última fila del determinante pasa a ser la

primera sin alterar el orden de las otras dos, lo cual equivale a dos cambios sucesivos entre filas, luego el signo del determinante cambiará dos veces y su valor quedará igual.

5) Si tomamos representantes con origen común $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, respectivamente, <u>no siendo los tres vectores coplanarios</u>, se tiene que <u>el valor absoluto del producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ es exactamente el volumen del "paralelepípedo" que tiene a AB, AC y AD como aristas concurrentes en uno de sus 8 vértices (el vértice A)</u>. (Se aconseja dibujar en perspectiva dicho "paralelepípedo", que es como una caja de 6 caras paralelas dos a dos, con un total de 12 aristas, donde las caras forman entre si ángulos no necesariamente rectos).
En efecto, el valor absoluto del producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ es $|\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |cos\alpha|$, siendo α el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$, que puede ser agudo o bien obtuso entre recto y llano (no puede ser recto porque entonces $\vec{u}$ estaría en el plano de $\vec{v}$ y $\vec{w}$), de modo que $|\vec{v} \times \vec{w}|$ es el área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ (que es una de las caras del "paralelepípedo") y $|\vec{u}| \cdot |cos\,\alpha|$ es el valor de la altura de dicho cuerpo relativa a la cara mencionada, con lo cual se tiene área de una base multiplicada por la altura correspondiente que nos da el volumen del cuerpo.

<u>Nota</u>: Se ve sin mucha dificultad en una figura del paralelepípedo mencionado, que esa altura es la proyección del segmento AB sobre la recta que contiene al producto $\vec{v} \times \vec{w}$, siendo <u>el ángulo menor</u> que forman segmento y recta el propio α o bien $\pi - \alpha$, con lo cual esa proyección será $|\vec{u}| \cdot cos\,\alpha$ (si α es el agudo) o bien será $|\vec{u}| \cdot cos(\pi - \alpha)$ (si $\pi - \alpha$ es el agudo). Pero como $cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$, <u>en cualquiera de los casos podremos escribir esa proyección como $|\vec{u}| \cdot |cos\,\alpha|$</u> (ya que si α es agudo la expresión anterior corresponde a la correcta $|\vec{u}| \cdot cos\,\alpha$ de la proyección y si α es obtuso su coseno será negativo luego la expresión anterior corresponde a $|\vec{u}| \cdot (-cos\,\alpha) = |\vec{u}| \cdot cos(\pi - \alpha)$ que es la expresión correcta de la proyección aludida).
