# ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS

(Prerrequisitos: Rectas en el plano. Las cónicas. Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad de funciones de una variable. Derivadas de funciones de una variable. Integrales definidas)

## Ideas básicas

Se asocia frecuentemente la idea de "curva plana" a la de gráfica de una función de una variable. Pero esto no es correcto, pues la gráfica puede ser un conjunto de puntos inconexos, donde muchas veces entre uno y otro no existe un tramo "continuo" de puntos intermedios de la propia gráfica. (Ver Sección 2.1).

Otra idea de "curva" es la de "trayectoria" de un móvil (y cuando la trayectoria permanece en un cierto plano, se tiene "una curva plana"). Esto sí es correcto: Aquí se da la continuidad de manera natural, pasando siempre de un punto a otro mediante un tramo intermedio de la propia trayectoria (es decir, no hay interrupciones; ese tramo intermedio entre dos puntos se llamará "arco de la curva" de extremos dichos puntos). Además, la posición de cada punto en la "trayectoria" del móvil depende de la variable tiempo, luego las dos coordenadas de cada punto de la misma serán funciones reales continuas de dicha variable real $t$, que representa el tiempo transcurrido desde un cierto instante inicial.

Por tanto, llamamos "curva del plano" o "curva plana" al conjunto de puntos $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que se puedan obtener a través de dos funciones $\boxed{x = f(t)\ ;\ y = g(t)}$ , continuas en un intervalo $I$ que puede ser de distintos tipos.

Cuando el intervalo $I$ es cerrado y acotado $[a\ , b]$ hablaremos de "arco de curva" (que puede coincidir con toda la curva). En ese caso tendremos "dos puntos extremos", cuyas coordenadas serán las imágenes por $f$ y $g$ de los dos extremos del intervalo $I$: Habrá un "punto extremo del arco" ($A$) que tendrá coordenadas $(f(a),\ g(a))$ y habrá otro "punto extremo del arco" ($B$) que tendrá coordenadas $(f(b),\ g(b))$, de modo que cuando $t$ crezca desde $a$ hasta $b$ el punto $P(t)$ de coordenadas $(f(t),\ g(t))$ recorrerá el arco de curva desde el extremo $A$ hasta el extremo $B$. En ese caso, las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$ se llaman "unas ecuaciones paramétricas" del "arco de curva", y la variable real $t$ se llama "el parámetro de estas ecuaciones" (que normalmente no tiene nada que ver con la variable que representa el tiempo en Física).

Y decimos anteriormente "unas ecuaciones paramétricas" porque toda curva o arco de curva pasee infinitas ecuaciones paramétricas, con diferentes parámetros en general. En efecto, entre otras posibilidades, podemos sustituir $t$ en las ecuaciones anteriores por una función del tipo $ps + q$, siendo $p \neq 0$, con lo cual unas nuevas ecuaciones paramétricas del mismo "arco de curva" serán $x = f(ps + q)\ ;\ y = g(ps + q)$ , con el nuevo parámetro $s$ variando en el intervalo de extremos $(a - q)/p$ y $(b - q)/p$ .

En particular, si la función $f(t)$ es $t$, será $x = t$ y entonces podremos eliminar $t$ entre $x = t$ e $y = g(t)$ resumiendo las dos ecuaciones en una sola, que es la ecuación cartesiana de la curva en la forma $y = g(x)$. También, si la función $g(t)$ es $t$, será $y = t$, con lo cual podremos escribir la ecuación cartesiana de la curva en la forma $x = f(y)$. En cualquier otro caso, si se pudiese eliminar el parámetro $t$ entre las dos ecuaciones paramétricas de la curva (cosa no siempre posible), resultará una ecuación cartesiana de dicha curva, que en general quedará en una forma implícita $F(x, y) = 0$.

Nota: En ocasiones, una de las ecuaciones paramétricas (o ambas) viene dada en forma implícita, como ocurre con las curvas solución de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. (Sección 7.7). Así las ecuaciones podrían ser $\boxed{F(x, t) = 0\ ;\ G(y, t) = 0}$ , con $t$ variando en un cierto intervalo $I$, de modo que tanto $x$ como $y$ estarían definidas implícitamente como funciones del parámetro $t$.

**Algunos arcos de curvas planas con características importantes**

Sea $\gamma$ el arco de curva definido por $\boxed{x = f(t)\ ;\ y = g(t)}$ , con $t \in [a, b]$.

1) Se dice que $\gamma$ es un "**arco cerrado**", si sus puntos extremos **A y B coinciden**.

Por ejemplo, una circunferencia, una elipse y el conjunto de todos los lados de un polígono cualquiera son arcos cerrados (partiendo de un punto cualquiera, se llega al mismo punto después de recorrer todo el arco). Y no son arcos cerrados un segmento rectilíneo, un arco de parábola y un arco de hipérbola (también un arco de circunferencia que no sea la circunferencia completa y un arco de elipse que no sea la elipse completa)

2) Se dice que $\gamma$ es un "**arco simple**", si **no se corta a si mismo en algún punto intermedio**. O sea, si no existen valores de $t$ distintos, con al menos uno interior a $I$, de modo que sus respectivos puntos imágenes coincidan.

Por ejemplo, son arcos simples los segmentos rectilíneos, los arcos de circunferencia (incluida toda la circunferencia), los arcos de elipse (incluida toda la elipse) y los arcos de parábola. También los arcos situados en una cualquiera de las ramas de una hipérbola. Y no es un arco simple una curva llamada "lemniscata" que tiene la forma del del número 8 o del signo ∞.

3) Un arco puede ser "simple" y también "cerrado", en cuyo caso se le llama "**arco de Jordan**" (si imaginamos el punto variable $P(t) = (f(t), g(t))$, con $t$ creciendo en el intervalo $[a\ , b]$, en un "arco de Jordan" ese punto no pasa dos veces por la misma posición, salvo cuando $t = a$ y $t = b$, que corresponden a sus puntos extremos coincidentes).

4) Se dice que $\gamma$ es un "**arco suave**" (o "liso") definido en $[a\ , b]$, si las funciones $f$ y $g$ que lo definen tienen **derivadas continuas en $[\boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}]$** y dichas derivadas **no se anulan simultáneamente** en algún punto de dicho intervalo.

Se demuestra que **el vector tangente** a un "arco suave" en cada punto intermedio $P_0(t)$ del mismo, estando el arco definido por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)\ ;\ y = g(t)$, con $t$ variando en $[a\ , b]$, es $\boxed{\vec{T}_0 = (f'(t_0)\ ,\ g'(t_0))}$ , siendo $t_0$ el valor del parámetro que corresponde al punto $P_0$ , con $t_0$ punto interior de intervalo $[a\ , b]$.

Dicho vector tangente tendrá la dirección de la recta tangente al arco en $P_0$ (la cual existirá con seguridad) y tendrá el sentido que corresponda al crecimiento del parámetro (como si $t$ fuese el tiempo y al arco de curva fuese la trayectoria de un móvil, siendo $\vec{T}_0$ el "vector velocidad instantánea" de dicho móvil al pasar por el punto $P_0$). Además, el vector tangente en cada punto intermedio de un "arco suave" irá variando poco a poco (sin saltos) al recorrer dicho arco, por la continuidad que hemos supuesto de las derivadas.

Suponemos que en un "arco suave" las dos derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ no valdrán cero a la vez en algún punto $P_0$, pues en ese caso el vector tangente $\vec{T}_0$ sería el vector cero y no tendría dirección ni sentido (lo cual suele corresponder a alguna anomalía del arco de curva en $P_0$, que puede ser un cambio brusco de dirección en dicho punto, lo cual implicaría un "pico" del arco en $P_0$ y esto es contrario al concepteo de "suave" o "liso").

Dicho vector tangente depende de las ecuaciones paramétricas que utilicemos, pues si otras ecuaciones paramétricas, por ejemplo, permitiesen recorrer el mismo arco en sentido contrario, el vec-

tor tangente que obtuviésemos en el mismo punto tendría sentido opuesto al anterior y posiblemente módulo diferente.
En ocasiones, un cambio de ecuaciones paramétricas de un cierto arco, elimina el problema de que ambas derivadas no fuesen continuas (o se anulasen a la vez) en un cierto punto para la parametrización anterior, con lo cual **ese arco será suave** aunque inicialmente no lo pareciese (ver ejemplo 3 de la pág. 6, donde un cambio de ecuaciones paramétricas elimina el problema de discontinuidad de una de las derivadas en la parametrización inicial).

Por ejemplo, un segmento rectilíneo **es un arco suave**; también lo son un arco de circunferencia, un arco de elipse, un arco de hipérbola y un arco de parábola; pero **no es arco suave** el conjunto de los lados de un polígono, porque en los vértices no hay recta tangente.

5) Se dice que $\gamma$ es un "**arco suave a trozos**" si es la unión de un número finito de arcos suaves (de modo que donde termina uno sigue otro). Los puntos de unión de los distintos arcos suaves se llaman "puntos singulares del arco". Esos "puntos singulares" se caracterizan normalmente por cambios bruscos de dirección del "arco suave a trozos", con lo cual en los mismos no habrá recta tangente a dicho arco.

Por ejemplo, el conjunto de los lados de un polígono es un "arco cerrado y suave a trozos", donde los trozos suaves son los lados del polígono y los puntos singulares son sus vértices.

**Ecuaciones paramétricas de los segmentos rectilíneos y de las diferentes cónicas**

El segmento rectilíneo cuyos extremos son el punto A$(x_0, y_0)$ y el punto B$(x_1, y_1)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \quad ; \quad y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t} \qquad t \in [0\,, 1]$$

Al crecer $t$, se recorre el segmento desde A hacia B. (Se recomienda poner un ejemplo concreto y darle valores a $t$ para ver cómo los puntos obtenidos quedan en el segmento).

Al eliminar $t$ entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene la conocida ecuación cartesiana de la recta que pasa por A y B: $(y - y_0) \cdot (x_1 - x_0) = (x - x_0) \cdot (y_1 - y_0)$ (ver Sección 8.3)

---

La circunferencia de centro $(h\,, k)$ y radio $a$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = h + a \cdot cos\, t \quad ; \quad y = k + a \cdot sen\, t} \qquad t \in [0\,, 2\pi]$$

Al crecer $t$, la circunferencia se recorre en sentido antihorario, a partir del punto de coordenadas $(h + a\,, k)$. (Se recomienda poner un ejemplo concreto y darle valores a $t$ para ver cómo los puntos obtenidos quedan en la circunferencia).

Arcos de esta circunferencia se obtendrán cuando $t$ varíe en un subintervalo cerrado del dado anteriormente. Lo cual incluye el arco mayor que es toda la circunferencia. Son siempre "arcos suaves" pues $x'$ e $y'$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente.

Usando la identidad $sen^2 t + cos^2 t \equiv 1$ se puede eliminar $t$ entre las dos ecuaciones anteriores, obteniendo: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$, que es la conocida ecuación cartesiana de la circunferencia descrita.

Otras ecuaciones paramétricas de la misma circunferencia anterior son:

$$\boxed{x = h + a \cdot sen\, t \quad ; \quad y = k + a \cdot cos\, t} \qquad t \in [0\,, 2\pi]$$

Ahora, cuando $t$ crece se recorre la circunferencia descrita en sentido horario, a partir del punto de coordenadas $(h\,, k + a)$.

La eliminación de $t$ entre ambas nos conduce a la misma ecuación cartesiana anterior.

---

La elipse horizontal o vertical de centro $(h\,, k)$ y semiejes $a$ (horizontal) y $b$ (vertical), siendo $a$ diferente de $b$ (si es $a > b$ la elipse es horzontal y si es $a < b$ la elipse es vertical) tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = h + a \cdot cos\, t \quad ; \quad y = k + b \cdot sen\, t} \qquad t \in [0\,, 2\pi]$$

O bien, estas otras $\boxed{x = h + a \cdot sen\, t \quad ; \quad y = k + b \cdot cos\, t} \qquad t \in [0\,, 2\pi]$

En el primer caso, al crecer $t$ se recorre la elipse en sentido antihorario a partir del punto de coordenadas $(h + a\,, k)$. Y en el segundo caso, al crecer $t$ se recorre en sentido horario a partir del punto de coordenadas $(h\,, k + b)$. (Se recomienda poner un ejemplo concreto y darle valores a $t$ para ver cómo los puntos obtenidos quedan en la elipse).

Arcos de esta elipse se obtendrán cuando $t$ varíe en un subintervalo cerrado del $[0\,, 2\pi]$. Los arcos son “suaves” porque $x'$ e $y'$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente.

Al eliminar $t$ entre ambas ecuaciones dadas, en las dos variantes, se obtiene la conocida ecuación cartesiana de la elipse descrita: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (vale para $a > b$ y para $a < b$).

---

Las dos ramas de una hipérbola horizontal de centro $(h\,, k)$ y valores característicos $a$ y $b$ (ambos positivos). En este caso $a$ se llama “semieje transverso” y los focos están en la recta $y = k$, siendo sus ecuaciones paramétricas:

Rama derecha: $\boxed{x = h + a \cdot ch\, t \quad ; \quad y = k + b \cdot sh\, t} \qquad t \in \mathbb{R}$

Rama izquierda: $\boxed{x = h - a \cdot ch\, t \quad ; \quad y = k + b \cdot sh\, t} \qquad t \in \mathbb{R}$

Arcos de estas ramas se obtienen cuando $t$ varíe en un intervalo $[c\,, d]$ cualquiera. Los arcos son “suaves” porque $x'$ e $y'$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente.

Nota 1: Las funciones “coseno hiperbólico” ($ch\, t$) y “seno hiperbólico” ($sh\, t$) se definen a través de las exponenciales $e^t$ y $e^{-t}$: $\boxed{ch\, t = (e^t + e^{-t})/2}$ y $\boxed{sh\, t = (e^t - e^{-t})/2}$, para todo $t$ real. El coseno hiperbólico tiene valores siempre positivos, con mínimo absoluto 1 que corresponde a $t = 0$ (y su gráfica es simétrica respecto al eje OY, por ser función par). En cambio, el seno hiperbólico toma valores negativos, cero y positivos, pasando su gráfica por el origen de coordenadas y siendo simétrica respecto a dicho punto (función impar). Además, la derivada del seno hiperbólico es el coseno hiperbólico y la derivada del coseno hiperbólico es el seno hiperbólico (comprobación inmediata). Por último, ambas funciones hiperbólicas cumplen la identidad fundamental que puede comprobarse fácilmente $\boxed{ch^2 t - sh^2 t \equiv 1}$.

Nota 2: Las dos ramas de la hipérbola están separadas, quedando a derecha e izquierda de la recta $x = h$ y constituyen **“curvas” distintas**, de acuerdo a la definición dada al principio. Por ello tienen ecuaciones paramétricas diferentes. (Ver Sección 8.4 y dibujar la hipérbola horizontal completa con sus dos ramas).

Nota 3: Comprobar, usando la identidad fundamental que cumplen las funciones "coseno hiperbólico" y "seno hiperbólico", que se puede eliminar $t$ entre las dos ecuaciones paramétricas correspondientes a cada rama, obteniéndose en ambos casos: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ , que es la conocida ecuación cartesiana de la hipérbola horizontal descrita (la cual incluye ambas ramas).

Nota 4: Justamente, los nombres "coseno hiperbólico" y "seno hiperbólico" se deben a que estas funciones son las apropiadas para definir paramétricamente las dos ramas de una hipérbola horizontal (y también las dos ramas de una hipérbola vertical, como se verá a continuación), de un modo análogo a como las funciones coseno y seno son apropiadas para definir paramétricamente circunferencias, elipses horizontales y elipses verticales.

---

Las dos ramas de una hipérbola vertical de centro $(h\,,k)$ y valores característicos $a$ y $b$ ($a > 0$ y $b > 0$). En este caso $b$ es el "semieje transverso" y los dos focos están en la recta vertical $x = h$, siendo sus ecuaciones paramétricas:

Rama superior: $\boxed{x = h + a \cdot sh\,t \;\;;\;\; y = k + b \cdot ch\,t}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Rama inferior: $\boxed{x = h + a \cdot sh\,t \;\;;\;\; y = k - b \cdot ch\,t}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Arcos de estas ramas se obtienen cuando $t$ varíe en un intervalo $[c\,,d]$. Siempre son "suaves".

Ahora las dos ramas, que también **son curvas diferentes**, quedan separadas en los semiplanos superior e inferior definidos por la recta horizontal $y = k$. (Dibujar una hipérbola de este tipo utilizando el "rectángulo de referencia", como se explicó en la Sección 8.4).

Comprobar que eliminando el parámetro $t$ entre las dos ecuaciones de cada rama, se obtiene en ambos casos la conocida ecuación cartesiana de la hipérbola vertical: $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$

---

La parábola horizontal de vértice $(h\,,k)$ y valor característico $p$ (donde $p \neq 0$; si $p > 0$ es cóncava hacia la derecha y si $p < 0$ es cóncava hacia la izquierda) tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = h + \frac{1}{4p}(t-k)^2 \quad ; \quad y = t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Arcos de esta parábola se obtienen cuando $t$ varíe en un intervalo $[c\,,d]$. Siempre son "suaves".

Al eliminar $t$ entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene la conocida ecuación cartesiana de la parábola horizontal descrita: $(y-k)^2 = 4p \cdot (x-h)$ . (Ver Sección 8.4).

Más fácil: Si utilizamos la ecuación cartesiana de una parábola horizontal en la forma conocida $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$, unas ecuaciones paramétricas serán $x = at^2 + bt + c \;\;;\;\; y = t$ , con $t \in \mathbb{R}$.

---

La parábola vertical de vértice $(h\,,k)$ y valor característico $p$ (donde $p \neq 0$; si es $p > 0$ es cóncava hacia arriba y si es $p < 0$ es cóncava haca abajo) tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = t \quad ; \quad y = k + \frac{1}{4p}(t-h)^2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Arcos de esta parábola se obtienen cuando $t$ varíe en un intervalo $[c\,,d]$. Siempre son "suaves".

Al eliminar $t$ entre las dos ecuaciones anteriores, resulta la conocida ecuación cartesiana de la parábola vertical descrita: $(x-h)^2 = 4p \cdot (y-k)$ . (Ver Sección 8.4).

Más fácil: Si utilizamos la ecuación cartesiana de una parábola vertical en la forma conocida $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, unas ecuaciones paramétricas serán $x = t$ ; $y = at^2 + bt + c$ , con $t \in \mathbb{R}$.

---

Un arco de una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ entre los puntos de abscisas $x_0$ y $x_1$ ($x_0 < x_1$), siendo $f$ continua en $[x_0\,, x_1]$ , tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = t \quad ; \quad y = f(t)} \qquad t \in [x_0\,, x_1]$$

(llamamos $t$ a la variable independiente)

---

Un arco de una curva de ecuación cartesiana $x = f(y)$ , entre los puntos de ordenadas $y_0$ e $y_1$ ($y_0 < y_1$), siendo $f$ continua en $[y_0\,, y_1]$ , tiene ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = f(t) \quad ; \quad y = t} \qquad t \in [y_0\,, y_1]$$

(llamamos t a la variable independiente)

**Arcos de curva rectificables**

Los arcos de curva que poseen longitud se llaman "rectificables". Entre ellos están los "arcos suaves" y los "arcos suaves a trozos", en virtud del teorema siguiente:

TEOREMA: Sea al arco de curva plana $\gamma$ de ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ ; $y = g(t)$, con $t \in [a\,,b]$. Y supongamos que existan y sean continuas en $[a\,,b]$ las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$. Entonces, existe la longitud del arco $\gamma$ y viene dada por:

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\;\, dt$$

Nota: El Teorema anterior se refiere a un arco "suave" y la integral existe por ser continuas $f'$ y $g'$, con lo cual la función integrando será continua en $[a\,,b]$. Y si el arco es "suave a trozos" su longitud será la suma de las longitudes de los distintos arcos suaves que lo compongan, porque donde termina uno empieza otro (ver definición en la pág. 3).

Ejemplo 1: Una circunferencia de centro cualquier punto del plano $(h\,,k)$ y de radio $a$ admite, como hemos dicho, unas ecuaciones paramétricas que son $x = h + a \cdot cos\, t$ ; $y = k + a \cdot sen\, t$ , con $t$ variando entre 0 y $2\pi$. Las derivadas $x' = -\, a \cdot sen\, t$ e $y' = a \cdot cos\, t$ son continuas en el intervalo $[0\,, 2\pi]$. Entonces su longitud viene dada por:

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \cdot sen\, t)^2 + (a \cdot cos\, t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi \cdot a \ \text{ (u.l.)}$$

como sabemos perfectamente.

Ejemplo 2: Calcular la longitud del arco de la parábola $y = x^2/2$ que va del punto (0 , 0) al punto $(1\,, 1/2)$.

Unas ecuaciones paramétricas de ese arco son $x = t$ ; $y = t^2/2$ , con $t \in [0\,, 1]$. Las derivadas $x' = 1$ e $y' = t$ son continuas en [0 , 1]. Por tanto:

$$L_\gamma = \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{4} \cdot ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ (u.l.)}$$

(para resolver la integral anterior se sugiere usar inicialmente el cambio de variable $t = tan\, u$ y luego el nuevo cambio $sen\, u = v$).

Ejemplo 3: Calcular la longitud del arco de la gráfica de la función radical $y = \sqrt[3]{x}$ entre los puntos $(0\,, 0)$ y $(1\,, 1)$.

Unas ecuaciones paramétricas sencillas son $x = t$ ; $y = \sqrt[3]{t}$ , con $t \in [0\,, 1]$. Las derivadas son $x' = 1$ e $y' = 1/(3\sqrt[3]{t^2})$ , pero la segunda no es continua en $t = 0$, con lo cual falla la continuidad de ambas en $[0\,, 1]$ y no se cumple una de las hipótesis del Teorema dado anteriormente. Por tanto, éste no es aplicable. Pero usando el cambio de variable $t = u^3$, se obtienen otras ecuaciones paramétricas del mismo arco, que serían $x = u^3$ ; $y = u$ , con $u \in [0\,, 1]$. Y ahora las derivadas son $x' = 3u^2$ e $y' = 1$, las cuales son continuas en [0 , 1]. Por tanto, vemos que el arco dado es "suave" y podemos aplicar el Teorema. Así:

$$L_\gamma = \int_0^1 \sqrt{9u^4 + 1}\ du \cong 1'5478 \ \text{ (u.l.)}$$

(Esta integral ha sido calculada utilizando algún método numérico: En efecto, es el resultado de utilizar una calculadora científica, las cuales usan métodos numéricos para evaluar integrales definidas). (Ver Sección 4.4).

Ejemplo 4: Calcular la longitud del arco de "cicloide", dado por las ecuaciones $x = t - sen\, t$ ; $y = 1 - cos\, t$ , donde $t \in [0, 2\pi]$.

Aclaratoria: La "cicloide" es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta que sea tangente; en el caso de las ecuaciones dadas, la circunferencia sería de radio 1, centrada inicialmente en el punto (0 , 1), la cual rueda hacia la derecha sobre el eje OX, y el punto fijo que describe la curva sería inicialmente el de contacto entre la circunferencia y el eje (el origen del sistema de coordenadas). El parámetro $t$ representa el ángulo de giro en sentido horario, descrito por el radio que inicialmente terminaba en el origen, al girar alrededor del centro de la circunferencia. Entonces, el origen corresponde a $t = 0$ y cuando ese ángulo descrito sea $\pi$ radianes ($t = \pi$), la circunferencia habrá dado media vuelta y el punto fijo que describe la curva estará colocado en la posición ($\pi$, 2), siendo 2 el diámetro de la circunferencia. Cuando la circunferencia haya dado una vuelta completa ($t = 2\pi$), el punto que describe la curva estará otra vez sobre el eje OX en ($2\pi$, 0). O sea, la curva sube desde el origen hasta su ordenada máxima en $(\pi, 2)$ y luego baja hasta su ordenada mínima en $(2\pi, 0)$. Ese arco de la curva es el que queremos medir. A partir de $t = 2\pi$ la curva repite su forma, obteniéndose entre $2\pi$ y $4\pi$ otro arco de igual forma al ya obtenido. Y así sucesivamente. También, para valores negativos de $t$, hay arcos con formas iguales antes del origen de coordenadas (entre $-2\pi$ y 0 ; entre $-4\pi$ y $-2\pi$ ; etc…). (Se sugiere hacer un dibujo para ver bien todo lo dicho).

Las derivadas de las funciones que definen la curva son: $x' = 1 - cos\, t$ ; $y' = sen\, t$, las cuales son siempre continuas. Observamos, sin embargo, que en los puntos $t = 0$, $t = \pm 2\pi$, $t = \pm 4\pi$, etc… las dos derivadas se hacen cero, lo cual nos indica que en esos puntos puede haber una anomalía: Si dibujamos la curva, observamos que esos son puntos angulosos, por lo cual no hay recta tangente en ellos. Luego la "cicloide" tiene arcos suaves sucesivos, de formas iguales, separados por esos "puntos singulares". Con lo cual, la "cicloide" será una curva "suave a trozos" cuando tomemos para la variación del parámetro un intervalo de longitud mayor que $2\pi$.

El arco suave de esta curva que corresponde a $t$ variando entre 0 y $2\pi$ tiene longitud:

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - cos\, t)^2 + (sent)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\, cos\, t}\ dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - cos\, t}\ dt$$

Ahora se puede usar la identidad trigonométrica $1 - cos\, t = 2 \cdot sen^2(t/2)$ y la integral se termina fácilmente, dando el valor 8 (u.l.).

Ejemplo 5: Como ejemplo de cálculo de la longitud de un arco de curva "suave a trozos" y "cerrado", vemos el caso de una curva llamada "astroide".

Calcular la longitud de la "astroide" de ecuación cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .

Unas ecuaciones paramétricas de esta curva son $x = cos^3\, t$ ; $y = sen^3 t$ , pues sustituyéndolas en la ecuación cartesiana dada, ésta se cumple para todo valor de $t$. Si damos valores al parámetro vemos que para $t = 0$ resulta el punto (1 , 0), sobre el eje OX; para $t = \pi/2$ resulta (0 , 1) sobre el eje OY; para $t = \pi$ se obtiene $(-1\ , 0)$, otra vez sobre OX; para $t = 3\pi/2$ se obtiene $(0\ , -1)$ de nuevo sobre OY, y tomando $t = 2\pi$ resulta el punto inicial (1 , 0). Esto nos indica que la curva es cerrada, y al repetirse todos los valores que dan $cos\, t$ y $sen\, t$ a partir de $t = 2\pi$, la curva se superpone a sí misma (como le ocurre a una circunferencia y a una elipse cuando ampliamos el intervalo que dimos para el parámetro, de 0 a $2\pi$). Por lo tanto, para obtener toda la curva basta hacer variar $t$ en el intervalo $[0\ , 2\pi]$.

Pues bien, de las ecuaciones paramétricas mencionadas, resultan $x' = 3 \cdot cos^2\, t \cdot (-sen\, t)$ e $y' = 3 \cdot sen^2 t \cdot cos\, t$ , que son continuas siempre. Pero resulta que $x' = 0$ e $y' = 0$ en los cuatro puntos correspondientes a los valores de $t$ que usamos anteriormente: 0, $\pi/2$, $\pi$ y $3\pi/2$ (cortes de la curva con los ejes de coordenadas). Luego alguna anomalía puede ocurrir en esos puntos. Dando valores intermedios al parámetro, como $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$, aparecen puntos simétricos respecto al origen, situados sobre las rectas $y = x$ e $y = -x$: Son los puntos $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4)$ y $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4)$, los cuales están más próximos al origen que los cortes con los ejes (distancia $1/2$, frente a distancia 1). Esto nos indica que la curva tiene arcos en cada cuadrante, convexos vistos desde el origen (por lo cual, la curva parece el contorno de una "estrella" de cuatro puntas, centrada en el origen; de ahí su nombre de "astroide"; se aconseja dibujarla). Resulta entonces que los cuatro puntos de corte son puntos angulosos y por tanto "puntos singulares" de la curva. Entonces, la curva es "un arco suave a trozos" y "cerrado", siendo su longitud la suma de las longitudes de los cuatro arcos suaves que posee.

Pero la curva también es simétrica respecto al origen (por propiedades conocidas de senos y cosenos en la circunferencia trigonométrica y teniendo en cuenta que sus valores aparecen elevados al cuadrado en la ecuación cartesiana dada inicialmente), luego las longitudes de los cuatro arcos suaves serán iguales.

En conclusión: La longitud total será la longitud del arco suave que está, por ejemplo, en al primer cuadrante ($t$ variando entre 0 y $\pi/2$) multiplicada por cuatro:

$$L_\gamma = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3\,cos^2\,t \cdot sent)^2 + (3\,sen^2 t \cdot cos\,t)^2}\ \ dt =$$

$$= 12 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^4\,t \cdot sen^2 t + sen^4 t \cdot cos^2\,t}\ \ dt = 12 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sent \cdot cos\,t \cdot \sqrt{cos^2\,t + sen^2 t}\ \ dt =$$

$$= 12 \cdot \int_0^{\pi/2} sent \cdot cos\,t\ \ dt = 12 \cdot \left[\frac{se\ \ ^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6 \text{ (u.l.)}$$

---