MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices reales

Se llama matriz de m filas y n columnas a cualquier disposición rectangular de objetos (normalmente números, pero pueden ser funciones u otros objetos) de modo que haya un objeto en el cruce de cada "fila" con cada "columna": Las m "filas" de la matriz son alineaciones horizontales de n objetos y las n "columnas" de la matriz son alineaciones verticales de m objetos. Si es $m = n$, la matriz se llama "cuadrada". A cada objeto que aparezca en una matriz se le llama "elemento" de la matriz.

Los distintos "elementos" de una matriz se representan por una letra con dos subíndices (el primer subíndice indica la fila donde se encuentra dicho "elemento" y el segundo subíndice indica la columna donde también se encuentra). Basta numerar las filas de arriba hacia abajo y numerar las columnas de izquierda a derecha, para que todos los "elementos" de la matriz tengan una escritura única, del tipo a_{ij}, con i entero entre 1 y m (si la matriz posee m filas) y con j entero entre 1 y n (si la matriz posee n columnas).

Trabajaremos en este tema con "matrices numéricas reales", donde todos sus elementos son números reales. La matriz se llamaría "matriz numérica compleja" si todos sus elementos fuesen números complejos (habría posiblemente reales e imaginarios; pero no todos reales, para ser verdaderamente matriz compleja), y se llamaría "matriz funcional" si todos sus elementos fuesen funciones (del tipo que sean).

Por tanto, en una "matriz numérica", cada elemento pertenece a una sola fila y a una sola columna, pero además tiene un valor numérico. De modo que muchos elementos diferentes pueden tener el mismo valor numérico, pero son diferentes por estar situados en diferentes filas o en diferentes columnas.

Dos "matrices numéricas" se dicen iguales si y sólo si tienen el mismo número de filas, tienen el mismo número de columnas y todos los "elementos" de una de las matrices coinciden en valor numérico con los "elementos" de la otra que ocupen las mismas posiciones.

MUY IMPORTANTE: Una "matriz numérica" no tiene valor numérico, salvo que se reduzca a un solo elemento por tener solamente una fila y una columna.

Notaciones: Las matrices suelen representarse en forma abreviada por letras mayúsculas. Si una matriz se llama A, representaremos sus elementos normalmente por a_{ij}. Y si se llama B, sus elementos se representarán normalmente por b_{ij}.

Para una matriz A de m filas y n columnas se escribe: A = (a_{ij}) , indicando $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. También en ese caso se dice que la matriz A es "de tipo $m \times n$".

Y si la matriz A es cuadrada de n filas y n columnas, se dice que A es "de orden n". En ese caso los elementos de la matriz de la forma a_{ii} , con $1 \leq i \leq n$, se dice que forman "la diagonal principal" de la matriz.

Con las notaciones anteriores, las matrices A y B serán iguales solamente cuando sean del mismo tipo (o del mismo orden si son cuadradas) y además sea $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y para todo j.

Operaciones con matrices del mismo tipo

Dadas dos matrices A y B, ambas de tipo $m \times n$, se definen su "matriz suma" y sus "matrices diferencias" así:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij}) \qquad B - A = (b_{ij} - a_{ij})$$

O sea, para obtener A + B se suman los elementos que están en las mismas posiciones, y para obtener A − B y B − A se restan también los de las mismas posiciones, pero cuidando el orden. Obviamente, las matrices A + B, A − B y B − A son también de tipo $m \times n$.

Dado un número real cualquiera k y una matriz A de tipo $m \times n$, se define el producto de k por A así: $kA = (k \cdot a_{ij})$. O sea, se multiplican todos los elementos de A por el número k. La nueva matriz también será de tipo $m \times n$.

En particular, si $k = -1$, la matriz kA se representa por −A y se llama "la opuesta de A", que tendrá todos sus elementos de signo contrario a los de A.

La suma de una matriz A (de tipo $m \times n$) con su opuesta −A, nos dará una matriz de tipo $m \times n$ cuyos elementos son todos cero. Esta matriz se llama "matriz nula" de tipo $m \times n$ y la representaremos por $O_{m\times n}$.

Tenemos también que la suma de la matriz nula (de tipo $m \times n$) con cualquier otra matriz del mismo tipo nos dará siempre esta última matriz. Por ello se dice que la matriz $O_{m\times n}$ es la matriz "elemento neutro de la suma" (entre matrices del mismo tipo).

Principales propiedades de la suma de matrices del mismo tipo y del producto de números reales por matrices

Supondremos todas las matrices reales, con m filas y n columnas (pudiendo ser $m = n$).

Propiedades de la suma:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (propiedad asociativa)
2) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
3) $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$, para toda A (existe matriz elemento neutro: $O_{m\times n}$)
4) $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$ (toda A tiene opuesta: −A)

Propiedades del producto de números reales por matrices:

1) $k\,(A + B) = kA + kB$ (prop. distributiva por la izquierda)
2) $(k_1 + k_2)\,A = k_1A + k_2A$ (prop. distributiva por la derecha)
3) $(k_1 \cdot k_2)\,A = k_1\,(k_2A)$ (prop. asociativa)
4) $1 \cdot A = A$ (existe número real elemento neutro: 1)

Producto de matrices

Dada la matriz A de tipo $m \times n$ y la matriz B de tipo $n \times p$ (atención: nº de columnas de A igual a nº de filas de B, obligatoriamente), se define la matriz producto AB del siguiente modo: Cada elemento c_{ij} de AB se obtiene multiplicando todos los elementos de A que están en su fila i por los correspondientes elementos de B que están en su columna j y luego sumando todos esos productos. Así la matriz AB resulta con tantas filas como A y con tantas columnas como B, es decir, de tipo $m \times p$.

Obsérvese que para que pueda existir también el producto BA, debe ser $p = m$. En ese caso, A sería de tipo $m \times n$, y B sería de tipo $n \times m$, con lo cual AB sería de tipo $m \times m$, o sea cuadrada de orden m, y BA sería de tipo $n \times n$, o sea cuadrada de orden n.

En conclusión: No siempre puede hallarse el producto AB, ni el producto BA. A veces puede hallarse AB, pero no puede hallarse BA. Otras veces es BA la que existe, pero no existe AB. Cuando existan AB y BA, estas dos matrices serán cuadradas, pero tendrán en general tamaños diferentes. Por último, sólo existirán AB y BA, resultando ambas del mismo tamaño, cuando sea $m = n = p$ (es decir, cuando A sea cuadrada y B sea cuadrada del mismo orden). Pero, incluso en ese caso, serán AB y BA distintas en general.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Producto de matrices cuadradas del mismo orden

Cuando A y B son cuadradas de orden n sabemos que existen AB y BA, las cuales vuelven a ser cuadradas del mismo orden (pero no tienen por qué coincidir).

Entre los matrices cuadradas de orden n ¿habrá alguna que sea "elemento neutro" de la multiplicación? Sí, la llamada "matriz unidad de orden n", representada por I_n, cuyos elementos de "la diagonal principal" son todos 1 ($i_{11} = i_{22} = i_{33} = \ldots\ldots = i_{nn} = 1$) y los restantes elementos son todos cero ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$).
De modo que, efectivamente, si multiplicamos I_n por cualquier matriz A de orden n, resulta como producto A. Y también multiplicando cualquier matriz A de orden n por I_n, se obtiene A.

Ahora, dada una matriz cualquiera A de orden n, ¿habrá otra matriz que sea la "inversa de A", o sea que el producto de ambas resulte I_n? Depende de A. Es decir, que habrá matrices que tendrán "inversa" y otras matrices no la tendrán. Se verá más adelante que sólo tienen "inversa" las matrices cuadradas de orden n que tengan determinante diferente de cero.

Propiedades principales del producto de matrices cuadradas de orden n:

1) (AB)C = A(BC) (prop. asociativa)
2) En general, AB ≠ BA (prop. no conmutativa)
3) $\mathrm{A}I_n = I_n\mathrm{A} = \mathrm{A}$, para toda A (existe matriz elemento neutro: I_n)
4) A(B + C) = AB + AC (prop. distributiva por la izquierda)
5) (B + C)A = BA + CA (prop. distributiva por la derecha)
6) k(AB) = (kA)B = A(kB) (prop. especial que involucra los dos productos)

Trasposición de matrices

Dada una matriz A cualquiera de tipo $m \times n$, se llama "matriz traspuesta" de A a la matriz que tenga por filas las columnas de A, con lo cual tendrá por columnas las filas de A. Representaremos a la traspuesta de A por A^t. Por tanto, A^t será de tipo $n \times m$.

En el caso de que A sea cuadrada de orden n, su traspuesta A^t será cuadrada del mismo orden.

En general, para matrices de tipo $m \times n$ (pudiendo ser cuadradas del mismo orden), se tiene:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \qquad (A - B)^t = A^t - B^t \qquad (kA)^t = k(A^t)$$

Por otro lado, si la matriz A es de tipo $m \times n$ y la matriz B es de tipo $n \times p$, se tiene:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

o sea, la traspuesta del producto AB es el producto invertido de las traspuestas de ambas. Esto naturalmente se sigue cumpliendo si ambas matrices son cuadradas del mismo orden.

Matrices cuadradas de tipos especiales

Una matriz cuadrada se llama "simétrica" si todos los elementos a_{ij} y a_{ji} (que están en posiciones simétricas respecto de la "diagonal principal" de la matriz) tienen el mismo valor numérico. Por tanto, si una matriz es simétrica, coincidirá con su traspuesta.

Una matriz cuadrada se llama "triangular superior" si todos los elementos que están por debajo de su "diagonal principal" valen cero. O sea, $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Los demás elementos pueden valer cero o no.

Una matriz cuadrada se llama "triangular inferior" si todos los elementos que están por encima de su diagonal principal valen cero. O sea, $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Los demás elementos pueden valer cero o no.

La traspuesta de una "matriz triangular superior" es una "matriz triangular inferior", y viceversa.

Una matriz cuadrada se llama "diagonal" si todos los elementos que están fuera de su diagonal principal valen cero. O sea, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los elementos de la diagonal principal pueden valer cero o no.

Una matriz cuadrada se llama "escalar" si es diagonal y todos los elementos de su diagonal principal tienen el mismo valor numérico. Si dicho valor común es k, multiplicar esta matriz por otra A equivale a hallar kA (de ahí su nombre). Además, vemos que la matriz I_n es una matriz escalar (donde $k = 1$).

Determinante de una matriz cuadrada

El "determinante" de una matriz cuadrada es un número real único, que depende de los elementos de la matriz, obtenido mediante unas reglas que pueden ser las siguientes:

1) Si la matriz A = (a_{ij}) es cuadrada es de orden 2, su "determinante" se dice también de orden 2 y es el resultado de la siguiente operación: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Se represente por $|A|$ y también se puede escribir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2) Si la matriz A = (a_{ij}) es cuadrada de orden 3, su "determinante" se dice de orden 3 y viene dado así:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

lo cual se denomina "desarrollo del determinante de A por los elementos de la primera fila".

Obsérvese que el determinante de orden 2 que aparece multiplicado por a_{11} en el desarrollo anterior, es el determinante de la matriz cuadrada de orden 2 que se obtiene quitándole a la matriz A su fila 1 y su columna 1 (donde está situado a_{11}): Se llama "menor complementario del elemento a_{11}" y se le representa por $\boxed{\alpha_{11}}$.
Análogamente, el determinante de orden dos que aparece multiplicado por a_{12} en el desarrollo anterior, es el de la matriz de orden dos que se obtiene quitándole a A su fila 1 y su columna 2 (donde está situado a_{12}): Se llama también "menor complementario del elemento a_{12}" y se le representa por $\boxed{\alpha_{12}}$.
Finalmente, el tercer determinante de orden dos que aparece en el desarrollo dado se llama "menor complementario del elemento a_{13}", y es el determinante de la matriz de orden dos obtenida quitándole a A su fila 1 y su columna 3, el cual se representa por $\boxed{\alpha_{13}}$.

Con estas nuevas notaciones, tenemos: $\boxed{|A| = a_{11} \cdot \alpha_{11} - a_{12} \cdot \alpha_{12} + a_{13} \cdot \alpha_{13}}$

Y si sustituimos los menores complementarios por sus valores en la expresión anterior, se tiene el desarrollo final de un "determinante" de orden 3:

$$|A| = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) =$$
$$= \boxed{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}$$
$$\boxed{-(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})}$$

O sea, el desarrollo final de $|A|$, cuando A es cuadrada de orden 3, lleva tres términos que suman y tres términos que restan, siendo cada término el producto de tres elementos, uno de cada fila y uno de cada columna. Una regla práctica muy conocida, llamada REGLA DE SARRUS, permite obtenerlos fácilmente, visuali-zándolos sobre la matriz escrita:
Los tres que suman (con los signos que les correspondan) son: Producto de los elementos de la diagonal principal ($a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$); producto de los dos elementos de una de sus paralelas ($a_{12} \cdot a_{23}$) multiplicado por el elemento que quedó solo al otro lado de la diagonal principal (es a_{31}), y producto de los dos elementos de la otra paralela a dicha diagonal ($a_{21} \cdot a_{32}$) multiplicado por el elemento que quedó solo al otro lado de la misma (es a_{13}).
Y los tres que restan (con los signos que les correspondan) son: Producto de los elementos de la diagonal no principal ($a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$); producto de los dos elementos de una de sus paralelas ($a_{12} \cdot a_{21}$) multiplicado por el que quedó solo al otro lado de la diagonal no principal (a_{33}), y producto de los dos elementos de la otra paralela a dicha diagonal ($a_{23} \cdot a_{32}$) multiplicado por el que quedó solo al otro lado de la misma (a_{11}).

3) Si la matriz A = (a_{ij}) es cuadrada de orden 4, su "determinante" sigue dándose "por su desarrollo por los elementos de la primera fila":

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot \alpha_{11} - a_{12} \cdot \alpha_{12} + a_{13} \cdot \alpha_{13} - a_{14} \cdot \alpha_{14}}$$

Donde α_{11}, α_{12}, α_{13} y α_{14} son los "menores complementarios" de los elementos de la primera fila de la matriz, obtenidos del mismo modo que dijimos en el apartado anterior. O sea, $\boxed{\alpha_{ij}}$ es el determinante de la matriz de orden 3 obtenida quitándole a la matriz A la fila i y la columna j (en este caso, con $i = 1$ y j variando de 1 a 4).

4) Si la matriz A es de orden $n > 4$, se sigue aplicando "el desarrollo de su determinante por los elementos de la primera fila", con lo cual aparecerán los "menores complementarios" de los elementos a_{11}, a_{12},……, a_{1n} , los cuales serán "determinantes" de orden $n - 1$. Así el orden se va rebajando hasta llegar a "determinantes" de orden 3 (que pueden obtenerse por la Regla de Sarrus) o bien seguimos hasta llegar a "determinantes" de orden 2.

Por ejemplo, un determinante de orden 5 se calcularía en base a 5 determinantes de orden 4. A su vez, cada uno de ellos se calcularía en base a 4 determinantes de orden 3. Y cada uno de orden 3 se obtendría hallando 3 determinantes de orden 2. Resumiendo: Para el cálculo de un determinante de orden 5 hacen falta 60 determinantes de orden 2. Esto da una idea de lo largo y tedioso que resulta el cálculo directo de determinantes, sin aplicar simplificaciones.
Pero, por suerte, hay un conjunto de propiedades que permiten en la práctica simplificar notablemente estos cálculos.

Principales propiedades de los determinantes

Se demuestran matemáticamente las siguientes propiedades:

1) El “determinante” de una matriz cuadrada coincide siempre con el “determinante” de su matriz traspuesta.

Esto significa que cualquier propiedad que se cumpla para las filas también se cumplirá para las columnas, y viceversa. En particular, si los desarrollos de los “determinantes” se han hecho “por los elementos de la primera fila”, también podrán hacerse “por los elementos de la primera columna”. (Comprobar, como ejercicio, que haciendo el desarrollo de un “determinante” general de orden tres por los elementos de su primera columna, resulta el mismo desarrollo final ya obtenido).

2) Si se multiplican todos los elementos de una sola fila (o columna) de una matriz cuadrada por un mismo número real k, el “determinante” de la nueva matriz será el anterior multiplicado por k. Análogamente ocurre si se dividen todos los elementos de una sola fila (o columna) por un k diferente de cero: El “determinante” anterior quedará dividido por k. Pero entonces, si se multiplican las n filas (o las n columnas) de una matriz por un número k, el nuevo “determinante” obtenido será el anterior multiplicado por k^n.

3) Si se cambian entre sí las posiciones de dos filas (o dos columnas) de una matriz cuadrada, el nuevo “determinante” será el anterior cambiado de signo. Esto vale tanto si las líneas intercambiadas son consecutivas o no.

4) Si una matriz cuadrada tiene una fila (o columna) de ceros, su “determinante” será cero.

5) Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) iguales o proporcionales, su “determinante” será cero. Esto vale tanto si las líneas consideradas son consecutivas o no.

6) Si una de las filas de una matriz cuadrada es "combinación lineal" de otras filas, su “determinante” será cero. También ocurre si una columna es "combinación lineal" de otras columnas.

Nota: Se dice que una fila es "combinación lineal" de otras varias filas si sus elementos son suma de los correspondientes elementos de estas otras, previamente multiplicados por ciertos números reales (el mismo número para los elementos de cada fila). Un caso posible es que dichos números sean todos 1, con lo cual una "combinación lineal" puede ser “sumar directamente los elementos correspondientes de dos o más filas”. Y otra posible "combinación lineal" es “restar los elementos correspondientes de otras dos filas”. Análogamente para las columnas.

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -13 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la fila 3 es "combinación lineal" de las dos primeras:
En efecto: Resulta de multiplicar los elementos de la primera fila por el número 3, multiplicar los

elementos de la segunda fila por el número -2 y sumar todos los elementos correspondientes. En efecto: $(-1)\cdot 3+5\cdot(-2)=-13$; $2\cdot 3+0\cdot(-2)=6$; $3\cdot 3+2\cdot(-2)=5$.
Por tanto, $\boxed{|A|=0}$ (lo cual puede comprobarse aplicando la Regla de Sarrus).

---

7) Si todos los elementos de una cierta fila de una matriz cuadrada A se descomponen en dos sumandos, y formamos dos nuevas matrices cuadradas B y C con todas las restantes filas de A, pero usamos en B los primeros sumandos de los elementos de la fila descompuesta y usamos en C los segundos sumandos de los elementos de la fila descompuesta (manteniendo en ambas matrices el orden de dicha fila nueva respecto a las demás), se tiene: $|A|=|B|+|C|$.
Desde luego, esta propiedad que hemos dicho para filas también se cumple para columnas.

Ejemplo:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 2+3 & -2+4 & -4+2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -4\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=|B|+|C|$$

Aquí hemos descompuesto en forma totalmente arbitraria los elementos de la segunda fila de la matriz A en suma de dos sumandos: $5=2+3$; $2=-2+4$; $-2=-4+2$. Las matrices B y C tienen las filas primera y tercera idénticas a las de A, pero la segunda fila de B está formada por los primeros sumandos elegidos y la segunda fila de C está formada por los segundos sumandos elegidos. Los valores de los tres "determinantes" son: $|A|=3$, $|B|=54$ y $|C|=-51$, como puede comprobarse calculándolos directamente por separado.

---

8) Si a los elementos de una cierta fila de una matriz cuadrada A se le suman los correspondientes elementos de otra fila de A, previamente multiplicados por un mismo número arbitrario k, la nueva matriz obtenida (donde el resto de filas quedan como estaban en A) tendrá el mismo "determinante" que la matriz A.
También esta propiedad que hemos dicho para filas se cumple para columnas.

Pero, al aplicar esta propiedad varias veces seguidas, se obtiene esta esta otra propiedad más general: "Si a los elementos de una cierta línea (fila o columna) de una matriz cuadrada A se le suma "una combinación lineal" cualquiera de otra varias líneas paralelas, la nueva matriz obtenida tendrá un "determinante" igual al de A".

9) El desarrollo de un "determinante" puede hacerse usando los elementos de cualquier fila o columna de la matriz correspondiente: Basta multiplicar dichos elementos a_{ij} por sus "menores complementarios" α_{ij}, afectando los productos de un signo que viene dado por el factor $(-1)^{i+j}$, y luego sumar todos esos productos.

Así para un determinante de orden 3 puede escribirse:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\cdot\alpha_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}\cdot\alpha_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}\cdot\alpha_{13}=$$

$$=a_{11}\cdot\alpha_{11}-a_{12}\cdot\alpha_{12}+a_{13}\cdot\alpha_{13} \qquad \text{(como ya sabíamos)}$$

Pero también es: $|A|=(-1)^{2+1}a_{21}\cdot\alpha_{21}+(-1)^{2+2}a_{22}\cdot\alpha_{22}+(-1)^{2+3}a_{23}\cdot\alpha_{23}=$

$$=-a_{21}\cdot\alpha_{21}+a_{22}\cdot\alpha_{22}-a_{23}\cdot\alpha_{23}$$

Y también será: $|A| = (-1)^{3+1}a_{31} \cdot \alpha_{31} + (-1)^{3+2}a_{32} \cdot \alpha_{32} + (-1)^{3+3}a_{33} \cdot \alpha_{33} =$

$$= a_{31} \cdot \alpha_{31} - a_{32} \cdot \alpha_{32} + a_{33} \cdot \alpha_{33}$$

Nota: Los signos a aplicar en los diferentes desarrollos de un determinante de orden 3 pueden recordarse mediante la siguiente "matriz de signos":

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Y si el determinante a obtener correspondiese a una matriz cuadrada de mayor tamaño, bastaría agrandar la matriz anterior de signos hacia la derecha y hacia abajo hasta llegar al tamaño que interese, pero manteniendo el mismo esquema de signos siempre alternados.

---

10) El "determinante" de una "matriz triangular" (superior o inferior) es el producto de los elementos de su diagonal principal. Lo mismo ocurre con una "matriz diagonal", por ser a la vez "triangular superior" y "triangular inferior". Y en particular, el "determinante" de una "matriz escalar" que tenga el valor real k repetido n veces en su diagonal principal será k^n. Por tanto, el "determinante" de la matriz unitaria I_n será $1^n = 1$.

11) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, los "determinantes" de los productos AB y BA coinciden con el producto de los "determinantes" de A y de B: $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Lo cual implica que si alguna de las matrices, A o B, tiene "determinante" cero, los dos productos AB y BA tendrán "determinantes" cero.

Cálculo abreviado de determinantes

Las propiedades anteriores 8) y 9) de los determinantes son las claves para calcularlos de forma eficiente en la práctica, acortando enormemente las operaciones intermedias.

En efecto, usando la propiedad 8) en forma reiterada, podemos anular todos los elementos (o quizás todos menos uno) de una determinada fila (mediante operaciones hechas con ciertas columnas) o bien, podemos anular todos los elementos (o quizás todos menos uno) de una determinada columna (mediante operaciones hechas con ciertas filas). Ver ejemplo más abajo.

Posteriormente, usando la propiedad 9), se desarrollará el determinante de orden n por los elementos de la fila o columna casi nula (si es el caso), con lo cual habrá que calcular solamente un "menor complementario" de orden $n - 1$. Y si hubiésemos obtenido una fila o columna totalmente nula, el determinante dado valdrá cero.

Y a continuación, en caso de no llegar a una fila o columna totalmente nula, aplicaríamos de nuevo el proceso de anulación de elementos al "menor complementario" de orden $n - 1$ obtenido en el primer desarrollo, llegando así a un solo "menor complementario" de orden $n - 2$ o al valor cero. Y así sucesivamente, hasta llegar a un solo "menor complementario" final de orden tres o de orden dos o bien llegar al valor cero.

Ejemplo:

Vamos a calcular el determinante de cuarto orden siguiente: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

No observamos que haya dos filas o dos columnas que sean iguales o proporcionales. (Si las hubiese, el determinante valdría cero por la propiedad 5) y no hay que nada que calcular). También podríamos ver, quizás, que alguna fila o columna es suma de otras varias o diferencia de otras dos, con lo cual el determinante valdría cero por la propiedad 6). (Ver otras "combinaciones lineales" entre filas o columnas es más difícil).

REGLA BÁSICA: Conviene anular los elementos de una fila o columna en la cual haya un elemento que valga 1 o que valga -1. En caso de no ocurrir esto, nos basaremos en filas o columnas que tengan elementos con los valores numéricos enteros más pequeños posibles.
En el caso dado, hay varios elementos que valen 1 y otros varios que valen -1, luego podríamos anular los elementos de las filas 1ª o 2ª que los incluyen (haciendo operaciones entre ciertas columnas), pero también podríamos anular los elementos de cualquiera de las 4 columnas, pues todas incluyen un 1 o un -1(haciendo en este caso operaciones entre ciertas filas). (Ver más adelante).

También, si observamos una fila o una columna que tenga todos sus elementos pares, podremos dividirlos todos entre 2 (con lo cual el valor del determinante quedará dividido por 2) y para compensar esto lo multiplicaremos externamente por 2. Igualmente podemos proceder si hay alguna fila o columna cuyos elementos sean todos múltiplos de 3 o sean todos múltiplos de 5 (cosas fáciles de ver). Al hacer estos arreglos, no sólo se simplifican muchos cálculos posteriores sino que quizás aparezcan ya algunos elementos en la matriz que valgan 1 o -1.
En el caso dado anteriormente no hay fila ni columna de elementos todos pares, ni elementos todos múltiplos de 3, ni elementos todos múltiplos de 5.

Entonces nos tocará elegir alguna fila o alguna columna que incluya un 1 o un -1, cuando queramos anular todos sus elementos, salvo uno quizás. Y si hubiese ya algún cero en esa fila o columna, mejor, porque abreviamos el proceso. En este caso, como la matriz dada no tiene ceros, **elegimos la primera columna (que tiene un -1) para anular sus elementos** (para lo cual hay que operar con las filas como se indica a continuación):
En primer lugar le sumamos, a la segunda fila de la matriz dada, la primera fila multiplicada previamente por 2, quedando como segunda fila entonces: 0 , 5 , 5 , 4. Y dejamos las demás filas como estaban en A. Por la propiedad 8), la nueva matriz B obtenida tiene el mismo determinante que A. O sea, $|A| = |B|$, donde el determinante de B se ve así:

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Ahora, en la matriz B, hacemos cero otro elemento de su primera columna (vamos a hacer cero el tercer elemento), para lo cual le sumamos, a la tercera fila, la primera fila multiplicada previamente por 4, quedando así como tercera fila: 0 , 11 , 9 , 2. Y dejamos las demás filas como estaban en B. Por la propiedad 8), la nueva matriz C obtenida tiene el mismo determinante que B.

Tenemos entonces $|A| = |B| = |C|$, donde el determinante de C se ve así:

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Y finalmente, hagamos cero el cuarto elemento de la primera columna de C: Sumamos, a la cuarta fila, la primera multiplicada previamente por 3, quedando así como cuarta fila: 0 , 10 , 14 , 0. Y dejamos como estaban las demás filas de C. Por la propiedad 8), la nueva matriz D obtenida tiene el mismo determinante que C. Entonces $|A| = |B| = |C| = |D|$, donde el determinante de D se ve así:

$$|D| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & 9 & 2 \\ 0 & 10 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora aplicamos la propiedad 9) y desarrollamos este determinante por los elementos de la primera columna:

$$|D| = (-1) \cdot \alpha_{11} - 0 \cdot \alpha_{21} + 0 \cdot \alpha_{31} - 0 \cdot \alpha_{41} = -\,\alpha_{11}$$

con lo cual el determinante de orden 4 se ha reducido a un solo determinante de orden 3 (el α_{11}).

Por tanto, ha quedado: $$|A| = -\begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 11 & 9 & 2 \\ 10 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

(y este determinante se puede obtener ya aplicando la Regla de Sarrus).

Pero vamos a proseguir hasta llegar a un solo determinante de orden 2. Observamos que todos los elementos de la tercera fila son pares, luego podemos escribir:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 11 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Pero también todos los elementos de la tercera columna son pares, luego podemos escribir:

$$|A| = -4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Obsérvese ahora que la matriz de orden 3 a la que hemos llegado tiene en su tercera columna un 1 y un cero. Entonces, para conseguir lo que buscamos, basta que sustituyamos su primer elemento por otro cero. Para lo cual le sumamos, a la primera fila, la segunda fila multiplicada previamente por -2, quedando entonces la primera fila así: -17 , -13 , 0. Y dejamos las otras dos filas como estaban.
Por la propiedad 8), el último determinante de orden tres que teníamos será entonces igual a:

$$\begin{vmatrix} -17 & -13 & 0 \\ 11 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Con lo cual: $$|A| = -4 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 & 0 \\ 11 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Y por la propiedad 9), podemos desarrollar este último determinante por la tercera columna, obteniendo su resultado final:

$$|A| = -(-4) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4 \cdot (119 - 65) = -216$$

Adjunta de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A de orden n, sabemos que cada uno de sus elementos a_{ij} tiene un "menor complementario" α_{ij}, que es un determinante de orden $n-1$.
Se llama "adjunto del elemento a_{ij}" al producto $(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$. Lo llamamos $\boxed{A_{ij}}$.

Pues bien, se llama "matriz adjunta de A" a la nueva matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son los adjuntos A_{ij} de todos los elementos de A. Se escribe:

$$\boxed{Adj(A)=(A_{ij})} \qquad (1\leq i\leq n)\ (1\leq j\leq n)$$

Ejemplo: Para la matriz de tercer orden $A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\-1&1&3\\3&1&0\end{pmatrix}$ tenemos los 9 "menores complementarios":

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix}=-3\ ;\ \alpha_{12}=\begin{vmatrix}-1&3\\3&0\end{vmatrix}=-9\ ;\ \alpha_{13}=\begin{vmatrix}-1&1\\3&1\end{vmatrix}=-4\ ;$$

$$\alpha_{21}=\begin{vmatrix}0&-4\\1&0\end{vmatrix}=4\ \ ;\ \ \alpha_{22}=\begin{vmatrix}2&-4\\3&0\end{vmatrix}=12\ \ ;\ \ \alpha_{23}=\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=2\ \ ;$$

$$\alpha_{31}=\begin{vmatrix}0&-4\\1&3\end{vmatrix}=4\ ;\ \alpha_{32}=\begin{vmatrix}2&-4\\-1&3\end{vmatrix}=2\ ;\ \alpha_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2\ .$$

Por tanto, los 9 "adjuntos" de los elementos de A son:

$$A_{11}=-3\ ;\ A_{12}=9\ ;\ A_{13}=-4\ ;\ A_{21}=-4\ ;\ A_{22}=12\ ;$$
$$A_{23}=-2\ ;\ A_{31}=4\ ;\ A_{32}=-2\ ;\ A_{33}=2\ .$$

Con lo cual, la "matriz adjunta de A" será:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-3&9&-4\\-4&12&-2\\4&-2&2\end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz cuadrada

Ya habíamos dicho, cuando hablábamos de producto de matrices cuadradas, que no toda matriz cuadrada A posee "matriz inversa", la cual tendrá que ser otra matriz cuadrada, A^{-1}, tal que $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$, donde n es el orden de ambas.

TEOREMA 1: Toda matriz cuadrada cuyo "determinante" sea diferente de cero tiene "matriz inversa".
Y su inversa viene dada por: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot[Adj(A)]^t$

Ejemplo: La matriz A dada anteriormente como ejemplo para calcular su matriz adjunta era:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\-1&1&3\\3&1&0\end{pmatrix}$$

Su "determinante" vale 10, luego según el Teorema anterior tiene "matriz inversa", que es:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 9 & 12 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{4}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{12}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

En efecto, podemos comprobar que $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3}$.

TEOREMA 2: Si A es cuadrada y su "determinante" es cero, no existe la "matriz inversa" de A.

En efecto, recordemos la propiedad 11) de los "determinantes" (pág. 8), según la cual para dos matrices cuadradas A y B del mismo orden, es $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.
Con lo cual, si $|A| = 0$, cualquier producto AB o BA tendrá "determinante" cero. Pero entonces A no podrá tener inversa, ya que si existiese su inversa A^{-1}, el producto AA^{-1} sería una matriz con determinante diferente de cero (pues ese producto sería la matriz I_n , cuyo determinante es 1).

La matriz inversa sirve, por ejemplo, para despejar la matriz incógnita X en una "ecuación matricial" de la forma AX = B , siendo A cuadrada de orden n con determinante no nulo y B una matriz general de tipo $n \times p$.
En efecto, multiplicamos (por la izquierda) por A^{-1} los dos miembros de la ecuación y se tiene: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow I_nX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$ (vemos entonces que la matriz X existe, es única y resulta del mismo tipo $n \times p$ que B).

Ejemplo: El sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x + y + 3z = -1 \end{cases}$ se puede escribir en la forma matricial AX=B, siendo A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pero el determinante de A es 11 (como puede comprobarse), luego podemos decir que $\boxed{X = A^{-1}B}$.
Calculando A^{-1} resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} [Adj(A)]^t = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego tenemos: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 40 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/11 \\ -13/11 \\ 14/11 \end{pmatrix}$$

Es decir, que los valores de las incógnitas del sistema que habíamos dado son: $x = 40/11$; $y = -13/11$; $z = 14/11$ (podemos comprobar que, efectivamente, estos valores cumplen las tres ecuaciones dadas).

De modo análogo, puede resolverse una "ecuación matricial" de la forma XA = B, siendo A cuadrada de orden n con determinante no nulo y B ahora de tipo $p \times n$.
En este caso multiplicamos (por la derecha) por A^{-1} los dos miembros de la ecuación dada, con lo cual: $(XA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Rightarrow XI_n = BA^{-1} \Rightarrow \boxed{X = BA^{-1}}$ (vemos que, nuevamente, la matriz X existe, es única y resulta del mismo tipo $p \times n$ que B).

Rango de una matriz

Dada una matriz real A cualquiera (rectangular o cuadrada) se llama "menor de orden p de A" (p mayor que 1) al determinante de cualquier matriz cuadrada de orden p que pueda formarse dentro de A, eliminando, si es necesario, alguna o algunas filas de A y eliminando, si es necesario, alguna o algunas columnas de A (si A es de tipo $m \times n$ habrá que eliminar $m - p$ filas y $n - p$ columnas).

Cada elemento de A se considera un "menor de orden 1". Por tanto, hay tantos menores de orden 1 como elementos de la matriz, que son $m \cdot n$. Hay también muchos menores de orden 2, que se obtendrían escogiendo los elementos de dos de las filas de A y de dos de sus columnas, de todos los modos posibles (manteniendo el orden entre ellas y eliminando las demás filas y columnas de A), y luego hallaríamos los determinantes de todas esas matrices de orden 2. De un modo similar se podrían obtener los diferentes menores de orden 3. Etc...

Normalmente, entre todos los menores de un mismo orden, los habrá nulos (que valgan cero) y los habrá no nulos (que no valgan cero). Pues bien:

Se llama "rango de A" al mayor orden que haya entre los menores no nulos de A (incluidos todos los órdenes posibles). Es decir, que si entre los menores no nulos de todos los órdenes posibles en A, hubiese alguno de orden p y no hubiese de órdenes mayores que p, el rango de A sería p. Se escribiría: $r(A) = p$.

Si A es de tipo $m \times n$, el rango de A no puede superar a m ni a n. Si fuese $m < n$, el rango podrá llegar a ser como máximo m. Y si fuese $m > n$, el rango podrá llegar a ser como máximo n.

Y si A es cuadrada de orden n, habrá solamente un menor de orden máximo es el propio determinante de A, pero podría valer cero. Luego, en este caso, si $|A| \neq 0$ el rango de A es n, y si $|A| = 0$ el rango de A será menor que n.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Como A no es cuadrada, no hay determinante de A.

Hay 15 menores de orden 1 (los 15 elementos de la matriz), entre los cuales hay 12 no nulos. Por tanto, el rango de A es como mínimo 1 y como máximo 3 (pues el número de filas es menor que el de columnas y hay solamente 3 filas).

¿Cuántos menores de orden 2 tenemos?: Todos los que se puedan formar con las dos primeras filas (eligiendo, cada vez, dos de las cinco columnas: O sea, combinaciones de cinco tomadas de dos en dos que son el número combinatorio $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$); todos los que se puedan formar con las filas 1 y 3 (la misma cantidad, 10), y todos los que se puedan formar con las dos últimas filas (la misma cantidad, 10). En total hay 30 menores de orden 2. ¿Hay que hallar los determinantes de todos? No, basta encontrar uno diferente de cero para que ya sepamos que el rango es como mínimo 2.

En este caso, podemos comprobar que todos los menores de orden 2 que se pueden formar con las dos primeras filas son nulos, ya que estas filas son proporcionales (recordar la propiedad 5) de los determinantes): En efecto, multiplicando los elementos de la primera fila por -2 se obtienen los de la segunda.

Pero el primer menor de orden 2 que se puede formar con las dos últimas filas de A, $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, es no nulo (su valor es 6). Por tanto, ya sabemos que el rango es como mínimo 2 y como máximo 3.

Por último, menores de orden 3 hay 10, pues se tienen que formar usando las 3 filas de A y sólo 3 de sus 5 columnas (combinaciones de cinco tomadas de tres en tres, que es el número combinatorio $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$). Sin embargo, al quedar siempre incluidos elementos de las dos primeras filas en cualquiera de esos menores de orden 3, siendo que esas filas son proporcionales, dichos menores serán todos nulos (propiedad 5 de los determinantes).

Conclusión: El rango de A es 2.

Se observa en el ejemplo anterior que el cálculo del rango de una matriz de cierto tamaño puede ser muy largo. Por tanto, necesitamos alguna propiedad que nos ayude a eliminar posibilidades de formar menores. Ya usamos una (la propiedad 5 de los determinantes), pero muchas veces no detectaríamos que alguna fila (o columna) sea una combinación lineal de otras filas (o columnas) en la matriz dada, con lo cual los menores que las incluyan serían todos nulos y en ese caso estaríamos considerando más menores de los necesarios.

Aquí es muy útil el concepto de "menor orlado" de otro menor: Dado un menor de orden p cualquiera, "menor orlado" suyo de orden $p+1$ es cualquiera que se obtenga a partir del que tenemos, agregándole a su matriz elementos correspondientes de una sola fila adicional y de una sola columna adicional de la matriz A (manteniendo el orden en que estaban en A).

Ejemplo: En la matriz A que usamos para el ejemplo anterior, un menor de orden 2 es $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, cuyos elementos estaban en las filas 1 y 3, así como en las columnas 2 y 4. Pues bien, un "menor orlado" del anterior es $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, obtenido añadiendo elementos de la fila 2 y la columna 1 (en el orden inicial). Pero otro "menor orlado" de $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ es $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, obtenido añadiendo elementos de la fila 2 y la columna 3 (también en su orden inicial). Y también es "menor orlado" del $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, obtenido añadiendo elementos de la fila 2 (única posibilidad) y ahora de la columna 5 (en el orden inicial). Obsérvese que había en total 10 menores de orden 3 en la matriz A dada, pero de ellos sólo 3 son "menores orlados" del menor de orden 2 que habíamos dado.

Veamos ahora un teorema muy útil para el cálculo de rangos, que es el siguiente:

TEOREMA: Sea una matriz real A de m filas y n columnas y supongamos que tenemos un cierto menor M de orden p no nulo de dicha matriz. Entonces:
Si **son nulos** todos los menores orlados de M de órdenes $p+1$ obtenidos agregando siempre elementos de **una sola fila adicional** de A y agregando elementos de **cada una de las columnas sobrantes de dicha matriz**, la única fila adicional de A elegida (para la obtención de esos menores orlados) será con seguridad una "combinación lineal" de las filas de A que intervenían inicialmente en el menor M.

De este Teorema se deduce el siguiente

PROCEDIMIENTO PRÁCTICO PARA HALLAR EL RANGO DE UNA MATRIZ:

Sea una matriz A de tipo $m \times n$ (pudiendo ser $m = n$ o $m \neq n$).

1) Si A es la matriz nula $O_{m\times n}$, su rango es cero.

2) Si A tiene algún elemento diferente de cero, empezamos eliminándole todas las filas y columnas cuyos elementos sean solamente ceros. La matriz B resultante será más pequeña que A (si se ha eliminado alguna fila o alguna columna) y tiene el mismo rango que A. Por tanto, podemos escribir $\boxed{r(A) = r(B) \geq 1}$.

3) Si en la matriz B vemos dos o más filas iguales o proporcionales, dejamos sólo una de cada grupo, eliminando las otras que sean iguales o proporcionales a la elegida. Lo mismo haremos con las columnas iguales o proporcionales que pueda haber. Queda así una matriz C posiblemente más pequeña que B y que A, todas con el mismo rango. O sea, $\boxed{r(A) = r(B) = r(C) \geq 1}$.

4) Tomamos ahora un elemento no nulo de la primera fila de C (menor no nulo de orden 1) y si no quedan más filas o no quedan más columnas en C que no incluyan al elemento tomado, el rango será definitivamente 1 (para C, para B y para A). En caso contrario, damos el paso siguiente.

5) "Orlamos" el menor de orden 1 no nulo que tenemos, agregándole elementos **solamente** de la segunda fila y de cada una de las restantes columnas de C (se supone que debe haber al menos una fila y una columna adicionales). Entonces puede suceder: Que todos los “menores orlados” de orden 2 que se puedan formar sean nulos, en cuyo caso la segunda fila es una combinación lineal de la primera (luego ambas filas serán iguales o proporcionales, lo cual no debería suceder si hubiésemos dado bien el paso 3) y en este caso, eliminamos la segunda fila de la matriz C, reduciendo más su tamaño. O bien puede suceder: Que aparezca algún “menor orlado” de orden 2 no nulo entre los formados con la segunda fila, en cuyo caso el rango de C es como mínimo 2 (y si ya no quedasen más filas o columnas en C, el rango sería definitivamente 2, para C y también para A).
En caso de haber eliminado la segunda fila de C, iniciaremos este mismo paso con la nueva matriz obtenida, que tiene una fila menos y sigue teniendo el mismo rango de A. Así iremos eliminando filas de C hasta que encontremos un menor no nulo de orden 2 o concluiremos que el rango de C es 1 (y el de A también).

6) Si en el paso anterior se llegó a obtener un menor no nulo de orden 2 en la matriz C, ahora “orlamos” dicho menor agregándole elementos **solamente** de una nueva fila y de cada una de las columnas restantes (suponiendo que haya todavía alguna fila y alguna columna distintas de las que intervengan en el menor no nulo de orden 2 considerado). Entonces, puede suceder nuevamente que todos los “menores orlados” de orden 3 obtenidos sean nulos (en cuyo caso la nueva fila utilizada será combinación lineal de las dos que intervenían en el menor de orden 2, y entonces esta fila se elimina de C, o bien llegamos a algún menor de orden 3 no nulo (con lo cual el rango de C y por tanto el de A es como mínimo 3, o es definitivamente 3 si ya no quedan más filas o no quedan más columnas en la matriz C distintas de las que intervengan en el menor de orden 3).

7) Y así sucesivamente, vamos obteniendo menores no nulos de órdenes 4, 5, etc… , hasta que no puedan ya formarse nuevos “menores orlados” por falta de nuevas filas o nuevas columnas. Entonces, el rango de A será el orden del último menor no nulo encontrado.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ de tipo 5 x 7.

1) A no es la matriz $O_{5\times 7}$, luego $\boxed{1 \leq r(A) \leq 5}$ (pues el número de filas es menor que el número de columnas y la matriz tiene solamente 5 filas, así como elementos no nulos).

2) La matriz tiene una fila que incluye sólo ceros (la cuarta) y tiene una columna que incluye sólo ceros (la tercera). Eliminamos esa fila de ceros y esa columna de ceros, obteniéndose la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ de tipo 4 x 6}$$

de modo que $\boxed{r(B) = r(A)}$. Y además $\boxed{1 \le r(B) \le 4}$.

3) La matriz B no tiene filas iguales o proporcionales, pero si tiene dos columnas iguales (la cuarta y la sexta). Eliminamos una de ellas, por ejemplo la sexta, obteniéndose la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ de tipo 4 x 5}$$

de modo que $\boxed{r(C) = r(B) = r(A)}$. Y además $\boxed{1 \le r(C) \le 4}$.

4) Tomamos el segundo elemento de la primera fila de C como menor no nulo de orden 1, para empezar a obtener "menores orlados" de órdenes cada vez mayores.

5) "Orlamos" ese menor (de valor $2 \neq 0$) de la primera fila, agregando elementos **solamente** de la segunda fila y de las cuatro columnas restantes. Los "menores orlados" obtenidos son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Observamos que el primero de ellos es no nulo (vale $2 \neq 0$), luego ya podemos afirmar con seguridad que $\boxed{2 \le r(C) \le 4}$ y además $\boxed{r(C) = r(B) = R(A)}$.

6) Ahora "orlamos" ese menor no nulo $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ con elementos **solamente** de la tercera fila de C y de las tres columnas restantes. Esos "menores orlados" son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Los tres dan cero (puede comprobarse mediante la Regla de Sarrus), luego la tercera fila de C es combinación lineal de las dos primeras (por aplicación el Teorema dado en la pág. 14). En efecto, podríamos no habernos dado cuenta, pero sumando los elementos de las dos primeras filas se obtienen los de la tercera fila (a veces la combinación lineal no es tan sencilla y no puede detectarse a simple vista, lo cual hace muy útil el Teorema anterior). Por tanto, eliminamos de C la tercera fila y queda la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ de tipo 3 x 5}$$

de modo que $\boxed{r(D) = r(C) = r(B) = r(A)}$. Y además $\boxed{2 \le r(D) \le 3}$, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ distinto de cero sigue en D.

7) Finalmente, "orlamos" de nuevo el menor no nulo $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ con elementos de la tercera fila de D y las tres restantes columnas. Esos "menores orlados" son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Como el primero de ellos vale $16 \neq 0$ (comprobarlo), se tiene $\boxed{r(D) = 3}$, luego podemos concluir finalmente que $\boxed{r(A) = 3}$.