ESPACIOS VECTORIALES

(Prerrequisitos: Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales)

Introducción

En la parte de las Matemáticas que se llama Álgebra Lineal, los conceptos más importantes son el de "espacio vectorial" y el de "aplicación lineal". Aquí veremos el primero y en la Sección siguiente (9.4) estudiaremos el segundo.

Existen "espacios vectoriales sobre el campo de los números reales" (utilizan los números reales como escalares; brevemente "espacios vectoriales reales") y "espacios vectoriales sobre el campo de los números complejos" (utilizan los números complejos como escalares; en forma breve "espacios vectoriales complejos"). Sabemos que los primeros no son los únicos verdaderos ("real" no es sinónimo de "verdadero" en el contexto de las Matemáticas) ni los segundos son "difíciles" ("complejo" aquí no significa "complicado", sino que utiliza los números complejos).

En esta Sección estudiaremos solamente los conceptos y propiedades principales de los "espacios vectoriales reales".

Concepto de espacio vectorial real

Se llama "espacio vectorial real" a cualquier conjunto V (cuyos elementos llamaremos "vectores", aunque no sean vectores geométricos) donde esté definida una operación que llamaremos "adición de vectores" (la cual debe cumplir las 5 propiedades que daremos a continuación) y donde exista una operación que llamaremos "multiplicación de un número real por un vector" (que debe cumplir las otras 5 propiedades que daremos después). Es importante destacar que los elementos del conjunto V, como veremos en muchos ejemplos, no tienen que ser vectores en el sentido geométrico del término. En todo lo que sigue usaremos letras latinas para designar "vectores" y letras griegas para representar números reales (que llamaremos también "escalares").

A) Propiedades que debe cumplir la operación "adición de vectores" en un espacio vectorial V:

1) La operación podrá actuar sobre cualesquiera dos vectores de V y dará siempre como resultado un único vector de V que dependerá de los dos que hayamos tomado (la operación se representa por $+$, la acción de aplicarla se llama "sumar vectores", los dos vectores donde actúe la operación se llamarán "sumandos" y el resultado de la misma se llama su "suma").
2) La operación será "asociativa", o sea $a + (b + c) = (a + b) + c$, para tres vectores cualesquiera de V (o sea, para sumar tres vectores a, b y c en ese orden, podemos obtener primero la suma de b y c, sumando luego a con ese resultado, o podemos sumar primero a y b para luego sumar el resultado correspondiente con c).
3) La operación será "conmutativa", o sea $a + b = b + a$, para dos vectores cualesquiera de V (el cambio de orden de los sumandos no influye en su suma).
4) Tiene que existir en V un "vector cero" que denotamos 0_V, de forma que $0_V + a = a$, para todo vector a del espacio V (0_V se llama "elemento neutro" de la adición de vectores).
5) Todo vector a de V posee un único "vector opuesto" en V, que denotaremos $-a$, de forma que la suma de ambos será el "vector cero" ($a + (-a) = 0_V$).

B) Propiedades que debe cumplir la operación "multiplicación de un número real por un vector" o bien "multiplicación de un escalar por un vector" en un espacio vectorial real V:

1) Dado un número real cualquiera α y un vector cualquiera v en V, esta operación dará siempre un único vector αv de V (llamado "producto de α por v").
2) El número real 1 multiplicado por cualquier vector a de V da como producto a. También, el número real -1 multiplicado por cualquier vector a de V da como producto $-a$, y el número real 0 multiplicado por cualquier vector a de V da 0_V.
3) Se debe cumplir $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha(\beta a)$, para cualesquiera reales α y β, así como para cualquier vector a de V.
4) Se debe cumplir $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, para cualesquiera reales α y β, así como para cualquier vector a de V.
5) Se debe cumplir $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, para cualquier real α y para cualesquiera vectores a y b de V.

Nota: Las propiedades $(-1) \cdot a = -a$ y $0 \cdot a = 0_V$ incluidas en el apartado 2) de las propiedades anteriores, son en realidad una consecuencia de las demás propiedades (sin embargo, las hemos incluido aquí por su importancia y por la analogía con $1 \cdot a = a$). Muchos textos dan solamente esta última, como propiedad definidora de un "espacio vectorial" junto con las propiedades 1) , 3) , 4) y 5).

Ejemplos:

1) El conjunto de los "vectores libres del espacio" es un ejemplo muy notable de "espacio vectorial real" (de este ejemplo salió el nombre de "espacio vectorial"). En efecto, podemos considerar la "suma de vectores libres" y el "producto de un número real por un vector libre" como las dos operaciones mencionadas anteriormente, las cuales cumplen las 10 propiedades obligatorias dadas. El "vector cero" es en este ejemplo el "vector libre cero", que tiene módulo cero, no tiene dirección y no tiene sentido, representado por $\vec{0}$. (Ver la Sección 8.2).

2) El conjunto de los "polinomios de coeficientes reales con una variable" es otro ejemplo importante de "espacio vectorial real". Aquí los "vectores" no son vectores geométricos sino polinomios. Y las operaciones del espacio son la "suma de polinomios" y el "producto de un número real por un polinomio", las cuales cumplen las 10 propiedades exigidas. El "vector cero" es el "polinomio cero" (cuyos coeficientes son todos 0).

3) El conjunto de las "matrices reales de un mismo tamaño $m \times n$" es otro ejemplo importante de "espacio vectorial real". Aquí los "vectores" son matrices. Y las operaciones del espacio vectorial son la "suma de matrices $m \times n$" y el "producto de un número real por una matriz $m \times n$", que cumplen las 10 propiedades. El "vector cero" es "la matriz nula de m filas y n columnas" que tiene todos sus elementos 0. (Ver la Sección 9.1).

4) El conjunto $\mathbb{R}^3$ de las "ternas de números reales" (x, y, z) es un "espacio vectorial real", considerando "la suma" así: $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d,\ b + e,\ c + f)$ y considerando el "producto de número real por vector" así: $\alpha(a, b, c) = (\alpha \cdot a,\ \alpha \cdot b,\ \alpha \cdot c)$. Con lo cual se cumplen las 10 propiedades. Aquí los "vectores" son ternas y el "vector cero" es la terna $(0, 0, 0)$. (Ver la Sección 8.2). Es similar al primer ejemplo (vectores libres del espacio), pero sustituyendo cada vector por sus coordenadas respecto a la base canónica $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

5) El propio conjunto de los “números reales” es un “espacio vectorial real”, usando “la suma de reales” y el “producto de reales” como las operaciones del espacio (cumplen las 10 propiedades). Aquí los “vectores” son números y el “vector cero” es el “número cero”.

6) El conjunto de los “números complejos” es un “espacio vectorial real”, usando “la suma de complejos” que da siempre complejo y usando el “producto de número real por número complejo” que da siempre número complejo, cumpliéndose las 10 propiedades dadas. El “vector cero” será el “complejo cero” ($0 + 0\,i$, en forma binómica). (Ver Sección 1.4).

7) El conjunto de los “números racionales” (enteros y fraccionarios) **no** es un “espacio vectorial real”, pues la “suma de racionales” cumple las 5 propiedades correspondientes pero el “producto de un número real por un número racional” **no da** en muchos casos un nuevo número racional, luego falla la propiedad 1) de ese producto (en efecto, cuando multiplicamos un real irracional por un número racional no nulo, el producto es siempre otro irracional y según esa propiedad 1) debería ser otra vez un número racional).

8) Otro conjunto que **no** es “espacio vectorial real” es el de las “matrices reales cuadradas” de orden n fijo, si tomamos la “multiplicación de matrices” en sustitución de la “adición de matrices” como primera operación. En efecto, se cumplirían las propiedades 1), 2) y 4) tomando la “matriz unitaria” en vez de la “matriz nula” (la “matriz unitaria” haría el papel de “vector cero” en este caso, pues es “elemento neutro” de la multiplicación de matrices), pero fallarían las propiedades 3) y 5), ya que el producto de matrices no es conmutativo y toda matriz cuadrada no posee “matriz inversa” (la “inversa” haría el papel de la “opuesta” en este caso). (Ver la Sección 9.1).

   Incluso, si tomamos el conjunto de las “matrices reales cuadradas de orden n fijo que tengan determinantes diferentes de cero” y tomamos la “multiplicación de matrices” en sustitución de la “adición de matrices”, dicho conjunto cumple ya la condición 5) pues toda matriz de este conjunto tendrá “matriz inversa”, pero sigue fallando la propiedad conmutativa, luego este conjunto de matrices, con las operaciones “multiplicación de matrices” y “multiplicación de un número real por una matriz” **no** es un “espacio vectorial real”.

9) Sin embargo, un conjunto que cumple las 5 propiedades de la “adición”, pero usando la “multiplicación” en su lugar, es $\mathbb{R} - \{0\}$ (reales no nulos). En efecto, el producto de dos reales no nulos da siempre un real no nulo (propiedad 1), el producto es asociativo y conmutativo (propiedades 2 y 3), el número 1 haría el papel del 0 ($1 \cdot a = a$, para todo real no nulo a , luego se cumple la propiedad 4) y todo real no nulo tiene inverso no nulo (el “inverso” sería lo análogo al “opuesto” en este caso, luego se cumple la propiedad 5). Entonces parece que el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ podría ser “espacio vectorial real” con la “multiplicación” sustituyendo a la “adición”, pero la propiedad 1) de la “multiplicación de un real por un vector” falla, pues tendría que cumplirse que “el producto de cualquier real por cualquier real no nulo sea otro real no nulo”, lo cual es falso porque “el producto del real cero por cualquier real no nulo siempre es cero”. Por tanto, $\mathbb{R} - \{0\}$ con las operaciones “multiplicación de reales no nulos” y “multiplicación de un número real cualquiera por un real no nulo” **no** es espacio vectorial real.

Dependencia lineal de vectores

Un concepto fundamental en “la teoría de espacios vectoriales” es el de “dependencia lineal”:

En un espacio vectorial V, se dice que "el vector v **es linealmente dependiente** de los vectores v_1, v_2, v_3, …. , v_n" si y sólo si existen escalares α_1, α_2, α_3, …. , α_n de modo que se cumpla

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$$

(también se dice que "el vector v es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3, …. , v_n").

Nota: En cualquier espacio V el "vector cero" siempre es "linealmente dependiente" de cualquier conjunto de vectores dados. Pues $0_v = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ (tomamos todos los escalares de la combinación lineal iguales al número cero).

Ejemplos:

1) En el espacio vectorial de los polinomios (ejemplo 2 anterior), el vector $3x^3 - 5x^2 + 8$ es "linealmente dependiente" de los vectores 1 , x , x^2 , x^3 y x^4. En efecto, el vector dado inicialmente es el resultado de multiplicar el primero de estos por 8, multiplicar el segundo por 0, multiplicar el tercero por -5, multiplicar el cuarto por 3, multiplicar el último por 0 y luego sumar todos esos productos obtenidos. En cambio, el mismo vector dado inicialmente **no** es linealmente dependiente de los vectores x^3 y x , porque no hay modo de obtener los términos $-5x^2$ y 8 de dicho vector a partir de los dos dados.

2) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ de las ternas (ejemplo 4 anterior), el vector $(-1, 0, 3)$ es "linealmente dependiente" de los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Pues multiplicando, el primero de estos por -1, multiplicando el segundo por 0, multiplicando el tercero por 3 y sumando los tres productos obtenidos, se obtiene el vector inicial.

   En cambio, el vector dado inicialmente "**no** es linealmente dependiente" de los vectores $(2, -3, 5)$ y $(1, 1, 1)$, pues si multiplicamos el primero por α, multiplicamos el segundo por β y sumamos ambos productos, se obtiene el vector $(2\alpha + \beta,\ -3\alpha + \beta,\ 5\alpha + \beta)$ que nunca podrá coincidir con el $(-1, 0, 3)$. En efecto, para que pudiesen coincidir, tendrían que cumplirse para algunos escalares α y β las ecuaciones $2\alpha + \beta = -1$; $-3\alpha + \beta = 0$; $5\alpha + \beta = 3$. Pero este es un sistema de ecuaciones lineales incompatible, ya que de las dos primeras ecuaciones se obtiene la solución única $\alpha = -1/5$ y $\beta = -3/5$, y estos valores no cumplen la tercera ecuación.

3) En el espacio vectorial de las matrices 2×3 (ejemplo 3 anterior, con $m = 2$ y $n = 3$), el vector $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ "es una combinación lineal" de los vectores $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, pues podemos comprobar que el primero es igual al segundo multiplicado 2 más el tercero multiplicado por -1. En cambio, el vector dado inicialmente **no** es una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, porque es imposible que el elemento de la primera fila y primera columna de la matriz dada inicialmente (que es 4) resulte multiplicando estas dos últimas por un α y por un β, para luego sumar las matrices obtenidas (en efecto, dicho elemento resultaría $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ y no 4).

Otros conceptos fundamentales de "la teoría de espacios vectoriales" son los de "conjunto linealmente dependiente de vectores" y "conjunto linealmente independiente de vectores":

En un espacio vectorial real V, se dice que "n vectores forman **un conjunto linealmente dependiente**" si alguno de los mismos es una combinación lineal de los restantes. (Se suele decir que "esos vectores forman un conjunto L.D.")

Ejemplo: El conjunto formado por las tres 3 matrices dadas en el ejemplo 3) de la página anterior, forman "un conjunto linealmente dependiente" en el espacio vectorial correspondiente. Pues hemos visto que la primera es una combinación lineal de las otras dos.

Nota: Basta que alguno de los n vectores sea la suma de varios otros o la diferencia de otros dos, para que el conjunto de todos esos vectores sea L.D., pues esa suma o diferencia siempre podrá extenderse a una combinación lineal de todos los restantes vectores, tomando escalares cero para los que no intervengan en la misma. E igual ocurre cuando alguno de los vectores sea igual o proporcional a otro o cuando entre los mismos esté el "vector cero" (en esos casos el conjunto de todos dichos vectores será L.D.).

Y se dice que en el espacio vectorial V "n vectores forman **un conjunto linealmente independiente**" si ninguno de los mismos es una combinación lineal de los restantes. (Se suele decir que "esos vectores forman un conjunto L.I."). Obviamente, lo contrario de L.I. es L.D.

TEOREMA FUNDAMENTAL: Si el conjunto de vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ es L.I. , los **únicos** escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ que cumplirán la relación $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$ serán $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Y recíprocamente, si ocurre esto último los vectores serán L.I.

El Teorema dado es cierto, pues si alguno de los valores reales que cumplen la relación dada fuese diferente de cero, el vector que lo acompañe en dicha relación podría despejarse y quedaría como una combinación lineal de los restantes vectores, con lo cual el conjunto sería L.D. (en contra de lo supuesto).

Y el Teorema recíproco también es cierto. O sea: Si los **únicos** escalares que cumplen la relación dada son todos de valor cero, el conjunto de vectores será L.I.

Pues si fuese L.D. habría alguno de esos vectores que sería combinación lineal de los demás. Y suponiendo que ese vector fuese el v_k (con k algún valor entre 1 y n), se tendría $v_k = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{k-1} \cdot v_{k-1} + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \beta_n \cdot v_n$, con lo cual se tendrá también

$$\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{k-1} \cdot v_{k-1} - v_k + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \beta_n \cdot v_n = 0_V$$

que es un modo de cumplirse la relación dada en el Teorema sin ser nulos todos los escalares que multiplican a los vectores dados (pues el escalar que acompaña a v_k es -1), contra lo supuesto.

Y claramente, lo dicho también es válido si $k = 1$ o si $k = n$.

Ejemplo: Los vectores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ (de módulo 1, en las direcciones de los tres ejes coordenados y con los sentidos positivos de dichos ejes) en el espacio vectorial V de todos los vectores libres, son un conjunto L.I. En efecto, ninguno de los tres puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos, ya que las combinaciones lineales de dos de esos vectores estarán solamente en el plano coordenado que los contenga y el tercer vector estará siempre fuera de dicho plano. O bien, aplicando el Teorema anterior, de $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$ se deduce $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, luego los vectores son L.I. (en efecto, el vector del primer miembro tiene coordenadas (α, β, γ) respecto a la base canónica del espacio y el vector cero tiene coordenadas $(0, 0, 0)$; con lo cual, si ambos vectores coinciden, sus coordenadas también tendrán que coincidir). Ver Sección 8.2.

Subespacios vectoriales

Veamos ahora el concepto fundamental de "subespacio vectorial" en un espacio vectorial dado:

Dado un espacio vectorial real V, **puede ocurrir** que una parte U de sus vectores constituyan a su vez un espacio vectorial real, utilizando las mismas operaciones "adición de vectores" y "multiplicación de un número real por un vector" que había en V (pero operando solamente con vectores de U). Pues bien, si U cumple esto, al ser subconjunto de V y utilizar en dicho subconjunto las mismas dos operaciones que teníamos en V, se dirá que "U es un **subespacio vectorial** de V".

Sin embargo, cualquier subconjunto U de V no tiene por qué ser espacio vectorial con las operaciones de V aplicadas a sus vectores, en cuyo caso **no sería** subespacio vectorial de V.

Ejemplos:

En el espacio vectorial V de los vectores libres del espacio, todos los vectores cuyas direcciones sean paralelas al plano OXY forman un espacio vectorial U utilizando las mismas dos operaciones que teníamos en V (para cada vector libre consideraremos siempre su representante fijo con origen en el origen de coordenadas O y dicho representante quedará entonces contenido en OXY). En efecto, vemos que la suma de dos vectores del plano OXY es siempre otro vector de dicho plano; podemos considerar que el vector cero, está en dicho plano representado por el propio origen de coordenadas; el opuesto de un vector del plano OXY está siempre en ese plano, y también el producto de un número real por un vector del plano OXY es siempre un vector de ese plano; además, las otras propiedades de un espacio vectorial se cumplen en U, porque se cumplían para todos los vectores de V, lo cual incluye a los de U . Por tanto, U es **un subespacio vectorial** de V.

Y, análogamente, todos los vectores de V cuyas direcciones sean paralelas a OXZ forman otro subespacio vectorial de V. Y todos los vectores de V cuyas direcciones sean paralelas a OYZ forman también un subespacio vectorial de V. Pero en V hay muchos otros subespacios, además de los nombrados: En general, todos los vectores cuyas direcciones sean la de una recta cualquiera y también todos cuyas direcciones sean paralelas a un plano cualquiera son subespacios de V.

Sin embargo, cualquier subconjunto U del espacio vectorial V considerado no tiene por qué ser un subespacio vectorial de V (basta que no incluya al origen, para que no sea subespacio vectorial; basta que la suma de dos de sus vectores no sea otro de sus vectores, para que no sea subespacio vectorial; basta que el opuesto de uno de sus vectores no esté en dicho subconjunto, para que no sea subespacio vectorial, y basta que el producto de un cierto número real por uno de sus vectores no esté en dicho subconjunto, para que no sea subespacio vectorial).

Por ejemplo, en el espacio V de los vectores libres de todo el espacio, el conjunto U de los que tengan su representante fijo de origen en O con su extremo situado sobre una determinada recta que no pase por O, **no** constituirán un subespacio vectorial de V. En efecto, U no incluye el vector cero (pues su representante fijo sería el propio origen O, que tiene extremo el propio origen, el cual no está sobre la recta mencionada). Además, es claro que la suma de dos vectores de U no quedaría en U y el producto de un número real diferente de 1 por un vector de U no quedaría en U (en particular, el opuesto de un vector de U no estaría en U).

¿Habrá alguna única condición que deba cumplir un subconjunto U de vectores, dentro de un espacio vectorial V, para que esté garantizado que ese subconjunto sea "un subespacio vectorial" de V? Pues sí. Es la siguiente:

TEOREMA: Un subconjunto no vacío U del espacio vectorial V es "subespacio de V" si y sólo si se cumple la condición siguiente: "Dados dos vectores cualesquiera de U, cualquier combinación lineal de dichos vectores pertenece a U"

En efecto, estarán en U: Todas las sumas de vectores de U; todos los productos de números reales por vectores de U; el vector cero de V (que sería el vector cero de U), y todos los opuestos de vectores de U. (Las propiedades restantes que deben cumplirse también para que U sea un espacio vectorial ya se cumplirán, simplemente, porque se cumplen para todos los vectores de V y los vectores de U están en V).

Nota: El subespacio vectorial más pequeño de V estará formado solamente por 0_V . Y el subespacio vectorial más grande de V es el propio V.

Ejemplos: En el espacio vectorial V de los vectores libres del espacio, donde tomábamos el subconjunto U de los vectores cuyas direcciones son paralelas al plano OXY, vemos que efectivamente, cualquier combinación lineal de dos vectores de U dará siempre otro vector de U, luego U es subespacio vectorial de V. Y lo mismo sucederá con los vectores libres que tengan la dirección de un recta cualquiera y también con los vectores cuyas direcciones sean paralelas a un plano cualquiera.

Vemos a continuación otros ejemplos de subconjuntos que son "subespacios vectoriales" y algunos que no lo son:

1) En el espacio vectorial V de las matrices reales de tamaño $m \times n$, todas las matrices que tengan la última columna de ceros, forman un subespacio U de V , porque al sumar matrices se suman los elementos de ambos sumandos que estén en las mismas posiciones, con lo cual, si los dos sumandos están en U, la matriz suma también estará en U, y porque al multiplicar un número real por una matriz, todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por dicho número, con lo cual, si la matriz tomada está en U, la matriz producto también estará en U; en conclusión, cualquier combinación lineal de matrices de U dará siempre nuevas matrices de U, luego U es un subespacio de V.
   Lo mismo ocurre si la columna de ceros es siempre la primera o si es siempre una misma columna intermedia. Igualmente ocurre si se trata del subconjunto de las matrices $m \times n$ donde una misma fila tiene todos sus elementos cero. (Pero estos no son los únicos subespacios de V).

2) En el mismo espacio V del ejemplo anterior, las matrices que tengan todos los elementos de la última columna iguales a 1, **no** forman un subespacio vectorial de V. Basta ver que el vector cero de V, que es la matriz nula, no está en el subconjunto de matrices dado.

3) En el espacio vectorial V de los vectores libres del espacio (donde habíamos dicho que el subconjunto de vectores con direcciones paralelas a un determinado plano forman un subespacio vectorial de V), los subconjuntos U de todos los vectores de V cuyos repre-

sentantes fijos con orígenes en O tengan sus extremos situados sobre un determinado plano que no pase por O, **no** serán subespacios vectoriales de V, porque entre sus vectores no se encontrará el vector cero.

Otro concepto muy importante en "la teoría de los espacios vectoriales" es el de "subespacio generado" por un conjunto de vectores:

TEOREMA: Dados n vectores de un espacio vectorial V, todos los vectores que puedan obtenerse haciendo combinaciones lineales diferentes con esos vectores dados, forman un subespacio vectorial U de V.

Este subespacio U se llama "subespacio generado" por los n vectores dados. Y esos n vectores dados constituyen lo que se llama "un conjunto generador" del subespacio vectorial U.

En efecto, si damos dos vectores cualesquiera u_1 y u_2 de U, cualquier combinación lineal de ambos, utilizando las propiedades del espacio V, podrá expresarse finalmente como una combinación lineal de los n vectores del "conjunto generador" de U, luego pertenece a U. Por eso U es un subespacio vectorial de V, según el Teorema dado en la página anterior.

Nota importante: Si damos otro conjunto de m vectores en V, el "subespacio generado" por estos vectores puede ser diferente a U o puede ser el mismo U. Es decir, que un mismo subespacio U puede ser generado por distintos "conjuntos generadores", que pueden tener el mismo número de vectores o diferente número de vectores. Y como V es subespacio vectorial de sí mismo, lo anterior se le puede aplicar a todo el espacio V.

Ejemplos:

1) En el espacio vectorial V de las ternas (x, y, z), "un conjunto generador" de todo el espacio (como subespacio vectorial de sí mismo) está formado por los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Pero "otro conjunto generador" está formado por esos vectores anteriores y otro vector más, como el $(1, -2, 3)$. En efecto, dado un vector cualquiera (a, b, c) de V, la combinación lineal $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ nos dará el vector (a, b, c), luego los 3 vectores dados inicialmente son "un conjunto generador" de V.
Pero, la combinación lineal $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + 0(1, -2, 3)$ también nos da el mismo vector arbitrario (a, b, c), luego los 4 vectores considerados son "otro conjunto generador" de V.
Y también el conjunto $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$ es "generador" del espacio V (siendo todos sus vectores distintos de los que aparecían en los anteriores "conjuntos generadores"), pues dado el vector arbitrario (a, b, c) existe alguna combinación lineal de los 3 vectores anteriores que nos dará este último. En efecto, si queremos que
$$\alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0) = (a, b, c)$$
tendrá que ser $\beta + \gamma = a$; $\alpha + \gamma = b$; $\alpha + \beta = c$ (sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, α, β y γ, con determinante de los coeficientes
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \text{ (obsérvese que las columnas son los vectores dados)}$$

Luego, por la Regla de Cramer, este sistema será compatible con solución única, obteniéndose la solución: $\alpha = (b + c - a)/2$; $\beta = (a + c - b)/2$ y $\gamma = (a + b - c)/2$. Pues bien, estos son los coeficientes de la combinación lineal buscada, con lo cual esta combinación lineal existirá para cualquier vector (a , b , c) dado.

2) En el espacio vectorial V de las matrices reales 2×2, el conjunto formado por las dos matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es "un conjunto generador" del subespacio vectorial U de todas las matrices que tienen la última fila de ceros, pues dada una matriz cualquiera de dicho subespacio, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la combinación lineal $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nos dará la matriz anterior.
Pero también será "un sistema generador" de U el conjunto formado por las 3 matrices $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En efecto, si queremos que se cumpla

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo la última matriz una cualquiera del subespacio vectorial U, los escalares α, β y γ tendrán que cumplir las ecuaciones $2\alpha - \beta + 3\gamma = a$; $-3\alpha + 4\beta + \gamma = b$, que es un sistema lineal de dos ecuaciones con 3 incógnitas $(\alpha , \beta , \gamma)$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & a \\ -3 & 4 & 1 & b \end{pmatrix}$. Ahora bien, como el menor de orden dos $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ es diferente de cero, los rangos de ambas matrices coinciden y valen 2. Con lo cual, por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Pero el número de incógnitas es mayor que el rango, luego será compatible indeterminado (infinitas soluciones). (Ver la Sección 9.2). Entonces las 3 matrices dadas, no sólo son "un sistema generador" de U, sino que cualquier vector de U se podrá obtener mediante infinitas combinaciones lineales a partir de dichas 3 matrices.

Bases de un espacio vectorial

Otro concepteo fundamental de "la teoría de espacios vectoriales" es el de "base" de un espacio:

Dado un espacio vectorial real V, se llama "una base del espacio V" a cualquier conjunto de vectores de V que sea "un conjunto generador de V" y que también sea "un conjunto linealmente independiente" en V.

Por tanto, si llamamos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a los vectores de una base del espacio vectorial V, cuando demos un vector cualquiera v de dicho espacio, habrá unos números reales únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de modo que $\boxed{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n}$. Y esos números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se llaman "las coordenadas del vector v respecto a la base dada".

Es claro que las coordenadas deben existir, porque v siempre se podrá escribir como una combinación lineal de los vectores de la base dada (ya que la misma es "un conjunto generador del espacio V").

Pero que sean únicas esas coordenadas, es una consecuencia de que la base dada es también "un conjunto L.I." de V. En efecto, si hubiesen otras cooordenadas $\alpha'_1 , \alpha'_2 , \ldots , \alpha'_n$ para el mismo vector v, se podría escribir $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \cdots + \alpha'_n v_n$, con lo cual aplicando propiedades que se cumplen en V, será también

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)v_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n)v_n = 0_V$$

y el Teorema Fundamental de la pág. 5 nos dice que la única posibilidad de que esto se cumpla es que sean $\alpha_1 - \alpha'_1 = 0$; $\alpha_2 - \alpha'_2 = 0$; … ; $\alpha_n - \alpha'_n = 0$, con lo cual será $\alpha_1 = \alpha'_1$, $\alpha_2 = \alpha'_2$, … , $\alpha_n = \alpha'_n$.

Ejemplo: En el espacio V de las ternas (x, y, z) el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es "una base de V", pues sabemos que cualquier vector de V se puede obtener haciendo una combinación lineal de los 3 vectores dados, con lo cual "son un conjunto generador de V". Y además "el citado conjunto de vectores es L.I.", pues la relación $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$ solamente se cumple para los valores $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$.

Esta base es la más importante de V y se llama "la base canónica" (clásica) de dicho espacio.

El espacio V anterior es el conjunto que llamamos $\mathbb{R}^3$ (conjunto de las coordenadas de todos los puntos del espacio ordinario, fijado un sistema de referencia cartesiano), que se corresponde con el conjunto de los vectores libres del espacio, porque dado un vector libre cualquiera, su representante fijo con origen en el origen del sistema de coordenadas elegido, tendrá un punto extremo con unas coordenadas únicas, que son un elemento de $\mathbb{R}^3$. Y la base canónica corresponde a los puntos situados en las partes positivas de los 3 ejes de coordenadas y a distancia 1 del origen (que son los extremos de los vectores unitarios $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ cuando elegimos para esos vectores como origen común el origen de coordenadas, los cuales son a su vez "la base canónica" del espacio vectorial de los vectores libres del espacio, que llamaremos V_3 para distinguirlo de $\mathbb{R}^3$).

De la definición de "base del espacio" se deduce que ninguno de los vectores de una base puede ser el vector cero del espacio (pues hemos dicho que ese vector es linealmente dependiente de los demás y entonces el conjunto de vectores no sería L.I.).

También se deduce de la definición de base, que si agregásemos a sus n vectores uno más del espacio, el nuevo conjunto de $n+1$ vectores ya no será L.I. (pues ese vector agregado es con seguridad linealmente dependiente de los anteriores, ya que la base que teníamos era "un conjunto generador" del espacio), con lo cual el nuevo conjunto de $n+1$ vectores ya no será una base del espacio.

Y también se deduce de la definición de base, que si quitásemos uno de los vectores de una base de n vectores, el conjunto obtenido de $n-1$ vectores ya no sería "generador" de todo el espacio (por ejemplo, no podría generarse el vector quitado; ya que en caso contrario, ese vector habría sido combinación lineal de los demás, cosa que no podrá ocurrir al ser la base dada "un conjunto L.I."). Por tanto, el nuevo conjunto de vectores ya no sería una base del espacio.

De las dos últimas observaciones se concluye que **el número de vectores de una base del espacio debe ser algo importante de dicho espacio**, pues aumentar o disminuir el número de vectores de cierta base conduce a que ya **no** tengamos otra base. Pero, ¿qué relación hay entre el número de vectores de dos bases completamente distintas del espacio? El Teorema siguiente nos da la respuesta:

> TEOREMA FUNDAMENTAL: Todas las bases de un espacio vectorial poseen igual número de vectores. Dicho número se llama "la dimensión del espacio vectorial".

Por eso decimos que la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ de las ternas de números reales es 3, ya que la base canónica de este espacio posee 3 vectores y según este Teorema todas las demás bases tendrán también 3 vectores.

Y podemos decir que los vectores libres del espacio son un espacio vectorial V_3 de dimensión 3, ya que su base canónica $\{\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\}$ tiene también 3 vectores, luego todas las demás bases tendrán también 3 vectores. En este espacio, basta tomar 3 vectores “no coplanarios” (que no estén en un mismo plano) para que tengamos una base del espacio.

Nota 1: Lo dicho para un espacio vectorial V vale, obviamente, para cualquiera de sus subespacios vectoriales, puesto que cada uno es también un espacio vectorial real. Por tanto, habrá distintas bases (con el mismo número de elementos) para cada subespacio U de V, o sea que cada subespacio U tendrá su propia dimensión, la cual tendrá que ser menor que la dimensión del espacio V, salvo que U y V coincidan. La dimensión del subespacio vectorial más pequeño, U $= \{0_V\}$, es cero (porque carece de base, ya que su único vector es linealmente dependiente).

Nota 2: Se puede decir que “la dimensión de un espacio vectorial es el **número máximo** de vectores linealmente independientes de dicho espacio”. Y también puede decirse que “la dimensión de un espacio vectorial es el **número mínimo** de vectores generadores del espacio”

Otros ejemplos:

1) El espacio $M_{m\times n}$ de las matrices reales $m \times n$ es de dimensión $m \cdot n$, pues la base canónica de este espacio está formada por matrices de ese tamaño con ceros en todos los elementos menos en uno de ellos que valdrá 1, el cual ocupa todas las posiciones posibles al cambiar de matriz (las posiciones del 1 se corresponden con el número de elementos de una matriz de ese tipo, que son $m \cdot n$). Así, el espacio $M_{2\times 3}$ de las matrices 2×3 tiene como base canónica el conjunto de las 6 matrices siguientes:
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2) El espacio $R_n[x]$ de los polinomios de coeficientes reales en la variable x cuyos grados no pasen de n, tiene dimensión $n+1$, pues su base canónica está formada por los $n+1$ polinomios $1, x, x^2, x^3, \ldots.. , x^n$.

3) El espacio $R[x]$ de todos los polinomios de coeficientes reales tiene dimensión infinita, pues su base canónica incluye las infinitas potencias de la variable x con exponentes los números naturales: $1, x, x^2, x^3, \ldots. , x^n, \ldots..$

4) El espacio $\mathbb{R}$ de los números reales tiene dimensión 1, pues su base canónica es el número 1 (cualquier número real a es igual a $\alpha \cdot 1$, tomando $\alpha = a$).

5) El espacio $\mathbb{C}$ de los números complejos tiene dimensión 2, pues su base canónica es $\{1, i\}$ (ya que todos los números complejos admiten la forma binómica $a + bi$, luego son combinaciones lineales de 1 e i, tomando $\alpha_1 = a$ y $\alpha_2 = b$).

6) El espacio $\mathbb{R}^2$ (de los pares de números reales) y el espacio V_2 (de los vectores libres de un plano) son ambos de dimensión 2, pues la base canónica del primero está formada por $(1,0)$ y $(0,1)$, y la base canónica del segundo es $\{\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\}$.

Cambios de coordenadas en un espacio vectorial real

Cuando tengamos una base $\mathcal{B}$ cualquiera en un espacio vectorial V de dimensión n, todo vector de V tendrá n escalares asociados (números reales) que lo definen mediante la correspondiente combinación lineal de los vectores de la base. Sabemos que dichos escalares son **únicos** para cada vector v dado en V y se llaman "las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}$". O sea, tendremos $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, donde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y las coordenadas de v respecto a $\mathcal{B}$ son $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Y si damos otra base $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ en el mismo espacio V (que tendrá obligatoriamente el mismo número de vectores), el mismo vector v tendrá otras coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$, que podemos llamar $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$, de modo que $v = \alpha'_1 v'_1 + \alpha'_2 v_2 + \cdots + \alpha'_n v'_n$.

Ejemplos:

1) En el espacio $\mathbb{R}^3$ de las ternas de números reales, las coordenadas del vector $v = (-1, 0, 3)$ respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ son -1, 0 y 3 (la base canónica de este espacio tiene la ventaja sobre otras bases de que las coordenadas que posea un vector cualquiera (a, b, c) coinciden con las componentes a, b y c de dicho vector).
   Pero otra base del espacio $\mathbb{R}^3$ es $\mathcal{B}' = \{(2, 0, -1), (0, 3, 2), (1, -1, 0)\}$. En efecto, "estos vectores son un conjunto L.I.", ya que la matriz cuadrada de orden 3 cuyas columnas tengan como elementos las componentes de los vectores dados, tiene determinante 7, distinto de cero (lo cual prueba que una relación como $\alpha(2, 0, -1) + \beta(0, 3, 2) + \gamma(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$ implicará la solución única $\alpha = \beta = \gamma = 0$; pues el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $2\alpha + \gamma = 0$; $3\beta - \gamma = 0$; $-\alpha + 2\beta = 0$ será de Cramer y su única solución será la trivial). Pero entonces, "el subespacio generado" por esos vectores será de dimensión 3, luego tendrá que ser todo $\mathbb{R}^3$; por tanto, también esos tres vectores son "un conjunto generador" de todo el espacio vectorial que estamos considerando (y al ser también "un conjunto L.I.", constituyen otra base de dicho espacio).
   Pues bien, las coordenadas del mismo vector $v = (-1, 0, 3)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ serán los números reales α, β y γ que cumplan $(-1, 0, 3) = \alpha(2, 0, -1) + \beta(0, 3, 2) + \gamma(1, -1, 0)$. Entonces esos valores serán solución del siguiente sistema lineal no homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: $2\alpha + \gamma = -1$; $3\beta - \gamma = 0$; $-\alpha + 2\beta = 3$, que también es de Cramer, pues su matriz de coeficientes es la misma del sistema homogéneo anterior y su determinante vale 7). Por tanto, el sistema de ecuaciones será compatible con solución única, siendo los valores de las incógnitas $\alpha = -11/7$; $\beta = 5/7$; $\gamma = 15/7$. Entonces, las nuevas coordenadas del mismo vector $v = (-1, 0, 3)$ respecto a la nueva base $\mathcal{B}'$ son $-11/7$, $5/7$ y $15/7$, que no se parecen en nada a las anteriores coordenadas del mismo vector.

2) En el espacio $R_3[x]$ de los polinomios de coeficientes reales en la variable x hasta el grado 3 como máximo, las coordenadas del vector $3x^3 - 2x + 8$ respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ son $(8, -2, 0, 3)$. Y las coordenadas de ese mismo vector respecto de la nueva base $\mathcal{B}' = \{x^3 - x,\ 2x - 1,\ -4x^2,\ x + 2\}$ serán $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, de modo que se cumpla:
$$3x^3 - 2x + 8 = \alpha(x^3 - x) + \beta(2x - 1) + \gamma(-4x^2) + \delta(x + 2)$$
   Haciendo operaciones en el segundo miembro, la identidad anterior se transforma en:
$$3x^3 - 2x + 8 = \alpha x^3 - 4\gamma x^2 + (-\alpha + 2\beta + \delta)x + (-\beta + 2\delta)$$
   Y el principio de identidad de polinomios establece que entonces tendrá que ser:
$$\alpha = 3\ ;\ -4\gamma = 0\ ;\ -\alpha + 2\beta + \delta = -2\ ;\ -\beta + 2\delta = 8$$
   (sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas, que es también de Cramer porque el determinante de la matriz de sus coeficientes puede comprobarse que vale 20 y cuya solución única es $\alpha = 3$; $\beta = -6/5$; $\gamma = 0$; $\delta = 17/5$). Por tanto, las coordenadas del vector dado $3x^3 - 2x + 8$ respecto a $\mathcal{B}'$ son $(3, -6/5, 0, 17/5)$, diferentes a las anteriores.

   Nota: $\mathcal{B}'$ es base del espacio porque tiene 4 vectores que son L. I. y todo el espacio es de dimensión 4. Y son L.I. porque de la relación

$$\alpha(x^3-x)+\beta(2x-1)+\gamma(-4x^2)+\delta(x+2)=0x^3+0x^2+0x+0$$

se deducen los únicos valores $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, precisamente porque es de Cramer el sistema al que se llega, que es el mismo que resolvimos anteriormente pero con segundos miembros todos cero.

3) En el espacio M_{2x2} de las matrices reales de 2 filas y 2 columnas, el vector $v=\begin{pmatrix}3&0\\-1&4\end{pmatrix}$ posee las coordenadas $\left(\frac{14}{12}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{17}{12}\ ,\ \frac{11}{12}\right)$ respecto a la base $\mathcal{B}$ del espacio cuyos vectores son $v_1=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-2\end{pmatrix}$ y $v_4=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$. Pueden obtenerse dichas coordenadas poniendo que sea $v=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4$, lo cual conduce al sistema lineal de ecuaciones $-\alpha-\gamma+3\delta=3$; $2\alpha-2\beta+\gamma-\delta=0$; $2\gamma+2\delta=-1$; $\alpha+\beta-2\gamma=4$, el cual es nuevamente de Cramer con determinante de los coeficientes $\Delta=36$, obteniéndose la solución única $\alpha=14/12$; $\beta=0$; $\gamma=-17/12$; $\delta=11/12$. Pero también podemos comprobar las coordenadas dadas, efectuando la correspondiente combinación lineal con las matrices de la base.

En cambio, el mismo vector v posee coordenadas $\left(\frac{105}{49}\ ,\ \frac{77}{49}\ ,-\frac{14}{49}\ ,\ \frac{14}{49}\right)$ respecto a la base $\mathcal{B}'$ del espacio cuyos vectores son $v'_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$, $v'_2=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}$, $v'_3=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}$ y $v'_4=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$. Se comprueba efectuando la correspondiente combinación lineal para ver que resulta el vector v dado:

$$\frac{105}{49}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}+\frac{77}{49}\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}-\frac{14}{49}\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}+\frac{14}{49}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&4\end{pmatrix}$$

En efecto, $\frac{105}{49}+\frac{28}{49}+\frac{14}{49}=\frac{147}{49}=3$; $-\frac{105}{49}+\frac{77}{49}-\frac{14}{49}+\frac{42}{49}=\frac{0}{49}=0$; $\frac{105}{49}-\frac{154}{49}=-\frac{49}{49}=-1$ y $\frac{210}{49}-\frac{42}{49}+\frac{28}{49}=\frac{196}{49}=4$.

La pregunta natural ahora es ¿hay algún modo general de calcular las nuevas coordenadas de un vector en función de las coordenadas iniciales del mismo vector, cuando se hace un cambio de base en el espacio, sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales como los vistos anteriormente? El siguiente Teorema establece que sí lo hay:

Llamemos $(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots,\alpha_n)$ a las coordenadas de un vector cualquiera v del espacio V, de dimensión n, respecto de la base $\mathcal{B}=\{v_1\,,v_2\,,\ldots,v_n\}$ y sean $(\alpha'_1\,,\alpha'_2\,,\ldots,\alpha'_n)$ las coordenadas del mismo vector v respecto a otra base $\mathcal{B}'=\{v'_1\,,v'_2\,,\ldots,v'_n\}$ del mismo espacio.

Sean también $(\alpha'_{11}\,,\alpha'_{12}\,,\ldots,\alpha'_{1n})$ las coordenadas del vector v_1 de la base $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{B}'$; sean $(\alpha'_{21}\,,\alpha'_{22}\,,\ldots,\alpha'_{2n})$ las coordenadas del vector v_2 de la base $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{B}'$; …. , y sean $(\alpha'_{n1}\,,\alpha'_{n2}\,,\ldots,\alpha'_{nn})$ las coordenadas del vector v_n de la base $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{B}'$. Estas últimas coordenadas son los elementos de las n filas de una matriz cuadrada de orden n, que podemos llamar A.

TEOREMA: Se tiene entonces la relación matricial

$$(\alpha'_1\ \ \alpha'_2\ldots\ \alpha'_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ldots\ \alpha_n)\cdot A$$

válida para todo vector v del espacio V. Se le llama "la ecuación matricial del cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ en el espacio V".

Y la matriz A se llama "matriz del cambio de base" de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en V.

De modo que, dadas las coordenadas de un vector cualquiera v respecto a la base $\mathcal{B}$ (que no tiene por qué ser la base canónica del espacio V), basta efectuar el producto de matrices del segundo miembro de la "ecuación del cambio de coordenadas" para tener las coordenadas del mismo vector v respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Ejemplo: Tomemos de nuevo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ de todas las ternas de números reales. La base canónica del espacio hemos dicho que es $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y las coordenadas del vector $v = (-1,0,3)$ respecto a esta base son $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 3$. Tomemos la nueva base $\mathcal{B}' = \{(2,0,-1),(0,3,2),(1,-1,0)\}$ (ya utilizada en el ejemplo 1 de la pág. 12), de forma que en ese ejemplo habíamos calculado las nuevas coordenadas del mismo vector v respecto a esta base $\mathcal{B}'$, las cuales eran $\alpha'_1 = -11/7$, $\alpha'_2 = 5/7$ y $\alpha'_3 = 15/7$.

Si calculamos ahora las coordenadas del vector $v_1 = (1,0,0)$ respecto a la base $\mathcal{B}'$, de modo análogo a como lo hicimos con el vector v, resultan $\alpha'_{11} = 2/7$, $\alpha'_{12} = 1/7$ y $\alpha'_{13} = 3/7$. Calculando también las coordenadas del vector $v_2 = (0,1,0)$ respecto a la base $\mathcal{B}'$, resultan $\alpha'_{21} = 2/7$, $\alpha'_{22} = 1/7$ y $\alpha'_{23} = -4/7$. Y calculando las coordenadas del vector $v_3 = (0,0,1)$ respecto a la base $\mathcal{B}'$, resultan $\alpha'_{31} = -3/7$, $\alpha'_{32} = 2/7$ y $\alpha'_{33} = 6/7$. (Los sistemas de ecuaciones a resolver en los 3 casos son como el sistema que se resolvió en el ejercicio 1 de la pág. 12 para hallar las coordenadas nuevas del vector v que habíamos dado, pero cambiando los segundos miembros de las ecuaciones, que serán ahora las componentes del vector de la base $\mathcal{B}$ que consideremos en cada caso).

Entonces la matriz A que menciona el Teorema anterior será: $A = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & 1/7 & -4/7 \\ -3/7 & 2/7 & 6/7 \end{pmatrix}$

(nótese que las coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$ de los 3 vectores de la base canónica $\mathcal{B}$ son los elementos de las **3 filas** de esa matriz).

Pues bien, podemos comprobar efectuando el producto de matrices que $(-11/7 \;\; 5/7 \;\; 15/7) = (-1 \;\; 0 \;\; 3) \cdot A$, como dice el Teorema.

E igual ocurre para cualquier otro vector dado (a,b,c): Sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ serán $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ y $\alpha_3 = c$, mientras que sus coordenadas respecto a la nueva base $\mathcal{B}'$ que habíamos dado serán los elementos de la matriz producto siguiente

$$(a \;\; b \;\; c) \cdot A = \left(\frac{2}{7}a + \frac{2}{7}b - \frac{3}{7}c \qquad \frac{1}{7}a + \frac{1}{7}b + \frac{2}{7}c \qquad \frac{3}{7}a - \frac{4}{7}b + \frac{6}{7}c\right)$$

Es decir, $\boxed{\alpha'_1 = \frac{2}{7}a + \frac{2}{7}b - \frac{3}{7}c}$, $\boxed{\alpha'_2 = \frac{1}{7}a + \frac{1}{7}b + \frac{2}{7}c}$ y $\boxed{\alpha'_3 = \frac{3}{7}a - \frac{4}{7}b + \frac{6}{7}c}$.

Obsérvese que para $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$ se obtienen coordenadas $(2/7, 1/7, 3/7)$ que son efectivamente las nuevas coordenadas del vector $(1,0,0)$. Y así mismo podemos comprobar las nuevas coordenadas de $(0,1,0)$, las de $(0,0,1)$ y las de $v = (-1,0,3)$. Para este último, haciendo $a = -1$, $b = 0$ y $c = 3$, obtenemos $\left(-\frac{2}{7} - \frac{9}{7}, -\frac{1}{7} + \frac{6}{7}, -\frac{3}{7} + \frac{18}{7}\right) = \left(-\frac{11}{7}, \frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

Nota: Aquí hemos usado, como primera base $\mathcal{B}$, la canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ (pero lo hemos hecho por comodidad, ya que así teníamos las coordenadas del vector v respecto a la misma, sin necesidad de estarlas calculando). Pero $\mathcal{B}$ podría haber sido cualquier base (como lo es $\mathcal{B}'$) y en muchos casos los vectores del espacio se darán a través de sus coordenadas respecto a esa base $\mathcal{B}$ (con lo cual no habría que calcularlas) y lo que querremos saber son sus coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$. Pero para eso necesitaremos conocer la matriz A y si no la tuviésemos habrá que calcular las coordenadas de todos los vectores de $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{B}'$ (lo cual puede ser tedioso, pues implica cada vez resolver un sistema de Cramer como los vistos anteriormente).

MUY IMPORTANTE: La matriz A del Teorema anterior tendrá determinante diferente de cero, pues sus filas son las coordenadas de los vectores v_1, v_2, …. , v_n de la base $\mathcal{B}$ inicial respecto a la nueva base $\mathcal{B}'$, luego esas filas serán linealmente independientes entre sí (si dichos vectores son L.I., también lo serán sus coordenadas respecto a cualquier base del espacio, puesto que una combinación lineal entre dichas coordenadas implicaría la misma combinación entre los vectores, incompatible con que formen una base del espacio). Por tanto, A admite inversa. Entonces, multiplicando por A^{-1} (por la derecha) ambos miembros de la igualdad dada en el Teorema de la pág. 13, se tendrá:

$$(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n) = (\alpha'_1 \ \ \alpha'_2 \ \ldots \ \alpha'_n) \cdot A^{-1}$$

nueva "ecuación matricial" que nos permite obtener las coordenadas de un vector cualquiera respecto a la base $\mathcal{B}$, partiendo de las coordenadas del mismo vector respecto a la base $\mathcal{B}'$ (o sea, el proceso inverso del anterior, donde se podían obtener las coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$ a partir de las coordenadas respecto a $\mathcal{B}$).

Lo cual nos dice entonces que las coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ de los vectores de la base $\mathcal{B}'$ serán los elementos de las filas de la matriz A^{-1}(así como las coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$ de los vectores de la base $\mathcal{B}$ eran los elementos de las filas de la matriz A).

Por último, habíamos dicho en el Teorema de la pág. 13 que la matriz A se llama "matriz del cambio de base" de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, con lo cual A^{-1} se llamará "matriz del cambio de base" de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Ahora otras preguntas lógicas son: Cuando tengamos una matriz cuadrada de orden 3 cualquiera, cuyo determinante sea diferente de cero, ¿podremos siempre interpretarla como una cierta "matriz de cambio de base" en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ o en un espacio cualquiera V de dimensión 3?

Y ¿pasará lo mismo cuando la matriz dada sea de orden n, con determinante distinto de cero, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ u otro espacio V de dimensión n?

La respuesta a la primera pregunta es sí, pues en el caso de orden 3, las 3 filas de la matriz A dada pueden siempre considerarse las coordenadas de los vectores de la base canónica $\mathcal{B}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ respecto a otra cierta base $\mathcal{B}'$ del mismo espacio. Y esto es generalizable a $\mathbb{R}^n$.

Pero, ¿podremos determinar esa otra base $\mathcal{B}'$? Sí, porque podremos calcular la matriz inversa A^{-1} y recordar que sus filas incluyen las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto a la base canónica $\mathcal{B}$, con lo cual conoceremos perfectamente esos vectores, tanto en $\mathbb{R}^3$ como en $\mathbb{R}^n$ (pues sus componentes serán directamente sus coordenadas).

Y en el caso de un espacio cualquiera V de dimensión 3 (o de dimensión n), **elegida una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ cualquiera**, siempre podremos considerar que las filas de la matriz A dada son las coordenadas de los vectores de dicha base respecto de otra cierta base $\mathcal{B}'$ del mismo espacio. Y, calculada la matriz A^{-1}, tendremos en sus filas las coordenadas de los vectores de esa base $\mathcal{B}'$ desconocida, respecto a la base $\mathcal{B}$ elegida inicialmente, con lo cual esos vectores v'_1 , v'_2 y v'_3 (o bien v'_1 , v'_2 , … , v'_n si la dimensión es n) serán perfectamente calculables efectuando las combinaciones lineales respectivas con los vectores de la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo determinante vale 1.

Podremos interpretar en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, que A es "la matriz del cambio de base" de la base canónica $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a otra cierta base $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$, siendo los elementos de sus 3 filas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto a dicha base $\mathcal{B}'$. Entonces, dicha matriz sirve para calcular coordenadas respecto a $\mathcal{B}'$ de cualquier vector dado respecto a la base canónica $\mathcal{B}$, usando la ecuación matricial $(\alpha'_1\ \ \alpha'_2\ \ \alpha'_3) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3) \cdot A$.

Y hemos dicho que las coordenadas de los vectores de esta base $\mathcal{B}'$ respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ serán los elementos de las filas de la matriz inversa A^{-1}.

Calculando esta inversa, resulta $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ (Ver Sección 9.1).

Por tanto, los vectores de la base $\mathcal{B}'$ serán

$$v'_1 = (-5,-5,3) \ \ ; \ \ v'_2 = (2,2,-1) \ \ ; \ \ v'_3 = (-6,-5,3)$$

porque sus coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ serán directamente sus componentes, ya que suponemos que $\mathcal{B}$ es la base canónica. Y la matriz A^{-1} sirve para calcular coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ de cualquier vector dado en función de la base $\mathcal{B}'$, mediante la ecuación matricial

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3) = (\alpha'_1\ \ \alpha'_2\ \ \alpha'_3) \cdot A^{-1}$$

En efecto, el vector v'_1 tiene coordenadas $(1,0,0)$ respecto a $\mathcal{B}'$ y al multiplicar la matriz fila $(1 \quad 0 \quad 0)$ por A^{-1} resulta la primera fila de esta matriz, que son las coordenadas de v'_1 respecto a la base canónica (coincidentes con sus propias componentes); análogamente, los vectores v'_2 y v'_3 tienen coordenadas $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respecto a $\mathcal{B}'$ y al hacer los correspondientes productos de matrices filas por A^{-1} resultan las filas segunda y tercera de esa matriz; eso corrobora que las coordenadas de los vectores v'_1, v'_2, v'_3 respecto a $\mathcal{B}$ aparecen en las tres filas de la matriz A^{-1}.

Otro ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo determinante vale 1, como puede comprobarse (se toma una matriz de determinante 1 para que su matriz inversa sea más cómoda de calcular por tener elementos enteros, pero en modo alguno esto es una restricción obligatoria).

Queremos interpretarla como "matriz de cambio de base" de la base canónica $\mathcal{B}$ a otra base $\mathcal{B}'$, en el espacio vectorial M_{2x2} de todas las matrices reales de 2 filas y 2 columnas (que es de dimensión 4).

Recordemos que la base canónica $\mathcal{B}$ de este espacio está formada por los cuatro vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que al ser el espacio vectorial M_{2x2} de dimensión 4, cualquier "matriz de cambio de base" en dicho espacio será cuadrada de orden 4 con determinante diferente de cero como la dada (en general, para un espacio V de dimensión n, las "matrices de cambio de base" serán cuadradas de orden n, con determinante diferente de cero).

Entonces tomamos los elementos de la primera fila de la matriz dada como las coordenadas de v_1 respecto de esa cierta base $\mathcal{B}'$ del espacio M_{2x2} que determinaremos luego. O sea que tendremos, $v_1 = 2v'_1 + 0v'_2 + (-1)v'_3 + 0v'_4$, donde $\mathcal{B}' = \{v'_1\,, v'_2\,, v'_3\,, v'_4\}$ es esa otra base.

Y de modo análogo, los elementos de las filas 2ª, 3ª y 4ª de A serán las coordenadas respectivas de los vectores v_2 , v_3 y v_4 , respecto de $\mathcal{B}'$.

Así, la "ecuación matricial del cambio de coordenadas" de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ será:

$$(\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \alpha'_3 \quad \alpha'_4) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) \cdot A$$

donde la "matriz fila" del segundo miembro tendrá como elementos las coordenadas de cualquier matriz 2x2 (vector del espacio) respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ de las matrices y la "matriz fila" del primer miembro tendrá como elementos las coordenadas del mismo vector respecto a la base $\mathcal{B}'$ (todavía desconocida).

Y también sabemos que la ecuación matricial del cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ será entonces: $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) = (\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \alpha'_3 \quad \alpha'_4) \cdot A^{-1}$

siendo los elementos de las 4 filas de A^{-1} las coordenadas de los 4 vectores (que son matrices 2x2) de la base $\mathcal{B}'$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Calculada la inversa de A, se obtiene: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -13 & -13 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -2 \\ -4 & -14 & -13 & 7 \end{pmatrix}$

Por tanto, las coordenadas de v'_1 respecto a la base $\mathcal{B}$ son $(1, 2, 2, -1)$, con lo cual ya podemos conocer ese vector de la base $\mathcal{B}'$:

$$v'_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que las coordenadas respecto a la base canónica del vector pasan a ser sus elementos como matriz, asignados con el orden $a_{11} \to a_{12} \to a_{21} \to a_{22}$).

Por tanto, análogamente: $v'_2 = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ -13 & 7 \end{pmatrix}$, $v'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $v'_4 = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -13 & 7 \end{pmatrix}$

Por tanto, ya tenemos los 4 vectores de la base $\mathcal{B}'$ hasta ahora desconocida.

Con lo cual, ya podemos comprobar las coordenadas de los vectores de la base canónica $\mathcal{B}$ respecto de esta nueva base $\mathcal{B}'$, las cuales son los elementos de las 4 filas de la matriz A dada:

Comprobación de las coordenadas $(2, 0, -1, 0)$ de v_1 (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$2v'_1 + (-1)v'_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1$$

Comprobación de las coordenadas $(0, 1, 0, -1)$ de v_2 (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$1v'_2 + (-1)v'_4 = 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ -13 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2$$

Comprobación de las coordenadas $(1, 0, 3, 1)$ de v_3 (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$1v'_1 + 3v'_3 + 1v'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_3$$

Y comprobación de las coordenadas $(3, 2, 5, 0)$ de v_4 (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$3v'_1 + 2v'_2 + 5v'_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -26 \\ -26 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_4$$

Por último, comprobación (con un ejemplo) del buen funcionamiento de la ecuación matricial del cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, que es $(\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \alpha'_3 \quad \alpha'_4) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) \cdot A$:

Dado el vector $v = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ se tiene $\alpha_1 = -2$; $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = 5$; $\alpha_4 = -1$ (coordenadas respecto a $\mathcal{B}$). Y efectuando el producto de la matriz fila $(-2 \quad 3 \quad 5 \quad -1)$ por la matriz A dada, se obtiene la nueva matriz fila $(-2 \quad 1 \quad 12 \quad 2)$, como puede comprobarse fácilmente. Luego las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}'$ serán $(-2, 1, 12, 2)$. Y en efecto,

$$(-2)v'_1 + 1v'_2 + 12v'_3 + 2v'_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ -13 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 48 \\ 48 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -28 \\ -26 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = v$$

Igual podría hacerse para cualquier vector $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ del espacio vectorial M_{2x2} .

Ahora bien: En este último ejemplo, la matriz dada A puede también interpretarse como "matriz de cambio de base", siendo $\mathcal{B}$ una base cualquiera del espacio (no necesariamente la base canónica) con lo cual la base $\mathcal{B}'$ sería otra diferente a la obtenida antes.

Elijamos por ejemplo la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ del espacio vectorial de todas las matrices reales de tipo 2x2 (puede comprobarse que estos vectores dados son L.I. aplicando el Teorema de la pág. 5, con lo cual también son un conjunto generador de todo el espacio vectorial, ya que son cuatro y esa es la dimensión de dicho espacio). Podremos interpretar que la matriz dada A tiene como elementos de sus 4 filas las coordenadas de los anteriores vectores (v_1 , v_2 , v_3 y v_4 , en el orden dado) respecto a una cierta base $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ todavía desconocida.

Entonces, calculada la inversa de A, tenemos en los elementos de sus filas las coordenadas de los 4 vectores de la base $\mathcal{B}'$ respecto a la base $\mathcal{B}$ (dada). Por tanto, podemos calcularlos:

$$v'_1 = 1v_1 + 2v_2 + 2v_3 + (-1)v_4 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$v'_2 = (-4)v_1 + (-13)v_2 + (-13)v_3 + 7v_4 = \begin{pmatrix} -21 & 23 \\ -7 & 20 \end{pmatrix}$$

$$v'_3 = 1v_1 + 4v_2 + 4v_3 + (-2)v_4 = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$v'_4 = (-4)v_1 + (-14)v_2 + (-13)v_3 + 7v_4 = \begin{pmatrix} -20 & 22 \\ -7 & 20 \end{pmatrix}$$

(nos hemos ahorrado las operaciones intermedias, que el lector sabe hacer).

Entonces: $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -21 & 23 \\ -7 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 & 22 \\ -7 & 20 \end{pmatrix} \right\}$

Y ahora podemos comprobar las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ (elegida al principio) respecto de esta base $\mathcal{B}'$, que están en los elementos de las 4 filas de la matriz A dada:

Comprobación de las coordenadas $(2, 0, -1, 0)$ de v_1(respecto a $\mathcal{B}'$):

$$2v'_1 - v'_3 = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = v_1$$

<u>Comprobación de las coordenadas $(0,1,0,-1)$ de v_2</u> (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$v'_2 - v'_4 = \begin{pmatrix} -21 & 23 \\ -7 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & -22 \\ 7 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2$$

<u>Comprobación de las coordenadas $(1,0,3,1)$ de v_3</u> (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$v'_1 + 3v'_3 + v'_4 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -21 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 22 \\ -7 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_3$$

<u>Y comprobación de las coordenadas $(3,2,5,0)$ de v_4</u> (respecto a $\mathcal{B}'$):

$$3v'_1 + 2v'_2 + 5v'_3 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -42 & 46 \\ -14 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & -35 \\ 10 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = v_4$$

<u>Un ejemplo más</u> en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de todos los polinomios en la variable x, de coeficientes reales y de grado 2 como máximo.

La base canónica de ese espacio es $\mathcal{B} = \{1\ , x\ , x^2\}$, luego el espacio es de dimensión 3.

¿Será $\mathcal{B}' = \{x\ ,\ x^2 - 3\ ,\ 2 - x\}$ otra base de este espacio? Veamos: Formamos la combinación lineal $\alpha \cdot x + \beta \cdot (x^2 - 3) + \gamma \cdot (2 - x) = \beta x^2 + (\alpha - \gamma)x + (-3\beta + 2\gamma)$ y la identificamos con <u>el vector cero</u> de este espacio que es el polinomio $0x^2 + 0x + 0$. Por tanto, tendrá que cumplirse $\beta = 0$; $\alpha - \gamma = 0$; $-3\beta + 2\gamma = 0$, que es un sistema de ecuaciones lineales de Cramer y homogéneo, con única solución $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (en efecto, el determinante Δ de la matriz de los coeficientes vale $-2 \neq 0$). Por tanto, <u>los vectores del conjunto $\mathcal{B}'$ son L.I.</u> (según el Teorema de la pág. 5) y como $\mathcal{B}'$ tiene 3 vectores, <u>será también "un conjunto generador" de todo el espacio vectorial</u>. En conclusión: <u>$\mathcal{B}'$ es otra base del espacio vectorial</u>.

Pero <u>son evidentes las coordenadas de los vectores de esta base $\mathcal{B}'$ respecto a la base canónica $\mathcal{B}$</u>: Las coordenadas del vector v'_1 , que es el polinomio x, son $(0\ ,1\ ,0)$; las coordenadas del vector v'_2 , que es el polinomio $x^2 - 3$, son $(-3\ ,0\ ,1)$, y las coordenadas del vector v'_3 , que es el polinomio $2 - x$, son $(2\ ,-1\ ,0)$.

Por tanto, <u>ya conocemos la matriz A^{-1} del cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$</u>, cuyas filas son las anteriores coordenadas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, <u>la matriz A del cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ será su inversa</u>. Y calculando la inversa de A^{-1}, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

<u>obteniendo en sus 3 filas las coordenadas de los vectores de la base canónica $\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ que dimos</u>. (El lector puede hacer las correspondientes comprobaciones).
