PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

(Prerrequisitos: Rectas en el plano. Vectores en el plano y en el espacio)

En todo lo que sigue cuando nombremos "el espacio" nos estamos refiriendo al espacio $\mathbb{R}^3$, donde los puntos tienen tres coordenadas (x abscisa, y ordenada y z cota) en un sistema cartesiano ortogonal con la misma escala en los tres ejes y orientado de forma que $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$.

Ecuación general de un plano

Es de la forma

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad \text{o bien} \quad \boxed{Ax + By + Cz = D} \qquad (A \neq 0, B \neq 0 \text{ o } C \neq 0)$$

(obviamente, la constante D de la segunda ecuación tendrá valor de signo contrario a la constante D de la primera ecuación, para un mismo plano en particular si los valores de A, B y C coinciden en ambas ecuaciones).

Un plano cualquiera admite infinitas ecuaciones de este tipo, porque podemos multiplicar o dividir toda la ecuación por un número cualquiera diferente de cero.

Casos particulares importantes:

1) $A \neq 0$, $B = 0$ y $C = 0$: Plano perpendicular al eje OX. Su ecuación se reduce a $\boxed{x = a}$, cortando solamente a dicho eje en el punto (a , 0 , 0). Cuando es $\boxed{x = 0}$ resulta la ecuación del plano coordenado OYZ.
2) $A = 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$: Plano perpendicular al eje OY. Su ecuación se reduce a $\boxed{y = b}$, cortando solamente a dicho eje en el punto (0 , b, 0). Cuando es $\boxed{y = 0}$ resulta la ecuación del plano coordenado OXZ.
3) $A = 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$: Plano perpendicular al eje OZ. Su ecuación se reduce a $\boxed{z = c}$, cortando solamente a dicho eje en el punto (0 , 0 , c). Cuando es $\boxed{z = 0}$ resulta la ecuación del plano coordenado OXY.
4) $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$: Plano perpendicular al plano coordenado OXY (corta a dicho plano según la recta en ese plano de ecuación $Ax + By + D = 0$ o bien $Ax + By = D$).
5) $A \neq 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$: Plano perpendicular al plano coordenado OXZ (corta a dicho plano según la recta en ese plano de ecuación $Ax + Cz + D = 0$ o bien $Ax + Cz = D$).
6) $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$: Plano perpendicular al plano coordenado OYZ (corta a dicho plano según la recta en ese plano de ecuación $By + Cz + D = 0$ o bien $By + Cz = D$).
7) $D = 0$: Plano que pasa por el origen.
8) $D \neq 0$: Plano que no pasa por el origen.
9) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$: Plano que corta a los tres ejes en puntos diferentes del origen. Los puntos de corte podemos llamarlos (a, 0 , 0) , (0 , b, 0) y (0 , 0 , c).

Ecuación canónica de un plano

Es una versión particular de la ecuación general en el caso $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$. Tiene la forma:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad (a \neq 0 \,,\, b \neq 0 \;\text{ y } c \neq 0)$$

Se trata de un plano que corta a los tres ejes y que no pasa por el origen, el cual admite una sola ecuación de este tipo; los puntos de corte con los ejes son (a, 0 , 0) , (0 , b, 0) y (0 , 0 , c) .

Ejemplo: El plano de ecuación $3x - 2y + z = 5$ no pasa por el origen ($D \neq 0$) y corta a los tres ejes ($A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$), luego tiene que poder escribirse en forma única usando la ecuación canónica. En efecto, dividimos toda la ecuación dada por 5 y queda:

$$(3/5)x + (-2/5)y + (1/5)z = 1$$

Pero $\frac{3}{5} = \frac{1}{5/3}$ y $-\frac{2}{5} = \frac{1}{-5/2}$, con lo cual podemos escribir esta última versión así:

$$\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/2} + \frac{z}{5} = 1$$

que es la ecuación canónica del plano dado.

También podríamos haber hallado los tres cortes con los ejes, que son: $x = 5/3$ (para $y = 0$ y $z = 0$), $y = -5/2$ (para $x = 0$ y $z = 0$), $z = 5$ (para $x = 0$ e $y = 0$), con lo cual tenemos los valores de a, b y c.

Ecuación del plano que pasa por un punto y es perpendicular a un vector

Es de la forma: $\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$ $\quad (A \neq 0, B \neq 0 \text{ o } C \neq 0)$

siendo $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ el punto dado, que vemos verifica la ecuación y donde $\vec{n} = (A, B, C)$ es el vector dado (que llamaremos "vector normal del plano").
En efecto, si $P(x , y , z)$ es un punto cualquiera del plano diferente al $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$, el vector no nulo $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0 , y - y_0 , z - z_0)$ está situado sobre el plano y será perpendicular al vector $\vec{n}$, luego el producto escalar de ambos será cero que es lo establecido en la ecuación dada.

Un plano cualquiera admite infinitas ecuaciones de este tipo, porque tiene infinitos puntos y porque el vector $\vec{n}$ se puede sustituir por cualquier otro proporcional, distinto del vector cero (lo importante de $\vec{n}$ es su dirección, no su módulo ni su sentido).

Nota: Si operamos, la ecuación anterior se convierte en $Ax + By + Cz + D = 0$, con los mismos coeficientes A, B y C, siendo $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, con lo cual tenemos la ecuación en la forma general. E inversamente, basta elegir un punto cualquiera P_0 (x_0, y_0, z_0) de un plano dado en forma general $Ax + By + Cz + D = 0$, para que sea $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, con lo cual vemos que D puede escribirse como $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Y así podemos siempre pasar la ecuación general del plano a la forma $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Por tanto, se observa que los tres coeficientes A, B y C de la ecuación general son siempre las componentes escalares de un vector perpendicular al plano dado.

Ejemplos: La ecuación $3(x - 2) - 5(y + 3) + (z - 6) = 0$ representa el plano que pasa por el punto de coordenadas $(2 , -3 , 6)$ y que es perpendicular al vector $(3 , -5 ,1) = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$. Por tanto, una ecuación en forma general de dicho plano es $3x - 5y + z - 27 = 0$.
Al revés, para el plano de ecuación general $x - y + 2z + 5 = 0$, podemos tomar (por ejemplo) el punto de coordenadas $(1 , 6 , 0)$ y la ecuación del mismo plano en función de ese punto sería:

$$(x - 1) - (y - 6) + 2(z - 0) = 0$$

que al operar vuelve a convertirse en la ecuación general dada.

Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados

Si los puntos son P_0 (x_0 , y_0 , z_0) , P_1 (x_1 , y_1 , z_1) y P_2 (x_2 , y_2 , z_2) , donde se supone $P_0 \neq P_1$, $P_0 \neq P_2$ y $P_1 \neq P_2$, y además también se supone que los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ no son proporcionales (para que no tengan la misma dirección, en cuyo caso los tres puntos estarían situados en una misma recta del espacio), basta hallar el vector $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$ (que será perpendicular al plano que buscamos) y podremos aplicar la ecuación anterior tomando $\boxed{(A, B, C) = \vec{n}}$.

Ejemplo: Hallar una ecuación en forma general del plano que pasa por los puntos $P_0(0\ ,1\ ,3)$, $P_1(-2\ ,1\ ,1)$ y $P_2(3\ ,0\ ,5)$.
Los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ son, respectivamente, $(-2\ ,0\ ,-2)$ y $(3\ ,-1\ ,2)$. Observamos que no son proporcionales (no hay un único λ de modo que uno de los vectores sea el producto de λ por el otro), lo cual demuestra que los tres puntos no están alineados. Por tanto, habrá un único plano que pase por los tres puntos (si estuviesen alineados habría infinitos planos que los incluyan, que serían todos los planos que contienen a la recta donde estén situados los puntos; lo hemos tratado en la pág. 8). Hallamos el producto vectorial de los vectores obtenidos:

$$\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \quad \text{(ver Sección 8.2)}$$

con lo cual tenemos el vector normal al plano: $\vec{n} = (-2\ ,-2\ ,2)$

Entonces podemos escribir la ecuación del plano que (por ejemplo) pasa por $(0\ ,1\ ,3)$ y es perpendicular al vector $(1\ ,1\ ,-1)$, que tiene la misma dirección (el punto podría ser cualquiera de los tres dados y hemos simplificado el vector normal dividiendo sus tres componentes por -2).

Esa ecuación es: $1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-1) + (-1) \cdot (z-3) = 0$, o sea $\boxed{x + y - z + 2 = 0}$.

(Obsérvese que los tres puntos la cumplen, como debe ser).

Posiciones relativas de dos planos

Dos planos en el espacio pueden estar en solamente una de las siguientes posiciones relativas:

1) Serán **paralelos**, sin ningún punto común.
2) Serán **coincidentes**, con todos los puntos comunes.
3) Serán **secantes** (**o se cortan**), con infinitos puntos comunes que forman una recta (recta intersección de ambos planos).

Si los planos vienen dados como $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, serán paralelos solamente cuando $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}}$. Y en caso de que D_1/D_2 también fuese igual a los cocientes anteriores, los planos serían coincidentes.
En efecto, la condición $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ establece que los respectivos vectores normales son proporcionales (llamando λ al valor común de los cocientes, será $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ y entonces tendrán la misma dirección, con lo cual los planos serán paralelos o coincidentes; por supuesto, esta relación obliga a que si alguna componente fuese cero la correspondiente componente del otro vector también será cero).

Por tanto, los planos serán secantes si no se cumple la condición $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$ (lo cual significa que no se cumpla al menos una de las igualdades).

Ejemplos:

Los planos $2x - y + z = 4$ y $6x - 3y + 3z = 12$ son el mismo, pues se cumple $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Pero los planos $2x - y + z = 4$ y $6x - 3y + 3z = 1$ son paralelos, pues se cumple $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \neq \frac{4}{1}$. Y los planos $x + y - 3z = 0$ y $2x - y + 3z = 2$ son secantes, pues se cumple $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} = \frac{-3}{3}$.

Ángulos del espacio entre dos planos

Un "ángulo del espacio" es la región del espacio delimitada por dos semiplanos con una recta común. La medida de su amplitud se hace a través de un "ángulo plano" que se llama su "sección recta", el cual se obtiene cortando el "ángulo del espacio" por un plano perpendicular a la recta común entre los dos semiplanos que lo definen. (Hacer un dibujo al respecto).

1) **Cuando dos planos se corten**, forman cuatro "ángulos del espacio" que suman un total de 360º o 2π radianes (de modo análogo a cuando dos rectas se cortan en el plano o en el espacio).

Si los planos del espacio que se cortan son perpendiculares, esos cuatro "ángulos del espacio" serán de igual amplitud y la "sección recta" de cada uno medirá 90º o $\pi/2$ radianes.

Y si se cortan sin ser perpendiculares, entre esos cuatro "ángulos del espacio" habrá dos agudos de igual amplitud (opuestos) y dos obtusos de igual amplitud (también opuestos). Los agudos y los obtusos serán suplementarios (sus "secciones rectas" sumarán 180º o π radianes).

La medida del ángulo no obtuso que forman los dos planos al cortarse viene dada por:

$$\alpha = arc\,cos \left| \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \right| \qquad (1)$$

Nota: α es el ángulo de los dos "vectores normales" cuando no sea obtuso (numerador positivo o cero) y será el suplementario de dicho ángulo cuando sea obtuso (numerador negativo), para lo cual se pone el valor absoluto en (1) que produce cambio de sentido en uno de los vectores.
Y dicho ángulo no obtuso entre los dos "vectores normales" (o su suplementario cuando el mismo sea obtuso) coincide con las "secciones rectas" de los ángulos no obtusos entre los dos planos, como puede verse en una figura.

En el caso en que $\boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$, se tiene $\boxed{\alpha = arc\,cos\,0 = \pi/2}$ y los planos serán perpendiculares.

2) Y **cuando los dos planos sean paralelos o coincidentes**, se considera que forman un "ángulo del espacio" de amplitud cero (aunque ese ángulo no exista geométricamente si son paralelos).

En efecto, si los dos planos son paralelos o coincidentes sus vectores normales serán iguales o proporcionales por tener la misma dirección, con lo cual el ángulo que forman será cero (si tienen el mismo sentido) o será π (si tiene sentidos opuestos). Pero entonces el cociente de la expresión (1) anterior dará $cos\,0 = 1$ o dará $cos\,\pi = -1$ y, al tener el valor absoluto, nos dará en ambos casos $\boxed{\alpha = arc\,cos\,1 = 0}$, que justifica lo dicho anteriormente.

Distancias entre dos puntos; entre punto y plano, y entre dos planos paralelos

1) Sabemos que si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio, la distancia entre ellos viene dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(expresión análoga a la que nos da la distancia entre dos puntos del plano en la Sección 8.3). La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

2) Si $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera y $Ax + By + Cz + D = 0$ es un plano cualquiera del espacio, la menor distancia entre el punto y el plano viene dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

expresión análoga a la que nos da la distancia mínima de un punto a una recta en el plano. (Ver Sección 8.3). Si el punto estuviese en el plano, resultará $d = 0$ (como debe ser).

3) Si tenemos dos planos paralelos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, basta elegir un punto cualquiera P_0 de uno de ellos y hallar la distancia mínima de P_0 al otro plano, para tener la distancia entre los dos planos paralelos.

Rectas en el espacio

Hemos visto en la Sección 8.3 que una recta en el plano viene dada por una ecuación lineal con dos variables ($Ax + By + C = 0$). De igual modo, un plano en el espacio tiene una ecuación lineal con tres variables ($Ax + By + Cz + D = 0$). Sin embargo, una recta en el espacio necesita un mínimo de dos ecuaciones para ser definida (se habla de "ecuaciones de una recta"; no de "ecuación de una recta").

En efecto, una recta puede quedar definida geométricamente dando uno de sus puntos y dando su dirección a través de un vector no nulo (que se llama "vector director de la recta"). Entonces, si el punto es $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y el "vector director" es $\vec{v} = (p, q, r)$, podemos escribir unas ecuaciones paramétricas de la recta de esta menera:

$$\boxed{x = x_0 + pt \quad ; \quad y = y_0 + qt \quad ; \quad z = z_0 + rt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

con $p \neq 0$, $q \neq 0$ o $r \neq 0$, porque el vector director no puede ser el vector cero, ya que no tendría dirección.
En efecto, para $t = 0$ se obtienen las coordenadas del punto P_0 , para $t = 1$ obtendremos las coordenadas del punto P_1 de la recta que está en el extremo del vector $\vec{v}$ cuando lo situamos a partir de P_0 , para $t = 2$ obtendremos las coordenadas del punto P_2 de la recta que está en el extremo del vector $2\vec{v}$ cuando lo situamos a partir de P_0 , etc… Igualmente ocurre cuando tomemos valores negativos de t, que nos darán puntos de la otra semirrecta, pues $t\vec{v}$ tendrá entonces la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{v}$.
En particular, obsérvese que cuando t varíe en el intervalo $[0\,,1]$ se obtendrán todos los puntos de la recta que están en el segmento de extremos P_0 y P_1 (incluidos ambos). Y análogamente, cuando el parámetro t varíe en otros intervalos.
Además, los puntos muy alejados de la recta se obtendrán para valores del parámetro t muy grandes en valor absoluto (positivos hacia un lado y negativos hacia el lado contrario).

Nota: Las ecuaciones paramétricas de una recta dada no son únicas, ya que podemos cambiar en ellas el punto P_0 por otro cualquiera de la misma recta y también podemos cambiar el vector director $\vec{v}$ por otro proporcional $\lambda\vec{v}$, con $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. (Por ello es preferible decir "unas ecuaciones paramétricas" y no "las ecuaciones paramétricas").

Ejemplo: La recta que pasa por el punto $(-1\,,0\,,3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (2\,,-1\,,0)$ tiene ecuaciones paramétricas: $\boxed{x = -1 + 2t\ ;\ y = -t\ ;\ z = 3}$ (con t variando en todo $\mathbb{R}$).
Para $t = 1$ se tiene el punto de la recta $(1\,,-1\,,3)$, para $t = -1$ se tiene el nuevo punto de coordenadas $(-3\,,1\,,3)$. Para $t = 1/2$ se tiene el $\left(0\,,-\frac{1}{2}\,,3\right)$, que es el punto medio entre el dado y el obtenido para $t = 1$ (sus coordenadas son el promedio de las respectivas coordenadas de los

puntos citados). Para $t = 3/2$ resulta el punto medio del que habíamos obtenido para $t = 1$ y el que se obtiene para $t = 2$ (comprobarlo). Etc…

También podemos dar una recta a través de dos de sus puntos $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$, con $P_0 \neq P_1$, en cuyo caso tendremos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\boxed{x = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \quad ; \quad y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t \quad ; \quad z = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

donde estamos tomando como vector director el $\overrightarrow{P_0P_1}$.

En ambos casos anteriores, vemos que se requieren tres ecuaciones para definir una recta.

Sin embargo, una recta en el espacio también puede determinarse dando dos planos diferentes que la contengan, con lo cual sus puntos serían los infinitos comunes a los dos planos secantes.

Así si uno de los planos tiene ecuación $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y el otro plano tiene ecuación $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, con la condición de que los tres coeficientes principales del primer plano (A_1 , B_1 y C_1) no sean proporcionales a los tres coeficientes principales del segundo plano (A_2 , B_2 y C_2) , para que ambos planos no sean paralelos ni coincidentes, la recta intersección de ambos planos puede venir dada por el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores, pues los puntos de la recta son los únicos que cumplen a la vez ambas ecuaciones, luego serán las infinitas soluciones del sistema lineal que forman las dos ecuaciones dadas (sistema lineal compatible indeterminado).

En conclusión, para definir una recta del espacio se necesitan dos ecuaciones cartesianas o bien tres ecuaciones paramétricas.

Ahora bien, conviene saber pasar de unas a otras:

1) Desde luego, se pasa de unas ecuaciones paramétricas a otras paramétricas muy fácilmente (ya lo dijimos anteriormente), pero esto no tiene mayor interés.

2) Si nos dan unas ecuaciones paramétricas, ¿cómo hallar dos planos que contengan la recta? Esto sí es importante.

Supongamos que las ecuaciones paramétricas sean $x = x_0 + pt$; $y = y_0 + qt$; $z = z_0 + rt$ (con $p \neq 0$, $q \neq 0$ o $r \neq 0$). Eliminando t entre dos de ellas, se obtiene la ecuación cartesiana de un plano (se despeja t de las dos ecuaciones elegidas y se igualan ambos resultados). Y eliminando t entre una de las ecuaciones anteriores y la tercera ecuación no considereda antes, se obtiene la ecuación de otro plano.
En efecto, ambos planos contienen todos los puntos de la recta, pues la eliminación de t implica que las coordenadas que aparezcan en las ecuaciones obtenidas para cada plano corresponderán a puntos de la recta, pues estos se obtienen dando a t los mismos valores en las tres ecuaciones paramétricas.
Y si ocurriese que los dos planos obtenidos del modo descrito anteriormente fuesen el mismo, se hallaría otro plano eliminando t entre las dos ecuaciones paramétricas que no hubiesen sido consideradas en las dos eliminaciones anteriores (se puede demostrar que de los tres planos posibles, hay al menos dos diferentes).

Nota: Si alguna de las ecuaciones paramétricas no incluye t (porque sea cero la componente del vector director que multiplica a esta variable), esa ecuación paramétrica será la de uno de los planos que buscamos.

Ejemplo: Si las ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 2 - t$; $y = 3$; $z = 1 + 5t$, ya tenemos uno de los planos que contiene a la recta dada: $\boxed{y = 3}$. Ahora, eliminando t entre las ecuaciones primera y tercera, se tiene el nuevo plano $\boxed{5x + z - 11 = 0}$. Por tanto, la recta vendrá dada por el par de planos $\boxed{y = 3 \;\; ; \;\; 5x + z - 11 = 0}$.
Obsérvese que los puntos de la recta dada cumplen las ecuaciones de estos dos planos. En efecto, al sustituir las coordenadas de dichos puntos (dadas por las mismas ecuaciones paramétricas) en el primer plano, queda la identidad $3 \equiv 3$, y al sustituirlas en el segundo plano, obtenemos la expresión $5(2 - t) + (1 + 5t) - 11 = 0$, que es la identidad $0 \equiv 0$.

3) Y al revés, si nos dan dos planos que definen la recta, ¿cómo hallar unas ecuaciones paramétricas de la misma? Esto también es muy importante.

Sean los planos de ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Los puntos de la recta son las infinitas soluciones del sistema lineal formado por esas dos ecuaciones. Sabemos que los planos cumplen la condición de que sus coeficientes principales (los de las variables) no son proporcionales. Por tanto, la matriz de los coeficientes del sistema, al no tener sus filas proporcionales, será de rango dos (o sea, admitirá algún menor de orden 2 diferente de cero). Entonces, siempre podremos despejar dos de las variables en función de una tercera. Bastará llamar t a la variable no despejada para tener ya unas ecuaciones paramétricas de la recta. Por ejemplo, si se pudiesen despejar x e y en función de z, haríamos $z = t$, con lo cual tendríamos unas ecuaciones que nos darían las tres coordenadas de cualquier punto solución como funciones de t. (Ver Sección 9.2).

Ejemplo: Sea la recta dada a través de los planos $x - 3y + z - 1 = 0$; $x + y + z = 0$. Queremos hallar unas ecuaciones paramétricas de esta recta.
Nótese que los tres coeficientes principales de la primera ecuación no son proporcionales a los tres correspondientes de la segunda (en caso contrario los planos serían paralelos o coincidentes y no pueden definir una recta). Entonces el sistema lineal que forman las dos ecuaciones dadas tiene una matriz de coeficientes de rango dos, que en este caso es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Así, "el menor de orden 2" de esta matriz $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que corresponde a los coeficientes de las variables x e y , es diferente de cero, y también lo es "el menor" $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que corresponde a las variables y y z. Por tanto, podemos despejar x e y en función de z (usando el primer menor) o bien despejar y y z en función de x (usando el segundo menor); en cambio, no pueden despejarse x y z en función de y, porque el menor correspondiente $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ vale cero. Entonces, resolviendo el sistema en las variables y , z se obtiene: $y = -1/4$ así como $z = -x + 1/4$. Y ahora llamando $x = t$, resultan unas ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\boxed{x = t \;\; ; \;\; y = -1/4 \;\; ; \;\; z = 1/4 - t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

También podríamos haber resuelto el sistema en las variables x , y obteniéndose otras ecuaciones paramétricas de la misma recta (donde sería $z = t$).

Ecuaciones de una recta en forma continua

Cuando se tienen ecuaciones paramétricas $x = x_0 + pt$; $y = y_0 + qt$; $z = z_0 + rt$ de una recta, con $p \neq 0$, $q \neq 0$ y $r \neq 0$, se puede despejar t de las tres ecuaciones e igualar los tres resultados (puesto que todos sus puntos se obtienen dando el mismo valor a t en las tres ecuaciones), con lo cual queda:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}}$$

que se llaman ecuaciones de la recta "en forma continua".

Obsérvese que en la anterior expresión no hay una ecuación sino tres, según los miembros que se igualen (primero = segundo, una; segundo = tercero, otra; primero = tercero, otra más). Como sabemos, cada una de esas ecuaciones corresponde a un plano que contiene a la recta (bastaría tomar dos de ellos diferentes para tener la recta definida como intersección de dos planos). <u>La ventaja de dar la recta en forma continua es que se visualiza muy bien un vector director de la recta (p, q, r), así como uno de sus puntos que es $P_0 = (x_0\,, y_0\,, x_0)$</u>.

<u>Y por ese motivo conviene escribir así otras rectas, aunque sus vectores directores tengan una o hasta dos componentes nulas</u>. Por tanto, no deberá extrañarnos encontrar expresiones como las anteriores, donde uno o dos de los cocientes tengan su denominador cero (no se trata, obviamente, de dividir por cero; es sólo una manera de presentar unas ecuaciones paramétricas de la recta, como si hubiésemos despejado t en todas ellas y las hubiésemos igualado). <u>Desde luego, si un denominador es cero, el correspondiente numerador tendrá que ser cero para que se cumplan las igualdades</u>.

<u>Cuando nos den la recta a través de sus ecuaciones "en forma continua", para obtener unas ecuaciones paramétricas de dicha recta, basta igualar los tres cocientes al parámetro t y luego despejar las tres variables x, y, z</u>. (Esto se usa mucho en la práctica, pues frecuentemente se dan las rectas en forma continua pero sus ecuaciones paramétricas son muy necesarias, como se verá en muchos ejemplos posteriores).

<u>Ejemplo</u>: Las ecuaciones en forma continua $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{0}$ representan una recta que pasa por el punto $(2\,, -1\,, 5)$ y que tiene la dirección del vector $(3\,, -2\,, 0)$. Igualando los tres miembros a t se obtendrían unas ecuaciones paramétricas de esa recta, que serían

$$\boxed{x = 2 + 3t \;\; ; \;\; y = -1 - 2t \;\; ; \;\; z = 5} \quad (t \text{ variando en } \mathbb{R})$$

Uno de los planos que contiene a la recta es $\boxed{\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2}}$. Y el otro plano, que resulta de igualar primer miembro con tercer miembro y también de igualar segundo miembro con tercer miembro, es $\boxed{z = 5}$ (lo que decíamos: si un denominador es cero, el numerador correspondiente será cero).

<u>Otro ejemplo</u>: Si las ecuaciones en forma continua fuesen $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{0}$, la recta pasaría por el punto $(0\,, 2\,, -3)$ y un vector director sería el $(0\,, 4\,, 0)$, que podría perfectamente cambiarse por el $(0\,, 1\,, 0)$, ya que tienen la misma dirección. Aquí uno de los planos que contiene a la recta es el $x = 0$, siendo otro plano el $z + 3 = 0$. Y unas ecuaciones paramétricas de esta recta serían:

$$\boxed{x = 0 \;\; ; \;\; y = 2 + 4t \;\; ; \;\; z = -3} \quad (t \text{ variando en } \mathbb{R})$$

<u>Ahora estamos en condiciones de explicar cómo se obtiene la expresión de la distancia de un punto cualquiera P_0 del espacio a un plano de ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ (dada sin explicación en la pág. 5)</u>:

1) <u>Se halla le recta r que pasa por P_0 y es perpendicular al plano dado</u>, de ecuaciones paramétricas $x = x_0 + At\,; y = y_0 + Bt\,; z = z_0 + Ct$, con t real (al usar como "vector director" de esta recta el "vector normal" del plano, la recta será perpendicular al plano).

2) <u>Se determina el punto de corte Q entre esta recta r y el plano dado</u>, sustituyendo en la ecuación del plano las ecuaciones paramétricas de la recta, para luego despejar el valor de t (que corresponderá al punto Q de intersección); de modo que las coordenadas de este punto se obtienen a través de las mismas ecuaciones paramétricas, sustituyendo el valor de t hallado.

3) <u>Se calcula la distancia entre los puntos P_0 y Q</u>.

Haciendo todas las operaciones indicadas resulta la expresión dada en la pág. 5. (en la práctica es más rápido aplicar esa fórmula que repetir este procedimiento en cada ocasión que se necesite).

Todos los planos que contienen a una recta

Dada una recta en el espacio, siempre hay infinitos planos que la contienen (todos se cortan entre sí, dando como intersección la propia recta). El conjunto de todos esos planos se llama "haz de planos" de base la recta. Cada recta tiene su propio haz de planos.

¿Cómo determinar la ecuación de cualquiera de los planos de un determinado haz? Primero hay que tener las ecuaciones de dos de dichos planos. Si la recta correspondiente al haz viene dada por intersección de dos planos, ya los tenemos. Y si la recta viene dada en forma paramétrica, hemos explicado en el apartado anterior cómo obtener dos planos diferentes que la contengan (son dos planos pertenecientes al haz).

Sean entonces $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ecuaciones de esos dos planos conocidos cuya intersección es la recta base del haz. Pues bien, se tiene que una ecuación de cualquiera de los restantes planos del haz es:

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0} \qquad (2)$$

donde λ es un valor real distinto de cero para cada plano restante. En efecto, el resultado de operar y agrupar términos semejantes en la expresión anterior, será otra ecuación general del mismo tipo que las dadas, luego será otro plano que dependerá del valor de λ utilizado. Pero todos los puntos de la recta intersección de los dos planos iniciales cumplirán las ecuaciones de los dos planos, luego cumplirán la ecuación (1) anterior, sea cual sea el valor real de λ. Por tanto, esta ecuación representa los infinitos nuevos planos del haz (para $\lambda = 0$ la expresión (1) nos da el primero de los planos dados, por lo cual pedimos que sea $\lambda \neq 0$ para los restantes).

Otra ecuación de los planos del haz correspondiente a la misma recta podría ser:

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 + \lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \qquad (3)$$

donde, otra vez, cada plano del haz que sea diferente de los dados se obtendrá para un cierto valor de λ distinto de cero. Para un mismo plano del haz, el valor de λ que le corresponde usando (2) será diferente, en general, al que le corresponde cuando se usa (3). Sin embargo, es indiferente trabajar con (2) o trabajar con (3), cuando se trate de obtener todos los planos del haz que sean diferentes a los dos dados.

Nota: El "vector director" de la recta que definen los dos planos dados es el producto vectorial de los "vectores normales" de dos de los planos diferentes del haz, porque dicha recta es perpendicular a ambos vectores directores.

Ejemplo: Sea la recta dada por las ecuaciones $2x - 3y + z + 2 = 0$; $x - y + 3 = 0$ (la recta es la intersección de estos dos planos).
1) Hallar expresión de todos los planos que contienen a esa recta, diferentes de los dados.
2) Determinar el plano del haz que pasa por el punto (1 , −2 , 0).
3) Hallar ecuaciones en forma continua de la recta definida por los dos planos dados.

1) En primer lugar, una expresión de todos esos planos es

$$2x - 3y + z + 2 + \lambda \cdot (x - y + 3) = 0$$

con λ diferente de cero. O bien, $\boxed{(2 + \lambda)x - (3 + \lambda)y + z + (2 + 3\lambda) = 0}$.

2) Para obtener el plano del haz que pasa por el punto dado, sólo hay que determinar el valor de λ que le corresponde, para lo cual obligamos a que el punto cumpla la ecuación obtenida anteriormente.
Sustituyendo las coordenadas del punto en la misma resulta $10 + 6\lambda = 0$, lo que implica $\lambda = -5/3$. Por tanto, la ecuación del plano pedido será $2x - 3y + z + 2 - \frac{5}{3} \cdot (x - y + 3) = 0$. La cual, multiplicando por 3 y agrupando términos semejantes, nos da $\boxed{x - 4y + 3z - 9 = 0}$ (que vemos contiene al punto $(1\,,-2\,,0)$ dado).

3) El "vector director" de la recta dada será: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, con lo cual unas ecuaciones de dicha recta "en forma normal" podrán escribirse desde que tengamos un punto de la misma.
Para ello, podemos hacer (por ejemplo) $z = 0$ en el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos dados y se tendrá: $2x - 3y = -2$; $x - y = -3$, que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyo determinante de coeficientes es $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo cual será compatible con solución única, siendo su solución $x - 7$, $y = -4$. Por tanto, un punto de la recta dada es $(-7\,,-4\,,0)$.
(Podríamos haber hecho también $x = 0$ en las ecuaciones de los dos planos dados, con lo cual el determinante de coeficientes del nuevo sistema obtenido sería $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y podríamos despejar las variables y, z ; e igualmente podríamos haber tomado $y = 0$, con lo cual el determinante de coeficientes del sistema obtenido sería $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y podríamos despejar las variables x, z). OJO: No siempre resultarán estos tres determinantes de orden 2 diferentes de cero, pero con seguridad habrá al menos uno que lo cumpla y por ahí encontraremos un punto de la recta.
En conclusión, en este caso unas ecuaciones en forma normal de la recta definida por los dos planos dados inicialmente serán

$$\frac{x+7}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Y agregamos algo más:

Unas ecuaciones paramétricas de la recta dada serán: $x = -7 + t$; $y = -4 + t$; $z = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Y ahora podremos demostrar que el plano obtenido anteriormente (el que pasa por el punto dado $(1\,,-2\,,0)$ del espacio) contiene a la recta dada, pues sustituyendo cualquier punto de la misma en la ecuación de dicho plano, resultará una identidad:
En efecto, la ecuación obtenida era $x - 4y + 3z - 9 = 0$ y, al sustituir en este plano un punto cualquiera de la recta que será $(-7 + t\,, -4 + t\,, t)$, resulta:

$(-7 + t) - 4(-4 + t) + 3t - 9 = 0$ que es la identidad $0 \equiv 0$

Posiciones relativas entre dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden estar en solamente una de las siguientes posiciones relativas:

1) Serán **coincidentes** si tienen la misma dirección ("vectores directores" iguales o proporcionales) y algún punto común (o sea, que un cierto punto de una de las rectas cumplirá las ecuaciones de la otra recta). En este caso ambas rectas tendrán todos sus puntos comunes (el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales correspondientes será compatible con infinitas soluciones, que serán las coordenadas de dichos puntos).

2) Serán **paralelas**, si tienen la misma dirección y ningún punto común (un cierto punto de una de las rectas no cumplirá las ecuaciones de la otra recta). En este caso las rectas no

tendrán ni un solo punto en común (el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales correspondientes será incompatible). En este caso, ambas rectas estarán contenidas en un único plano del espacio.

3) Serán **secantes** (**o se cortan)**, si tienen direcciones diferentes ("vectores directores" no iguales ni proporcionales) y un punto común (el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales correspondientes será compatible con solución única). En este caso, ambas rectas estarán también contenidas en un único plano del espacio.

4) Serán **rectas que se cruzan**, si tienen direcciones diferentes y ningún punto común (el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales correspondientes será incompatible). En este caso, no habrá ningún plano del espacio que contenga a ambas rectas.

Dicho de otro modo: Sean las rectas dadas "en forma continua"

$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}\text{, con "vector director" }\vec{v}_1=(p_1,q_1,r_1)$$

$$\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}\text{, con "vector director" }\vec{v}_2=(p_2,q_2,r_2)$$

A) Serán "paralelas" o "coincidentes" cuando sus vectores directores sean iguales o proporcionales (o sea, que exista un número real $\lambda \neq 0$ de modo que $\vec{v}_1=\lambda\vec{v}_2$, o bien $\vec{v}_2=\lambda\vec{v}_1$). La "coincidencia" de ambas rectas se dará cuando además el punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ de la primera cumpla las ecuaciones de la segunda (con lo cual también el punto $P_2(x_2,y_2,z_2)$ de la segunda recta cumplirá las ecuaciones de la primera recta). En caso contrario, las rectas serán "paralelas".

B) Serán "rectas secantes" o serán "rectas que se cruzan" cuando los vectores directores no sean iguales ni proporcionales. Entonces, serán "rectas secantes" cuando el sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas formado por las ecuaciones de dos planos que determinen la primera recta junto con las ecuaciones de otros dos planos que determinen la segunda recta, **sea compatible determinado** (con solución única, que es el punto de corte). Y serán "rectas que se cruzan" cuando el sistema nombrado anteriormente **sea incompatible**.

Ejemplos:

1) Las rectas $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}$ y $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{6}$ son paralelas, porque sus vectores directores son proporcionales y además el punto $(0\ ,\ -3\ ,\ 2)$ de la primera recta no cumple las ecuaciones de la segunda recta: $\frac{0+1}{4}\neq\frac{-3-1}{-2}\neq\frac{2}{6}$ (bastaría con que solamente dos de las fracciones fuesen di-ferentes entre sí).

2) Las rectas $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}$ y $\frac{x-4}{4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-8}{6}$ son coincidentes, porque sus vectores directores son proporcionales y además el punto $(0\ ,\ -3\ ,\ 2)$ de la primera cumple las ecuaciones de la segunda recta: $\frac{0-4}{4}=\frac{-3+5}{-2}=\frac{2-8}{6}$.

3) Las rectas $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ y $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{-2}$ se cruzan, porque sus vectores directores no son proporcionales y además es incompatible el sistema formado por las ecuaciones de los cuatro planos que definen las dos rectas, que son: $2x=3y+3$; $-x=3z-6$; $y-2=0$; $-2x=z$. En efecto, de la tercera ecuación resulta únicamente $\boxed{y=2}$; con lo cual la primera ecuación se convierte en $2x=9$, de donde resulta únicamente $\boxed{x=9/2}$; pero entonces de la cuarta ecuación resulta únicamente $\boxed{z=-9}$; sin embargo, estos valores de las incógnitas no cumplen la segunda ecuación: $-9/2\neq 3\cdot(-9)-6$. Por tanto, el sistema es incompatible.

4) Las rectas $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ y $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-2}$ son secantes, porque sus vectores directores no son proporcionales y además es compatible con solución única el sistema formado por las ecuaciones de los cuatro planos que definen las dos rectas, que son:

$$2x=3y+3 \;;\; -x=3z-6 \;;\; -2x+6=3z-3 \;;\; y-1=0$$

En efecto, la cuarta ecuación nos da únicamente $\boxed{y=1}$; con lo cual la primera ecuación se convierte en $2x=6$, de donde resulta únicamente $\boxed{x=3}$; pero entonces la segunda ecuación pasa a ser $-3=3z-6$, de donde resulta únicamente $\boxed{z=1}$; pero resulta que esos valores únicos obtenidos para las incógnitas cumplen la tercera ecuación: $-2\cdot 3+6=3\cdot 1-3$. Por tanto, la única solución del sistema es $\boxed{x=3\,;\,y=1\,;\,z=1}$. Es decir, que el punto de intersección de las dos rectas dadas es el (3 , 1 , 1). (No se piense que el punto de intersección debe ser el que interviene en las ecuaciones en forma continua de alguna de las dos rectas, como en este caso ocurre con la segunda; lo normal es que sea otro punto diferente).

Posiciones relativas entre recta y plano

Una recta y un plano en el espacio pueden estar en solamente una de las siguientes posiciones relativas:

1) Serán **paralelos** y por tanto sin ningún punto común (en este caso el “vector director” de la recta será perpendicular al “vector normal” del plano y un cierto punto de la recta no cumplirá la ecuación del plano).

2) **La recta estará contenida en el plano**, o sea, todos los puntos de la recta pertenecen al plano (en este caso el “vector director” de la recta también será perpendicular al “vector normal” al plano y un cierto punto de la recta cumplirá la ecuación del plano).

3) Serán **secantes (o se cortan)** en un único punto (en este caso el “vector director“ de la recta no será perpendicular al “vector normal” del plano).

Dicho de otro modo: Sean la recta dada por unas ecuaciones en “forma continua” y el plano dado por una ecuación en forma general.

Recta: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, con “vector director” $\vec{v}=(p,q,r)$
Plano: $Ax+By+Cz+D=0$, con “vector normal” $\vec{n}=(A,B,C)$

1) Serán paralelos o la recta estará contenida en el plano, cuando los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ sean perpendiculares, luego $\boxed{p\cdot A+q\cdot B+r\cdot C=0}$. Si además el punto P_0 $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ de la recta cumple la ecuación del plano, la recta estará contenida en el mismo. En caso contrario, recta y plano serán paralelos.

2) Serán secantes cuando los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ no sean perpendiculares: $\boxed{p\cdot A+q\cdot B+r\cdot C\neq 0}$

Ejemplos:

1) Sean la recta $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{0}$ y el plano $2x+6y-z=1$. Determinar sus posiciones relativas.
Hallamos el producto escalar del “vector director” de la recta y el “vector normal” del plano:
$3\cdot 2+(-1)\cdot 6+0\cdot(-1)=0$, luego dichos vectores son perpendiculares. Por tanto, recta y plano pueden ser paralelos o bien la recta estará contenida en el plano. El punto (1 , -5 , 0) de la recta no cumple la ecuación del plano, luego recta y plano son paralelos.

2) Sean la misma recta anterior y el plano $x + 3y + 4z = -14$. Determinar sus posiciones relativas.
Hallamos el mismo producto escalar de antes: $3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 0$. Otra vez pueden ser paralelos o la recta estará contenida en el plano. El punto (1 , -5 , 0) ahora cumple la ecuación del plano, luego la recta está contenida en el plano.

Vamos a comprobarlo: Unas ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 1 + 3t$; $y = -5 - t$; $z = 0$, con t real. Lo cual nos dice que todo punto de la recta será $(1 + 3t, -5 - t, 0)$, con t variando en todo $\mathbb{R}$. Pues bien, si sustituimos las coordenadas de ese punto (variable con t) en la ecuación del plano queda $(1 + 3t) + 3 \cdot (-5 - t) + 4 \cdot 0 = -14$, que es la identidad $-14 \equiv -14$. Lo cual nos indica que **todos** los puntos de la recta están en el plano.

3) Sean la recta $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $2x - 3y + z = 0$. Determinar sus posiciones relativas.
El producto escalar de (3 , 5 , -1) por (2 , -3 , 1) es -10 (distinto de cero), luego el "vector director" de la recta no es perpendicular al "vector normal" del plano y entonces la recta y el plano son secantes (se cortan en un punto).

Para hallar el punto de corte de ambos, usamos unas ecuaciones paramétricas de la recta. En este caso tenemos $x = 3t$; $y = 1 + 5t$; $z = -2 - t$, con t real. Luego, todos los puntos de la recta tienen coordenadas $(3t , 1 + 5t , -2 - t)$. Queremos saber cuál de estos puntos está en el plano (punto de corte), para lo cual sustituimos las anteriores coordenadas en la ecuación del plano dado y hallamos t para que se cumpla la ecuación: $2 \cdot (3t) - 3 \cdot (1 + 5t) + (-2 - t) = 0$, de donde se obtiene $\boxed{t = -1/2}$. Por tanto, el punto de la recta que está en el plano tiene coordenadas: $x = 3 \cdot (-1/2) = -3/2$; $y = 1 + 5 \cdot (-1/2) = -3/2$; $z = -2 - (-1/2) = -3/2$. O sea, el punto de corte entre recta y plano es el $(-3/2, -3/2, -3/2)$.

Ángulo entre dos rectas

Supongamos dos rectas, de ecuaciones: $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ y $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$

con "vectores directores" $\overrightarrow{v_1} = (p_1 , q_1 , r_1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (p_2 , q_2 , r_2)$.

1) **Si las rectas fuesen secantes**, formarán cuatro ángulos (dos agudos iguales y dos obtusos iguales, siendo suplementarios agudos y obtusos, o bien formarán cuatro ángulos rectos si las rectas fuesen perpendiculares). Entonces, un ángulo no obtuso formado por las rectas viene dado por:

$$\alpha = arc\ cos \left| \frac{p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \right|$$

donde el numerador de la fracción es $\overrightarrow{v_1} \circ \overrightarrow{v_2}$ y el denominador es $|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|$.

Nótese que si es $\boxed{p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2 = 0}$, se tiene $\boxed{\alpha = arc\,cos\, 0 = \pi/2}$ y las rectas serán perpendiculares.

Y si es $\boxed{p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2 \neq 0}$, el ángulo será agudo sin importar el signo del numerador de la fracción, pues el cociente se toma en valor absoluto (recuérdese que la función arco coseno es decreciente con recorrido de π a 0, pero para valores positivos da siempre resultados entre $\pi/2$ y 0).

Nota: Si el ángulo de los dos "vectores directores" fuese agudo o recto, el ángulo no obtuso entre las dos rectas será directamente el de los dos vectores (caso en que el numerador de la fracción será positivo o cero). Pero si el ángulo de los dos vectores fuese obtuso (caso de numerador negativo), tomar el valor absoluto del cociente es como cambiar el sentido de uno de los "vectores directores", con lo cual el ángulo resultará el suplementario del ángulo obtuso que volverá a ser agudo (verlo en un dibujo).

2) **Si las rectas fuesen paralelas o coincidentes**, los "vectores directores" serían iguales o proporcionales y la expresión dada anteriormente para el ángulo α también sirve: En efecto, el numerador de la fracción es $\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot cos\, 0$ cuando los vectores directores tengan el mismo sentido y será $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot cos\, \pi$ cuando los vectores directores tengan sentidos diferentes, mientras que el denominador de la fracción es $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|$; por tanto, el valor absoluto total será en un caso $|cos\, 0| = |1| = 1$ y en el otro caso $|cos\, \pi| = |-1| = 1$. En conclusión, en ambos casos el ángulo no obtuso será $\boxed{\alpha = arc\, cos\, 1 = 0}$ (es lo que se dice en estos casos).

3) **Y si fuesen "rectas que se cruzan"**, no formarán ángulos. Pero en este caso, si fuese cero el numerador de la fracción, los vectores directores serían perpendiculares y entonces se dice que las rectas "se cruzan perpendicularmente".

Ángulo entre recta y plano

Supongamos una recta y un plano de ecuaciones:

Recta r: $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, con "vector director" $\vec{v} = (p, q, r)$

Plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$, con "vector normal" $\vec{n} = (A, B, C)$

Si el vector director de la recta es proporcional al vector normal al plano, ambos vectores tendrán la misma dirección y está claro que la recta cortará al plano siendo perpendicular al mismo (ángulo α entre recta y plano de 90º o $\pi/2$ radianes).

Y si dichos vectores no son proporcionales, tendrán direcciones diferentes y la recta cortará al plano oblícuamente (no perpendicularmente) o la recta será paralela al plano o bien la recta estará contenida en el plano. En el primer caso será $p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C \neq 0$ y en los dos últimos casos será $p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C = 0$ (ver pág. 12).

Si recta y plano se cortan oblícuamente, llamemos P al punto de corte. Entonces, si proyectamos perpendicularmente la recta r sobre el plano π, se obtiene otra recta r' contenida en dicho plano pasando por el punto P (se aconseja hacer un dibujo al respecto). Pues bien, geométricamente, el ángulo no obtuso α entre la recta r y el plano π es el ángulo no obtuso que forman las rectas r y r' (que se cortan en P y forman cuatro ángulos, como sabemos).

Pero **dicho ángulo α es complementario del ángulo no obtuso β** que forman la recta r de "vector director" $\vec{v} = (p\,, q\,, r)$ y la recta perpendicular al plano π por el punto P, cuyo "vector director" es $\vec{n} = (A\,, B\,, C)$ (hacer un dibujo para verlo).

Por tanto, será $\boxed{sen\, \alpha = cos\, \beta}$ y entonces $sen\, \alpha = cos\, \beta = \left| \frac{\vec{v} \circ \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \left| \frac{p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C}{\sqrt{p^2+q^2+r^2} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|$

(si el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ fuese obtuso, al aplicar el valor absoluto al cociente se cambiará uno de los vectores por su opuesto y el nuevo ángulo será agudo, como ya hemos dicho en otras ocasiones).

Entonces, dicho ángulo agudo α viene dado por:

$$\alpha = arc\ sen \left| \frac{p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C}{\sqrt{p^2+q^2+r^2} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right| \qquad (4)$$

siendo $\boxed{p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C \neq 0}$.

Y si fuese $p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C = 0$, será $\boxed{\alpha = arc\ sen\ 0 = 0}$ no siendo secantes la recta y el plano (pues la recta estará contenida en el plano o ambos serán paralelos, como dijimos anteriormente). Con lo cual vemos que en estos casos recta y plano forman ángulo cero (como se acepta, aunque dicho ángulo no exista geométricamente en el caso de paralelismo).

Y en el caso inicial de que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ sean proporcionales, el numerador de la fracción que nos da el valor de α será $\vec{v} \circ \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot cos\ 0$ si los dos vectores tuviesen el mismo sentido, o bien será $|\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot cos\ \pi$ si tuviesen sentidos opuestos, mientras que el denominador de la fracción es $|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|$; por tanto, el cociente que está dentro del valor absoluto quedará como $cos\ 0 = 1$ o $cos\ \pi = -1$. Esto prueba que el valor absoluto del cociente será 1 y α será $\boxed{arc\ sen\ 1 = \pi/2}$ (recta y plano son perpendiculares, como habíamos dicho al principio).

Esto prueba que la expresión (4) dada para α es totalmente general (sirve cuando la recta corta perpendicularmente al plano, cuando lo corta oblícuamente e incluso sirve cuando la recta está contenida en el plano o es paralela al mismo).

Distancia entre dos rectas paralelas

1) Se toma un punto cualquiera P_1 de una de las rectas y se halla el plano que pasa por P_1 y es perpendicular a ambas rectas paralelas (tomando como "vector normal" de ese plano cualquiera de los "vectores directores" de las rectas dadas).

2) A continuación, se obtiene el punto P_2 de intersección de dicho plano con la otra recta (resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que forman el plano anterior y dos planos que determinen esa otra recta, o si la misma está en forma paramétrica, sustituiremos las coordenadas de un punto cualquiera de esa recta en la ecuación del plano obtenido, para despejar t y sustituir su valor en las mismas ecuaciones paramétricas utilizadas, con lo cual se obtiene P_2).

3) Finalmente, se calcula la distancia entre P_1 y P_2 que es la distancia mínima entre las dos rectas paralelas. (Hacer un dibujo para comprobarlo).

Ejemplo: Sean las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{5}$ y $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-5}$, cuyos "vectores directores" son proporcionales (por tanto, tienen la misma dirección). Además, el punto $(2\ ,\ 0\ ,\ -3)$ de la primera recta no cumple claramente las ecuaciones de la segunda recta, luego ambas son paralelas.

Vamos a calcular la distancia mínima entre dichas rectas:

1) Ya tenemos un punto P_1 de la primera recta, que es el $(2\ ,\ 0\ ,\ -3)$. Ahora hallamos el plano que pasa por $(2\ ,\ 0\ ,\ -3)$ y es perpendicular a ambas rectas, para lo cual tomamos como vector normal de dicho plano cualquiera de los "vectores directores" dados; entonces tenemos la ecuación de ese plano que es $3 \cdot (x-2) + (-1) \cdot (y-0) + 5 \cdot (z+3) = 0$, la cual operando queda en la forma general $\boxed{3x - y + 5z + 9 = 0}$ (ver pág. 2).

2) Buscamos ahora el punto P_2 de intersección del plano anterior con la segunda recta dada. Unas ecuaciones paramétricas de ésta son $x = -3t$; $y = -1 + t$; $z = 4 - 5t$, con t variando en $\mathbb{R}$.

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación del plano anterior, se obtiene una ecuación con la única variable t, que permite despejar el valor de esta variable correspondiente al punto de corte. Dicha ecuación es $3 \cdot (-3t) - (-1 + t) + 5 \cdot (4 - 5t) + 9 = 0$, o sea $-35t + 30 = 0$, de donde resulta el valor del parámetro $\boxed{t = 30/35 = 6/7}$.
Entonces, el punto P_2 es el $(-18/7, -1/7, -2/7)$, obtenido usando las anteriores ecuaciones paramétricas para el valor $t = 6/7$.

3) Finalmente, calculamos la distancia entre $P_1(2 , 0 , -3)$ y el punto P_2 hallado, obteniéndose:

$$d = \sqrt{\left(2 + \frac{18}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-3 + \frac{2}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{1386}}{7} = 5\text{'}318\ldots$$

que es la distancia mínima entre las dos rectas paralelas.

Distancia entre recta y plano paralelos

Se toma un punto P_0 de la recta y se halla la distancia mínima de dicho punto al plano dado, como hemos explicado en la página 5. Tendremos así la distancia mínima entre recta y plano paralelos.

Entonces, si la recta está dada en forma paramétrica o en forma continua, será evidente un punto de la recta.
Pero si la recta está dada como intersección de dos planos, habrá que hallar una de las infinitas soluciones del sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible indeterminado, que forman las dos ecuaciones de dichos planos: Habrá que escribir la matriz 2x3 de los coeficientes del sistema y determinar un menor de orden 2 diferente de cero en dicha matriz, con lo cual tendremos dos incógnitas principales, para luego resolver el sistema con esas 2 únicas incógnitas que se obtiene dando en el anterior el valor cero u otro valor real arbitrario a la incógnita no principal del mismo. (Ver Sección 9.2).

Ejemplo: Sea la recta de ecuaciones $\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y el plano de ecuación $x + y + z = 8$.

Un punto de la recta dada es $P_0 = (0 , -5 , 2)$ y su distancia al plano dado será:

$$d = \frac{|0-5+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

Y si la misma recta hubiese sido dada mediante los planos $3x + 2y = -10$; $y + 3z = 1$, un punto de dicha recta sería una cualquiera de las infinitas soluciones del sistema formado por las dos ecuaciones anteriores, cuya matriz de coeficientes es en este caso:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

la cual es de rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$ es diferente de cero, lo cual nos permitirá despejar x e y (incógnitas principales) en función de z. Entonces, si damos (por ejemplo) el valor $z = 0$, quedará el nuevo sistema formado por las ecuaciones $3x + 2y = -10$; $y = 1$, que tiene solución única $x = -4$; $y = 1$.

Entonces otro punto de la recta dada es $(-4 , 1 , 0)$.

Y la distancia entre este punto y el plano dado $x + y + z = 8$ será $d = \frac{|-4+1+0-8|}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$ (la misma distancia obtenida antes, como debe ser).
