

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

(Prerrequisitos: Rectas en el plano. Las cónicas. Planos y rectas en el espacio. Las cuádricas)

Inecuaciones lineales (o de primer grado) con dos variables

Las inecuaciones son de los tipos siguientes:

$$\begin{array}{ll} Ax + By + C > 0 & (1) & Ax + By + C < 0 & (2) \\ Ax + By + C \geq 0 & (3) & Ax + By + C \leq 0 & (4) \end{array}$$

o bien, cualquier otra inecuación que pueda llevarse a alguno de estos tipos mediante operaciones válidas con desigualdades (Ver Sección 1.3). Se supone en todos los casos $A \neq 0$ o $B \neq 0$, para que sean de primer grado al menos en una de las variables.

“Una solución” de cualquiera de las inecuaciones anteriores es un par de valores de las variables ($x = a ; y = b$) que cumplan la inecuación al ser sustituidos en la misma (es decir, que resulte al sustituir una relación numérica cierta).

Ejemplo: La inecuación $2x + 3y - 8 \leq 0$ tiene la solución $x_1 = 0; y_1 = 0$ (porque $-8 \leq 0$ es una relación cierta). Y también tiene la solución $x_2 = 1; y_2 = 2$ (porque $0 \leq 0$ es una relación cierta). En cambio $x = 2; y = 3$ no es solución (pues $5 \leq 0$ es una relación falsa).

Las diferentes “soluciones” de una de estas inecuaciones se corresponderán con un conjunto de puntos del plano OXY, formando lo que se llama “el conjunto solución” de la inecuación.

Se demuestra que “el conjunto solución” de una cualquiera de estas inecuaciones es siempre un semiplano (una de las mitades en que una recta divide al plano \mathbb{R}^2). La recta que define dicho semiplano tiene por ecuación la que resulta de sustituir, en la inecuación dada, la relación de desigualdad que aparezca por la relación = (la llamaremos “ecuación asociada”).

Por tanto, para los cuatro tipos de inecuaciones dados inicialmente, dicha “ecuación asociada” es siempre $Ax + By + C = 0$, con los valores de las constantes que lleve la inecuación dada.

Si la inecuación es de los tipos (3) o (4), los puntos de la recta $Ax + By + C = 0$ son parte de las soluciones (porque cumplen el = de la relación \geq o de la relación \leq) y en esos casos se dice que “el semiplano solución incluye su borde” (dicha recta). En cambio, si la inecuación es de los tipos (1) o (2), los puntos de la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ no son soluciones y se dice entonces que “el semiplano solución no incluye su borde”.

Dos inecuaciones “son equivalentes” solamente si tienen las mismas soluciones. Las operaciones con desigualdades, válidas en el conjunto de los números reales, permiten pasar siempre de unas inecuaciones a otras equivalentes.

En particular: Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una inecuación por un número real positivo, queda siempre otra inecuación equivalente a la anterior si dejamos inalterada la relación de desigualdad que había. En cambio, si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una inecuación por un número negativo, queda siempre otra inecuación equivalente a la anterior si cambiamos de sentido la relación de desigualdad que había (la relación $<$ debe ser cambiada por $>$, o viceversa; o bien, la relación \leq debe ser cambiada por \geq , o viceversa). Esto determina la posibilidad de reducir los cuatro tipos dados a solamente dos (podrían ser el (1) y el (3) o solamente el (2) y el (4); sin embargo, por comodidad, mantendremos los cuatro).

Ejemplos: La inecuación $4x - 6y + 10 < 0$ es equivalente a $12x - 18y + 30 < 0$ (resultado de multiplicarla por 3). Y también es equivalente a $-2x + 3y - 5 > 0$ (resultado de dividirla por -2), así como a $-4x + 6y - 10 > 0$ (resultado de multiplicarla por -1).

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Modo de resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables:

- 1) Se cambia la relación de desigualdad que tenga la inecuación por la relación $=$, obteniendo así su “ecuación asociada”.
- 2) Se representa gráficamente la recta que corresponda a dicha “ecuación asociada”.
- 3) Se elige un punto cualquiera (lo más cómodo posible) de uno de los semiplanos definidos por esa recta y se sustituyen sus coordenadas en la inecuación dada.
- 4) Si el punto elegido cumple la inecuación, el “conjunto solución” es todo el semiplano donde esté dicho punto. En caso contrario, el “conjunto solución” es el otro semiplano. Además, incluiremos los puntos de la recta en el semiplano solución si la inecuación es del tipo (3) o del tipo (4) y no los incluiremos si es del tipo (1) o del tipo (2).

Nota: Este método se basa en que la función $z = Ax + By + C$ se anula sobre la recta obtenida en el paso 1), es positiva siempre en uno de los semiplanos y es negativa siempre en el otro semiplano. Ya que la gráfica de dicha función en el espacio es un plano no vertical, que corta al OXY según la recta $Ax + By + C = 0$; con lo cual, en uno de los semiplanos definidos en OXY por esa recta, los valores de la función $z = Ax + By + C$ serán todos positivos (porque el plano que es su gráfica tendrá sus puntos por encima de OXY, y entonces todos tendrán $z > 0$), y en el otro semiplano definido por la recta, los valores de la función serán todos negativos (porque su gráfica tendrá los puntos por debajo del plano OXY, que es horizontal y entonces todos esos puntos tendrán $z < 0$). (Ver Sección 8.7).

Ejemplos:

1) Para resolver la inecuación $-2x + 3y - 5 > 0$, tendremos que representar la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$, que corta al eje OX en el punto $(-5/2, 0)$ y corta al eje OY en el punto $(0, 5/3)$.

Como esta recta no pasa por el origen, el mismo será un punto cómodo situado en uno de los dos semiplanos que la recta determina. Sustituimos las coordenadas del origen en la inecuación dada, quedando $-5 > 0$ (relación falsa). Por tanto, el conjunto solución será el semiplano que no incluye al origen, sin agregar su borde (porque el signo de la inecuación no incluye el $=$).

(Se recomienda representar gráficamente la recta $-2x + 3y - 5 = 0$, dibujándola a trazos discontinuos para indicar que no se incluye en el resultado, y luego rayar la parte del semiplano solución que se vea en la figura: así veremos representado parcialmente el conjunto solución de la inecuación).

2) Para resolver la inecuación $3x - 7y \leq 0$, tendremos que representar la recta de ecuación $3x - 7y = 0$, que pasa por el origen y está situada en los cuadrantes 1º y 3º (tiene pendiente $3/7$).

En este caso no nos sirve el origen como punto de prueba, puesto que está sobre la recta. Pero un punto sencillo como el $(1, 0)$ no está sobre la recta y entonces nos sirve para probar. Sustituyendo sus coordenadas en la inecuación dada, queda $3 \leq 0$ (falso). Por tanto, el conjunto solución será el semiplano que no incluye al punto $(1, 0)$, agregando su borde (porque el signo de la inecuación incluye el $=$).

(Se recomienda representar gráficamente la recta $3x - 7y = 0$, dibujándola con un trazo continuo para indicar que se incluye en el resultado, y luego rayar la parte del semiplano solución que veamos en la figura).

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Inecuaciones cuadráticas (o de segundo grado) con dos variables

Son de los tipos siguientes:

$$\begin{array}{ll} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F > 0 & (1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F < 0 & (2) \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \geq 0 & (3) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \leq 0 & (4) \end{array}$$

o bien, cualquier otra inecuación que pueda llevarse a alguno de estos tipos, mediante operaciones válidas con desigualdades. Se supone en todos los casos $A \neq 0$, $B \neq 0$ o $C \neq 0$, para que sea de segundo grado al menos en una de las variables o de segundo grado en ambas.

El concepto de solución es el mismo que dimos para las inecuaciones lineales. Habrá también un “conjunto solución” para cada inecuación concreta, formado por todas las soluciones que posea.

Pero ahora puede suceder que el “conjunto solución” sea vacío (cuando la inecuación no tenga ni una solución con valores reales en ambas variables). También puede suceder que el “conjunto solución” sea un solo punto, sea una recta, sea una cierta región más amplia del plano, esté formado incluso por dos regiones separadas del plano o bien podrá ser todo el plano (cuando la inecuación se cumpla para cualesquiera valores reales de ambas variables).

Como ejemplos: La inecuación $x^2 + y^2 + 3 < 0$ tiene “conjunto solución” vacío (pues el primer miembro siempre será positivo para valores reales de x e y); $(x - y + 1)^2 \leq 0$ tiene “conjunto solución” solamente la recta de ecuación $x - y + 1 = 0$ (pues $<$ no puede cumplirse para valores reales de las dos variables, pero $=$ sí); la inecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 > 0$ tiene “conjunto solución” $\mathbb{R}^2 - \{(1, 3)\}$, que es todo el plano menos el punto $(1, 3)$, y si la anterior inecuación tuviese el signo \geq su “conjunto solución” sería \mathbb{R}^2 .

Otros ejemplos en las páginas 5 y 6.

En todo caso, como vimos para las inecuaciones lineales, el conjunto solución dependerá de la “ecuación asociada” que es ahora de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual es la ecuación general de una “cónica”. (Ver Sección 8.4).

Habrá que determinar qué cónica representa la “ecuación asociada” anterior en cada caso y representarla gráficamente (si se puede, porque la cónica puede ser “imaginaria”), para luego llegar al “conjunto solución”, como se indica a continuación.

Se tendrá solamente una de las siguientes **seis situaciones**:

1) La “ecuación asociada” representa una “circunferencia”, una “elipse” o una “parábola” (ordinarias). Estas cónicas dividen al plano OXY en **dos regiones** y “el conjunto solución” de la inecuación dada será solamente una de esas regiones. Para saber cuál, bastará probar con un punto que no esté sobre la cónica: Si el punto cumple la inecuación dada, el conjunto solución será toda la región donde esté dicho punto; en caso contrario, será la otra región (como hacíamos anteriormente para resolver las inecuaciones de primer grado).

Y la cónica que hayamos encontrado se incluirá en el “conjunto solución” solamente si la inecuación es de los tipos (3) o (4) (tanto en este caso como en los que siguen).

2) La “ecuación asociada” representa una “hipérbola ordinaria” o una “parábola degenerada en dos rectas paralelas”. Estas cónicas dividen al plano en **tres regiones** y “el conjunto solución” de la inecuación será solamente la región intermedia (entre ambas ramas de la hipérbola o entre las dos rectas paralelas) o estará formado por las otras dos regiones. Para saberlo, bastará probar con un punto cualquiera que no esté en la cónica (ver explicación en la Nota de la pág. 5).

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

3) La “ecuación asociada” representa una “hipérbola degenerada en dos rectas que se cortan”. Entonces, el plano queda dividido por la cónica en cuatro regiones (los cuatro ángulos que forman las dos rectas al cortarse). Y “el conjunto solución” estará formado por dos de esos ángulos, opuestos por el vértice. Para saber cuáles, basta probar con un punto cualquiera de uno de ellos. Si cumple la inecuación, ese ángulo y su opuesto forman el “conjunto solución”. De lo contrario, serán los otros dos ángulos opuestos por el vértice.

4) La “ecuación asociada” representa una “parábola degenerada en una recta” (que, en realidad, será un par de rectas coincidentes, pues la ecuación de la recta estará elevada al cuadrado). Por tanto, se parece al caso de parábola degenerada en dos rectas paralelas, considerado en 2), pero la región intermedia entre las rectas no existe, luego solamente hay dos regiones, con la particularidad de que en este caso ambas regiones cumplirán la inecuación o bien ninguna la cumplirá (pues para pasar de una región a otra se pasa dos veces por la cónica, con lo cual hay dos cambios de signo del primer miembro que se neutralizan; por eso este caso es diferente al 1) donde había también dos regiones pero al pasar de una a otra se atravesaba la cónica una sola vez, con lo cual habrá siempre cambio de signo del primer miembro de la inecuación). Por tanto, “el conjunto solución” puede ser todo el plano, puede ser el plano menos la recta, puede ser sólo la recta o puede ser vacío. Para saberlo, probar con un solo punto exterior a la recta: Si cumple, estaremos en una de las dos primeras alternativas, y si no cumple, estaremos en una de las dos últimas (la recta estará incluida solamente cuando tengamos inecuaciones de los tipos (3) o (4), como habíamos dicho anteriormente).

5) La “ecuación asociada” representa una “elipse o circunferencia degenerada en un solo punto”. Se parece al caso de elipse o circunferencia ordinarias, pero la región interior a la curva no existe, luego queda una sola región. Por tanto, “el conjunto solución” puede ser todo el plano, puede ser el plano menos el punto, puede ser solamente el punto o puede ser vacío. Para saber qué ocurre, probar con cualquier punto distinto del que representa la cónica: Si cumple, estaremos en una de los dos primeros alternativas, y si no cumple, estaremos en una de las dos últimas (el punto estará incluido solamente cuando tengamos las inecuaciones (3) o (4)).

6) La “ecuación asociada” representa una “cónica imaginaria”. Entonces la cónica no tiene representación geométrica y la única región a considerar es todo el plano. Por tanto, “el conjunto solución” es todo el plano o es el vacío. Basta probar con un punto cualquiera y sabremos.

En conclusión, el procedimiento práctico que usaremos para resolver gráficamente una inecuación cuadrática con dos variables será:

- 1) Cambiamos la relación $>$, $<$, \geq o \leq que tenga la inecuación dada por la relación $=$, con lo cual se tiene su “ecuación asociada”.
- 2) Identificamos la cónica definida por dicha “ecuación asociada” y la representamos gráficamente (a menos que sea una cónica imaginaria). Se recomienda dibujarla a trazos discontinuos cuando la inecuación no incluya el $=$, y dibujarla con un trazo continuo cuando incluya el $=$. (Ver Sección 8.4).
- 3) Según la cónica que haya resultado en el apartado anterior, buscamos en cuál de las seis situaciones descritas anteriormente estamos, para saber cómo podrá ser “el conjunto solución” de la inecuación.
- 4) Probamos con un solo punto (suficientemente cómodo) que no esté sobre la cónica.
- 5) Concluimos, en base a la prueba anterior, si hay o no hay soluciones y en su caso dónde están situadas, según las conclusiones del paso 3). Si tenemos dudas, se puede probar con más puntos.

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Se recomienda rayar las regiones que hayan resultado partes del “conjunto solución”, con lo cual nos daremos cuenta gráficamente de cuál es dicho conjunto. Y los bordes de dichas regiones deberán dibujarse a trazos discontinuos cuando no formen parte del “conjunto solución” y deberán dibujarse con un trazo continuo si forman parte del mismo.

Nota: Lo dicho en las páginas 3 y 4 para las seis situaciones posibles analizadas, se basa en el estudio de los signos que toma en los distintos puntos del plano la función de dos variables que aparece en el primer miembro de la inecuación, la cual es

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Obviamente, esta función se anula únicamente en los puntos de la cónica asociada. Y, por ser una función continua, tomará valores con el mismo signo en los diferentes puntos de una misma región de las delimitadas por dicha cónica (o en todo \mathbb{R}^2 si la cónica es imaginaria), ya que esas regiones son “conexas por arcos” (o sea, que dos puntos cualesquiera de una de esas regiones pueden “conectarse” siempre por un cierto “arco de curva” cuyos extremos serán ambos puntos, el cual será continuo y estará contenido completamente en dicha región).

En efecto, si la anterior función tuviese signos contrarios en dos puntos de una misma región delimitada, tomando un arco que los conecte, contenido completamente en esa región, puede probarse por aplicación del Teorema de Bolzano que habría algún punto intermedio de dicho arco de curva donde la función tendría que valer cero, con lo cual ese punto estaría sobre la cónica (en contradicción con lo supuesto de que el arco está totalmente contenido en la región considerada y por tanto no podrá incluir ningún punto de la cónica).

Y ocurre también que en dos regiones próximas que estén separadas por la cónica se darán signos contrarios para la función $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, salvo el caso en que esta función sea el cuadrado de una de primer grado. Por tanto, normalmente, si la inecuación se cumple en una de las regiones mencionadas, no se cumplirá en la región próxima que esté al otro lado de la cónica, salvo que esa cónica sea “una parábola degenerada en una sola recta doble” (porque en ese caso la función mencionada al principio sería el cuadrado de una función de primer grado: Sería $z = (mx + ny + p)^2$, donde $mx + ny + p = 0$ sería la ecuación de dicha recta).

Ejemplos:

1) $x^2 + y^2 - 1 < 0$ tiene como “conjunto solución” el círculo de centro el origen y radio 1, no incluida la circunferencia correspondiente. (En efecto, el origen, que está en el círculo, cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $x^2 + y^2 - 1 > 0$, el “conjunto solución” sería la región exterior al círculo sin incluir la circunferencia (pues ahora el origen no cumpliría la inecuación).

2) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} - 1 \geq 0$ tiene como “conjunto solución” la parte externa a la región elíptica vertical de centro $(1, -2)$ y semiejes $a = 2$; $b = 3$, incluida la propia elipse. (El centro, que está en la región elíptica, no cumple la inecuación). Y si la inecuación tuviese el signo \leq , el “conjunto solución” sería la región elíptica, incluida la propia elipse.

3) $x^2 - y < 0$ tiene como “conjunto solución” la región que incluye al semieje positivo OY, de las dos que determina la parábola vertical $y = x^2$, excluida ésta. (Tomado el punto $(0, 1)$ que está en esa región, observamos que cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $x^2 - y > 0$, el “conjunto solución” sería la región que incluye al semieje negativo OY, excluida la parábola.

4) $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$ tiene como “conjunto solución” la región situada entre las ramas de la hipérbola equilátera horizontal $x^2 - y^2 = 1$, de centro el origen, de asíntotas $y = x$ e $y = -x$, que tiene vértices $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. La propia hipérbola forma parte del conjunto solución. (El origen, que está entre ambas ramas, cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $x^2 - y^2 - 1 \geq 0$, el “conjunto solución” estaría formado por los puntos de las otras dos regiones del plano (las que no quedan entre las ramas de la hipérbola), incluida la hipérbola.

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

5) $xy - 4 > 0$ tiene como “conjunto solución” las dos regiones que no están entre las ramas de la hipérbola $xy = 4$, la cual está situada en los cuadrantes 1º y 3º, con asíntotas los dos ejes de coordenadas (puntos de la hipérbola no incluidos). (El origen, que es el centro de la cónica, no cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $xy - 4 < 0$, el “conjunto solución” sería la región que queda entre las dos ramas, sin incluir los puntos de ambas.

6) $x^2 - 1 > 0$ tiene como “conjunto solución” los puntos del plano que están a la derecha de la recta vertical $x = 1$ y a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ (la cónica es una parábola degenerada en esas dos rectas paralelas, las cuales no quedan incluidas en la solución). (El origen, que está en la región intermedia entre las rectas, no cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $x^2 - 1 < 0$, el “conjunto solución” sería la región situada entre las dos rectas paralelas (las mismas no incluidas).

7) $x^2 - y^2 \leq 0$ tiene como “conjunto solución” los puntos de los dos ángulos que contienen al eje OX, de los cuatro que forman las rectas $y = x$ e $y = -x$ al cortarse (la cónica es la hipérbola degenerada en esas dos rectas, incluidas en la solución). (El punto $(1, 0)$, situado en uno de esos ángulos, cumple la inecuación). Y si la inecuación fuese $x^2 - y^2 \geq 0$, el “conjunto solución” estaría formado por los otros dos ángulos (los que contienen al eje OY), con las rectas incluidas.

8) $(x - 1)^2 < 0$ tiene como “conjunto solución” el vacío (no hay puntos solución con coordenadas reales). La cónica en este caso es la parábola degenerada en la recta $x = 1$ (doble). En cambio, si la inecuación fuese $(x - 1)^2 > 0$, el “conjunto solución” sería todo el plano menos los puntos de la recta $x = 1$. Si fuese $(x - 1)^2 \geq 0$, el “conjunto solución” sería todo el plano. Y si la inecuación fuese $(x - 1)^2 \leq 0$, el “conjunto solución” sería solamente la recta $x = 1$.

9) $2x^2 + 3y^2 > 0$ tiene como “conjunto solución” todo el plano, excluido el origen. La cónica en este caso es la elipse degenerada $(x^2/3) + (y^2/2) = 0$, cuyo único punto es el origen. Cualquier punto diferente del origen cumple la inecuación. En cambio, si la inecuación fuese $2x^2 + 3y^2 < 0$, el “conjunto solución” sería vacío. Si fuese $2x^2 + 3y^2 \leq 0$, la única solución sería el origen. Y si fuese $2x^2 + 3y^2 \geq 0$, el “conjunto solución” sería todo el plano.

10) $x^2 + y^2 + 1 \geq 0$ tiene como “conjunto solución” todo el plano. La cónica en este caso es la circunferencia imaginaria $x^2 + y^2 = -1$ y cualquier punto del plano cumple la inecuación. Y si la inecuación fuese $x^2 + y^2 + 1 > 0$, el “conjunto solución” sería otra vez todo el plano. En cambio, la inecuación $x^2 + y^2 + 1 < 0$ tiene “conjunto solución” vacío, e igual le pasa a la inecuación $x^2 + y^2 + 1 \leq 0$.

Inecuaciones con tres variables

Anteriormente vimos inecuaciones lineales y cuadráticas con dos variables que se resuelven en el plano \mathbb{R}^2 . Se trata ahora de plantearnos los mismos problemas en el espacio \mathbb{R}^3 . Por tanto, las inecuaciones tendrán tres variables y sus soluciones, si las hay, formarán conjuntos del espacio. Además, en el caso de dos variables los “conjuntos solución” estaban delimitados en el plano por rectas o por cónicas. Y para tres variables los “conjuntos solución” estarán delimitados en el espacio por planos o por cuádricas.

Inecuaciones lineales (o de primer grado) con tres variables

Podemos distinguir nuevamente cuatro tipos:

$$Ax + By + Cz + D > 0 \quad (1)$$

$$Ax + By + Cz + D < 0 \quad (2)$$

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

$$Ax + By + Cz + D \geq 0 \quad (3) \qquad Ax + By + Cz + D \leq 0 \quad (4)$$

Estas inecuaciones siempre tienen infinitas soluciones que forman “un semiespacio” determinado por el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ (suponemos $A \neq 0, B \neq 0$ o $C \neq 0$). Dicho semiespacio está formado por todos los puntos que quedan a uno de los lados del plano anterior. El plano asociado a la inecuación estará incluido en el conjunto solución si se trata de los casos (3) o (4) y no lo estará si se trata de los casos (1) o (2).

Para saber qué semiespacio incluye las soluciones, de los dos que determina el plano asociado, bastará elegir algún punto (cómodo) fuera de dicho plano y ver si cumple la inecuación o no la cumple. Si la cumple, el “conjunto solución” de la inecuación dada será todo el semiespacio donde esté el punto. En caso contrario, será el otro semiespacio.

Si el plano asociado $Ax + By + Cz + D = 0$ no pasa por el origen ($D \neq 0$), el punto más cómodo para probar será el propio origen. Pero si es $D = 0$, habrá que elegir otro punto como $(1, 0, 0)$, el $(0, 1, 0)$ o bien el $(0, 0, 1)$. El plano no puede pasar por el origen y por estos tres puntos a la vez, con lo cual alguno de ellos no estará en el plano y entonces el mismo servirá para probar en la inecuación. (Ver Sección 8.7).

Ejemplo: La inecuación $3x - 2y + 5z < 0$ tiene como conjunto solución uno de los semiespacios determinados por el plano asociado $3x - 2y + 5z = 0$. Como este plano pasa por el origen, probamos con el punto $(1, 0, 0)$ que no pertenece al plano (pues no cumple su ecuación) y al sustituirlo en la inecuación obtenemos $3 < 0$ (falso), luego no cumple la inecuación. En conclusión, el “conjunto solución” es el semiespacio que no incluye al punto $(1, 0, 0)$, de los dos que define el plano asociado (éste no incluido). Dicho semiespacio contiene al semieje negativo OX, al semieje positivo OY y al semieje negativo OZ (los tres sin incluir el origen).

Otro ejemplo: Si la inecuación fuese $-2y + 5z \leq 0$, el punto $(1, 0, 0)$ usado anteriormente no serviría porque está en el plano asociado $-2y + 5z = 0$ (y el origen tampoco sirve). En este caso usamos cualquiera de los otros puntos recomendados, por ejemplo el $(0, 1, 0)$ que no está en ese plano, el cual cumple la inecuación. Por tanto, en este caso el conjunto solución es el semiespacio donde se encuentra ese punto $(0, 1, 0)$, de los dos que determina el plano asociado (éste incluido). El plano asociado es perpendicular al OYZ y contiene al eje OX. Y el “conjunto solución” contiene al semieje positivo OY y al semieje negativo OZ (los dos con el origen incluido). (Nótese que en estos casos no podemos dibujar el conjunto solución, pero podemos hacernos una idea de cómo es).

Nota : El método usado se basa en que la función lineal $w = Ax + By + Cz + D$ se anula sobre el plano asociado a la inecuación, es positiva en todos los puntos de uno de los semiespacios y es negativa en todos los puntos del otro.

Inecuaciones cuadráticas (o de segundo grado) con tres variables

Son de grado dos en las tres variables y distinguimos también cuatro tipos, como en los casos anteriores. Una de ellos es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J > 0 \quad (\text{tipo 1})$$

y las otros tres corresponden a las relaciones $<$ (tipo 2), \geq (tipo 3) y \leq (tipo 4).

Como no hemos estudiado las cuádricas en forma totalmente general, sino solamente las cuádricas con ejes y planos de simetría paralelos o coincidentes a los de coordenadas, las inecuaciones cuadráticas que podremos aquí plantearnos serán de los cuatro tipos anteriores, pero donde los pri-

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

meros miembros carecen de términos en xy , en xz y en yz (o sea, tendrán $D = E = F = 0$, pero con $A \neq 0$, $B \neq 0$ o $C \neq 0$). (Ver Sección 8.8). Por tanto, serán del tipo simplificado:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G > 0} \quad (\text{tipo 1})$$

o de alguno de los otros tres tipos, según la relación de desigualdad que aparezca.

En efecto, la “ecuación asociada” $\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0}$ corresponderá a alguna de las cuádricas tratadas en la Sección 8.8 (cuádricas ordinarias en forma canónica u obtenidas por traslación, pero a veces la cuádrica podrá ser degenerada o imaginaria. (Ver algunos ejemplos en dicha Sección 8.8).

En muchos casos, el “conjunto solución” de la inecuación **será una o dos regiones del espacio, de las delimitados por la cuádrica asociada**, incluida la misma en los casos (3) o (4) y no incluida en los casos (1) o (2). Pero el “conjunto solución” también podrá ser vacío, solamente la propia cuádrica, todo el espacio menos los puntos de la cuádrica o bien todo el espacio \mathbb{R}^3 .

Por tanto, la búsqueda del “conjunto solución” pasa por identificar la cuádrica correspondiente a la “ecuación asociada” y luego probar con algún punto cómodo de alguna de las regiones del espacio delimitadas por dicha cuádrica.

Y si la cuádrica fuese imaginaria, la inecuación se cumplirá en todo el espacio (“conjunto solución” \mathbb{R}^3) o no habrá puntos en que se cumpla (“conjunto solución” vacío). Basta probar con el origen de coordenadas, por ejemplo, y se sabrá lo que ocurre.

En general, cuando la cuádrica asociada sea real, si la inecuación se cumple en una región, no se cumplirá en otra región próxima que esté separada de la anterior por la propia cuádrica, salvo que la cuádrica sea una “superficie cilíndrica parabólica degenerada en un solo plano (doble)”, análogo a lo que pasaba con las inecuaciones cuadráticas de dos variables, donde el conjunto solución era una o dos regiones de las definidas por una cónica real (y lo análogo a la posibilidad de que la cuádrica sea una “superficie cilíndrica degenerada en un solo plano”, en aquel caso era que la cónica fuese “una parábola degenerada en una sola recta”).

A los efectos de la búsqueda del “conjunto solución” de una inecuación cuadrática, cuya ecuación asociada sea una cuádrica ordinaria o degenerada, conviene saber lo siguiente:

- 1) Delimitan una sola región del espacio: Las “superficies esféricas” (o los “elipsoides”) degenerados en un solo punto. Basta probar con un punto diferente.
- 2) Delimitan dos regiones del espacio las siguientes cuádricas: “Superficies esféricas”, “elipsoides”, “hiperboloides de una hoja”, “paraboloides elípticos o de revolución”, “paraboloides hiperbólicos” y “superficies cilíndricas de revolución, elípticas o parabólicas” (todas cuádricas ordinarias). Además, las “superficies cilíndricas degeneradas en un solo plano (doble)”.
- 3) Delimitan tres regiones del espacio las siguientes cuádricas: “Hiperboloides de dos hojas”, “superficies cónicas elípticas o de revolución” y “superficies cilíndricas hiperbólicas” (todas cuádricas ordinarias). Además, las “superficies cilíndricas parabólicas degeneradas en dos planos paralelos”.
- 4) Delimitan cuatro regiones del espacio solamente las “superficies cilíndricas degeneradas en dos planos que se cortan según una recta”.

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Nota: El fundamento del procedimiento propuesto para resolver estas inecuaciones es el estudio de los signos de la función de tres variables

$$w = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G$$

La cual se anula obviamente sobre la cuádrlica asociada a la inecuación y mantiene signo constante en cada una de las regiones delimitadas por dicha cuádrlica (por ser función continua y ser dichas regiones “conexas por arcos”). Es más, puede demostrarse que para cuádrlicas como las mencionadas anteriormente dicha función cambia de signo al pasar de una de las regiones a la otra (en el caso de dos) o a la más próxima (en el caso de tres o cuatro), salvo si la cuádrlica es una “superficie cilíndrica degenerada en un solo plano” (en cuyo caso la función w sería exactamente el cuadrado de una función de primer grado). Por tanto, podremos determinar el conjunto solución en cualquiera de los casos que estemos tratando mediante la prueba de un solo punto que no esté en la cuádrlica (como hacíamos con las inecuaciones de primer y segundo grado con dos variables, y como hemos hecho con las inecuaciones de primer grado con tres variables).

Ejemplos:

1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 - 4 > 0$ tiene como cuádrlica asociada “la superficie esférica” de centro $(3, -1, 1)$ y radio 2 (su ecuación se obtiene quitando $>$ y poniendo $=$). De las dos regiones del espacio delimitadas por esa superficie esférica, es solución de la inecuación la región que no incluye al centro (la parte del espacio que queda por fuera de la superficie esférica, para un observador suficientemente alejado del centro), ya que este punto no cumple la inecuación. Y la superficie esférica no forma parte de la solución, porque el signo de la inecuación no incluye el $=$.

Si la inecuación tuviese el signo invertido ($<$ en vez de $>$), el “conjunto solución” sería la esfera de igual centro e igual radio sin incluir su superficie esférica.

2) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} + \frac{(z+1)^2}{5} - 1 \leq 0$ tiene como cuádrlica asociada “el elipsoide” de centro el punto $(1, -2, -1)$ y ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, siendo los semiejes del elipsoide $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}$ (su ecuación se obtiene quitando \leq y poniendo $=$). (Ver un elipsoide centrado en el origen y ejes de simetría los ejes de coordenadas en las Secciones 8.8 y 8.9). De las dos regiones del espacio delimitadas por el elipsoide, es solución la región que incluye al centro y está limitada por dicha superficie, quedando la misma incluida en la solución (observe que el centro cumple la inecuación y esta incluye el signo $=$).

Y si la inecuación tuviese el signo invertido (\geq en vez de \leq), el “conjunto solución” sería la región que queda por fuera del elipsoide, con este incluido).

3) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 \geq 0$ tiene como cuádrlica asociada “el hiperboloide de una hoja vertical” de centro el origen y ejes de simetría los de coordenadas, siendo $a = 1$, $b = 1$ (por tanto, es de revolución) y $c = 1$. (Ver uno análogo en las Secciones 8.8 y 8.9). De las dos regiones del espacio delimitadas por el hiperboloide, es solución la región que no incluye al centro (parte que no contiene al eje OZ), pues el centro, que es el origen de coordenadas, no cumple la inecuación. El hiperboloide forma parte de la solución, porque el signo de la inecuación incluye el $=$.

Y si la inecuación tuviese el signo invertido (\leq en vez de \geq), el “conjunto solución” sería la región que contiene al centro y al eje OZ, con el hiperboloide incluido.

4) $-\frac{x^2}{4} - (y - 2)^2 + \frac{(z+5)^2}{3} - 1 < 0$ tiene como cuádrlica asociada “el hiperboloide de dos hojas vertical” de centro $(0, 2, -5)$ y dos de los tres ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, siendo $a = 2$, $b = 1$ (luego no es de revolución) y $c = \sqrt{3}$. (Ver uno análogo, pero centrado en el origen y con ejes de simetría los ejes coordenados, en las Secciones 8.8 y 8.9). De las tres regiones del espacio delimitadas por el hiperboloide, es solución la región que incluye al centro (la parte del espacio que queda entre las dos hojas del hiperboloide), pues dicho punto cumple la inecuación. La cuádrlica no forma parte de la solución en este caso.

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Y si la inecuación tuviese el signo invertido ($>$ en vez de $<$), el “conjunto solución” estaría formado por las dos regiones que no incluyen al centro (la parte del espacio que queda por encima de la hoja superior y la parte que queda por debajo de la hoja inferior, ambas hojas no incluidas).

5) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 \geq 0$ tiene como cuádrica asociada “la superficie cónica vertical” de centro el origen y ejes de simetría los de coordenadas, con $a = 2$, $b = 3$ (luego no es de revolución) y $c = 1$. (Ver una análoga en las Secciones 8.8 y 8.9). De las tres regiones del espacio delimitadas por la superficie cónica, es solución la región que no contiene al eje principal de simetría, que es OZ, pero sí incluye a la propia superficie cónica. Obsérvese que ahora no nos sirve como punto de prueba el centro, que es el origen, pues se encuentra sobre la cuádrica; pero un punto cómodo como el $(1, 0, 0)$, que está fuera de la cuádrica en la región que no incluye al eje OZ, cumple la inecuación, luego esa región es el “conjunto solución”. Obsérvese que puntos como los $(0, 0, \pm 1)$, que están sobre las otras dos regiones (una que contiene al semieje OZ positivo y otra que contiene al OZ negativo), no cumplen la inecuación.

Y si la inecuación tuviese el signo invertido (\leq en vez de \geq), el “conjunto solución” estaría formado por esas dos regiones que contienen al semieje OZ positivo y al semieje OZ negativo, con la superficie cónica incluida.

6) $x^2 + y^2 - z - 4 < 0$ tiene como cuádrica asociada “el paraboloides de revolución vertical” de vértice $(0, 0, -4)$, que abre hacia OZ positivo y tiene eje de simetría OZ. (Ver uno análogo, pero de vértice el origen, en las Secciones 8.8 y 8.9). De las dos regiones del espacio que delimita el paraboloides, es solución la que incluye al origen y al semieje OZ positivo, con la cuádrica no formando parte del “conjunto solución” (en efecto, el origen cumple la inecuación).

Y si la inecuación tuviese el signo invertido ($>$ en vez de $<$), el “conjunto solución” sería la otra región del espacio, o sea, la que no contiene el semieje OZ positivo, con la cuádrica no incluida.

7) $x^2 - y^2 > 0$, que podemos escribir $(x + y) \cdot (x - y) > 0$, tiene como cuádrica asociada “la superficie cilíndrica vertical degenerada en dos planos verticales que se cortan” en este caso en el eje OZ (el $x + y = 0$ y el $x - y = 0$). (Se aconseja hacer un dibujo en perspectiva). De las cuatro regiones del espacio que delimita la cuádrica (en correspondencia con los cuatro ángulos rectos que forman las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$ en el plano OXY) son soluciones solamente las dos que contienen al eje OX (nótese que el punto $(1, 0, 0)$ cumple la inecuación, con lo cual la región que contiene la parte positiva del eje OX forma parte del “conjunto solución”; pero entonces, la región vecina que contiene la parte positiva del eje OY no forma parte del mismo; por la misma razón, la región que contiene la parte negativa del eje OX vuelve a formar parte del “conjunto solución”, y finalmente, la región vecina que contiene la parte negativa de OY tampoco forma parte del mismo). Y los puntos de la cuádrica no forman parte del “conjunto solución”, porque el símbolo de la inecuación no incluye el $=$.

Y si la inecuación tuviese el signo invertido ($<$ en vez de $>$) formarían el “conjunto solución” las dos regiones del espacio que contienen al eje OY, sin incluir la cuádrica.

8) $y^2 - 25 \geq 0$, que podemos escribir $(y + 5) \cdot (y - 5) \geq 0$, tiene como cuádrica asociada “la superficie cilíndrica vertical degenerada en dos planos paralelos” (el $y + 5 = 0$ y el $y - 5 = 0$). (Se aconseja hacer un dibujo en perspectiva). Pues bien, de las tres regiones del espacio que delimitan, son soluciones las dos laterales (la región que queda a la izquierda del primer plano citado, la cual no incluye al origen, y región que queda a la derecha del segundo plano, que tampoco incluye al origen; en efecto, el origen de coordenadas no cumple la inecuación). Ambos planos sí quedan incluidos en el “conjunto solución”.

INECUACIONES CON DOS Y TRES VARIABLES (de primer y segundo grado)

Y si la inecuación tuviese el signo invertido (\leq en vez de \geq), su “conjunto solución” sería la región vertical del espacio situada entre los dos planos paralelos (incluidos ambos), la cual sí incluye al origen y contiene a todo el plano OXZ.

NOTA IMPORTANTE: En muchas ocasiones no tendremos las inecuaciones en las formas dadas anteriormente, donde las correspondientes “ecuaciones asociadas” están ya en forma canónica o en forma reducida (o bien son fáciles de factorizar), pudiéndose entonces determinar las cuádricas asociadas con facilidad.

Es decir, la inecuación que tengamos estará muchas veces escrita en la forma general de la pág. 8 o alguna de sus variantes. Con lo cual tendremos que hacer las completaciones de cuadrados necesarias para convertir la ecuación asociada en la correspondiente ecuación reducida de la cuádrica y así poderla identificar.

Al respecto, si la ecuación asociada es $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$, tendremos que completar un cuadrado con la variable x si $A \neq 0$ y $D \neq 0$; tendremos que completar un cuadrado con la variable y si $B \neq 0$ y $E \neq 0$, y tendremos que completar un cuadrado con la variable z si $C \neq 0$ y $F \neq 0$.

Por ejemplo, la inecuación del ejemplo 4) de la pág. 9 podría haberse dado como

$$3x^2 + 12y^2 - 4z^2 - 48y - 40z - 40 < 0$$

Vemos que no hay que completar un cuadrado con la variable x (porque es $D = 0$); pero hay que completar un cuadrado con la variable y (pues es $B \neq 0$ y $E \neq 0$) teniéndose:

$$12y^2 - 48y = 12 \cdot (y^2 - 4y) = 12 \cdot [(y - 2)^2 - 4] = 12 \cdot (y - 2)^2 - 48$$

y hay que completar un cuadrado con la variable z (pues es $C \neq 0$ y $F \neq 0$) teniéndose:

$$-4z^2 - 40z = -4 \cdot (z^2 + 10z) = -4 \cdot [(z + 5)^2 - 25] = -4 \cdot (z + 5)^2 + 100$$

Así la ecuación asociada pasa a ser: $\boxed{3x^2 + 12(y - 2)^2 - 48 - 4(z + 5)^2 + 100 - 40 = 0}$.

O sea, $3x^2 + 12(y - 2)^2 - 4(z + 5)^2 + 12 = 0$, que pasando 12 al segundo miembro y dividiendo ambos miembros por -12 , nos da la ecuación reducida del “hiperboloide de dos hojas vertical” que allí considerábamos:

$$-\frac{x^2}{4} - (y - 2)^2 + \frac{(z+5)^2}{3} = 1$$
