

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Pero hay sistemas lineales con más ecuaciones que incógnitas y otros con más incógnitas que ecuaciones (y además hay sistemas de tantas ecuaciones como incógnitas que no son de Cramer, por ser $\Delta = 0$). Entonces, en unos casos el sistema dado posee una sola solución (sistema compatible determinado), en otros casos ocurre que posee infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado) o puede ocurrir que no tenga solución (sistema incompatible).

Al respecto de la compatibilidad o no de un sistema lineal, hay un Teorema muy importante:

TEOREMA (de Rouché-Fröbenius): El sistema (1) es compatible si son iguales los rangos de las matrices A (de los coeficientes) y A* (ampliada con los términos independientes). Dentro de este caso, el sistema será compatible determinado si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, y será compatible indeterminado cuando ambos rangos sean iguales pero menores que el número de incógnitas.
Y si los rangos de ambas matrices A y A* son distintos, el sistema será incompatible.

Nota 1: El concepto de “rango de una matriz” se estudió en la Sección 9.1 (es el mayor orden entre todos los “menores” diferentes de cero que tenga dicha matriz) y un método distinto al dado en esa Sección 9.1 para su cálculo práctico será tratado en el apartado siguiente.

Nota 2: Eugène Rouché fue un matemático francés del siglo XIX y Ferdinand Fröbenius fue un matemático alemán del mismo siglo.

Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Se dice que dos sistemas lineales, con las mismas incógnitas, son “equivalentes” si tienen exactamente las mismas soluciones. O sea, si toda solución de uno de ellos es también solución del otro.

Vamos a ver un método que convertirá el sistema inicial dado en un sistema equivalente mucho más sencillo, de modo que se verá directamente sobre este último si hay solución o no, y además permitirá obtener las soluciones muy fácilmente (si las hubiese). Se trata del método de Gauss (Carl Friedrich Gauss fue un eminente matemático alemán del siglo XIX), el cual se basa en el siguiente Teorema:

TEOREMA: A partir de un sistema ordenado de ecuaciones lineales, las siguientes operaciones conducen siempre a nuevos sistemas lineales que son equivalentes al dado:

- 1) Cambio de orden entre las ecuaciones.
- 2) Multiplicar o dividir por un número real distinto de cero una o varias de las ecuaciones del sistema (que se suele usar para quitar denominadores o bien simplificar las ecuaciones afectadas).
- 3) Sumar miembro a miembro, a una de las ecuaciones del sistema, otra de las ecuaciones del mismo sistema previamente multiplicada por un número real cualquiera diferente de cero (dejando las demás como estaban, incluida la que hemos multiplicado por ese número para sumarla con la que hemos modificado).

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

- 1) Cuando se cambia el orden entre las ecuaciones, la matriz ampliada del nuevo sistema resulta aplicando el mismo cambio de orden a las filas de la matriz ampliada inicial.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2) Cuando una de las ecuaciones del sistema se multiplica o divide por un número diferente de cero, la matriz ampliada del nuevo sistema resulta haciéndole la misma operación a la fila correspondiente en la matriz ampliada inicial.

3) Cuando se le suma a una ecuación otra ecuación, multiplicada previamente por un número, la nueva matriz ampliada resulta de sumar a la fila que corresponde a la primera ecuación en la matriz inicial, la fila correspondiente a la segunda ecuación previamente multiplicada por ese mismo número.

4) Si un sistema incluye ecuaciones repetidas, el sistema que resulta de eliminar las repeticiones es equivalente al anterior. Lo mismo ocurre si incluye dos ecuaciones proporcionales, cuando eliminemos una de ellas.

5) Si un sistema incluye alguna ecuación absurda, será siempre incompatible. Una ecuación lineal absurda es reducible, en su forma ordenada, a la siguiente expresión:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = k, \text{ con } k \neq 0$$

(ningún sistema de valores de las variables la cumplirá).

6) Si un sistema incluye ecuaciones que se cumplen siempre (identidades), el sistema que resulta eliminándolas es equivalente al anterior. Una ecuación que se cumpla siempre es reducible, en su forma ordenada, a la siguiente expresión:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

(es como escribir $0 = 0$, lo cual no aporta nada al sistema).

MATRIZ ESCALONADA POR FILAS: Se llama así a cualquier matriz cuyas filas sucesivas tengan cada vez más elementos iniciales que valgan cero (la primera fila puede no incluir ceros en sus elementos iniciales).

Ejemplos:

1) La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, que es "triangular superior", también es "escalonada por filas", ya que su primera fila no incluye ceros iniciales, su segunda fila incluye un cero inicial y su tercera fila incluye dos ceros iniciales.

2) Sin embargo esta otra matriz "triangular superior" $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ no es "escalonada por filas", ya que su segunda fila tiene dos ceros iniciales y su tercera fila también tiene dos ceros iniciales (debería tener tres ceros iniciales para que la matriz fuese escalonada por filas).

3) También es "escalonada por filas" la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ya que su primera fila tiene un cero inicial, su segunda fila tiene tres ceros iniciales y su tercera fila tiene cinco ceros iniciales.

4) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ no es "escalonada por filas", pues sus tres filas tienen un cero inicial.

MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS: Se dice que las matrices A y B, del mismo tipo $m \times n$, son "equivalentes por filas" si y sólo si puede pasarse de A a B haciéndole a la matriz A una o varias de las siguientes "operaciones por filas" (son análogas a las señaladas en el Teorema

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

de la página anterior para pasar de un sistema a otro equivalente; allí las operaciones se realizaban con las ecuaciones del sistema y aquí se realizan con las filas de la matriz):

- 1) Cambio de orden entre las filas.
- 2) Multiplicar o dividir por un número diferente de cero una o varias filas.
- 3) Sumar a los elementos de una fila los correspondientes de otra fila, previamente multiplicados por un mismo número distinto de cero (dejando las restantes filas como estaban inicialmente, incluida la que se multiplicó por ese número).

En el caso de que A y B sean matrices “equivalentes por filas”, se escribirá: $A \leftrightarrow B$ (no debe escribirse $A = B$, salvo que sean la misma matriz).

Ejemplos: Llamamos A a la primera matriz dada y B a la otra, en todos los casos.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, porque las filas de ambas matrices son las mismas cambiadas de orden (primera operación mencionada).

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, porque la fila primera de A se ha multiplicado por -1 (pasando a ser la primera fila de B), y la fila segunda de A se ha multiplicado por 2 (pasando a ser la segunda de B), (segunda operación mencionada).

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, porque la primera fila de B se obtiene sumándole a los elementos de la primera fila de A los correspondientes de la segunda fila de A, multiplicados previamente por 3 (tercera operación mencionada).

El siguiente Teorema establece que siempre se puede llegar a una matriz “escalonada por filas” a partir de cualquier matriz que tengamos, aplicándole a esta última ciertas “operaciones por filas” (no únicas). Y además nos da un procedimiento nuevo para el cálculo práctico del rango de una matriz (más sencillo que el conocido de los “menores orlados” de la Sección 9.1):

TEOREMA: Toda matriz dada es “equivalente por filas” a una cierta matriz “escalonada por filas” (que depende del proceso que se aplique para obtenerla, luego no es única). Además, los rangos de ambas matrices siempre coinciden, siendo el rango de la “matriz escalonada” obtenida el número de filas que posea con algún elemento diferente de cero (las filas donde todos los elementos sean ceros no cuentan para el rango).

FORMA PRÁCTICA DE OBTENER UNA MATRIZ “ESCALONADA POR FILAS” EQUIVALENTE A LA DADA:

Lo haremos con dos ejemplos, siendo el proceso similar en cualquier otro caso (hay que adaptarlo a la matriz dada). Sin embargo, es importante saber que el proceso no es único, porque hay muchas posibilidades de elección al irlo aplicando.

En todos los casos iremos aplicando “operaciones por filas” a la matriz dada, buscando otras matrices “equivalentes por filas” que tengan elementos cero bien colocados, las cuales estén cada vez más próximas a una matriz que sea “escalonada por filas”, hasta llegar finalmente a una que

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

lo sea. Como el paso de la dada hasta la última obtenida se consigue después de aplicar un conjunto de “operaciones por filas”, la inicial y la final serán “equivalentes por filas”.

Ejemplo 1: Sea la matriz dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Para iniciar el proceso nos apoyaremos en la primera fila, para conseguir dos ceros en la primera columna, debajo de su primer elemento. Sería bueno para conseguirlo que ese primer elemento fuese 1 o -1 , por lo cual conviene que la primera fila empiece por uno de esos valores (pero esto es por comodidad; no es obligatorio). Entonces, para conseguirlo en este caso, empezaremos cambiando el orden de las filas de forma que la actual segunda pase a ser primera. Así tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_1 = F_2 \text{ y } F'_2 = F_1)$$

(F'_1 y F'_2 representan primera y segunda filas de la segunda matriz, así como F_2 y F_1 representan segunda y primera filas de la primera matriz).

Ya tenemos como elemento inicial de la primera columna un 1 (lo llamaremos “elemento pivote”, pues nos basaremos en dicho elemento para obtener dos ceros debajo del mismo, en dicha columna, siempre haciendo “operaciones por filas”). Primero le sumamos a los elementos de la segunda fila los correspondientes de la primera fila, multiplicados todos por -2 (con lo cual logramos el primer cero de la primera columna):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_2 = F_2 + (-2) \cdot F_1)$$

Ahora partimos de esta última matriz y le sumamos a los elementos de la tercera fila los correspondientes de la primera, multiplicados todos por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_3 = F_3 + 3 \cdot F_1)$$

Ya hemos conseguido que todos los elementos de la primera columna, por debajo del 1, sean ceros. Ahora, en esta última matriz, dejamos la primera fila quieta y usamos la segunda fila como apoyo para hacer un nuevo cero en la segunda columna. El elemento que va a servir como “segundo pivote” será el segundo de la segunda columna (que es 5, pero sería 2 si cambiamos el orden de las dos últimas filas). Como nos resultará más cómodo hacer las “operaciones por filas” cuanto menor sea el valor del “elemento pivote” utilizado, hacemos el cambio de orden mencionado (que tampoco es obligatorio):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_2 = F_3 \text{ y } F'_3 = F_2)$$

Ahora, para facilitar la operación de obtener un cero debajo del 2 en la segunda columna, sin tener que usar fracciones para ello, multiplicamos previamente la tercera columna por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_3 = 2 \cdot F_3)$$

Y ahora podemos usar fácilmente el 2 de la segunda columna como “segundo pivote”, para obtener un cero en lugar del 10; por tanto, le sumamos a los elementos de la tercera fila los correspondientes de la segunda multiplicados todos por -5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & -6 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_3 = F_3 + (-5) \cdot F_2)$$

Y ya esta última matriz es “escalonada por filas”, luego hemos terminado el procedimiento. Resumiendo, podemos concluir que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & -6 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Además, el número de filas con algún elemento distinto de cero en la matriz escalonada obtenida es 3, luego su rango es 3. Por tanto, el rango de A también será 3 según el Teorema anterior. Lo cual es un modo de calcular el rango de A, bastante diferente del que conocíamos por “menores orlados”; según el cual, el 2 de la primera fila en la matriz inicial es un menor de orden 1 no nulo, el “menor orlado” $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 2 no nulo, pues vale -5 , y el “menor orlado” $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ es de orden 3 no nulo, pues vale 21, con lo cual también se concluye por este procedimiento de “menores orlados”, explicado en la Sección 9.1, que el rango de A es 3.

Nota: En el paso de la matriz intermedia anterior $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, que ya tenía dos ceros en la primera columna, hacia la que queríamos con un cero debajo del 2 en la segunda columna, podríamos habernos basado en ese 2 como “segundo pivote” y haber hecho la siguiente operación por filas utilizando fracciones: A la tercera fila le sumamos los elementos de la segunda fila multiplicados todos por $-5/2$, con lo cual la nueva tercera fila habría sido $(0 \quad 0 \quad 21/2 \quad -3)$, en vez de la que obtuvimos que fue $(0 \quad 0 \quad 21 \quad -6)$. Pero la anterior se convertiría en ésta si la multiplicásemos por 2 para eliminar la fracción que aparece, lo cual no es obligatorio (ya hemos dicho que la matriz escalonada a la que lleguemos no es única; lo importante es que sea “escalonada por filas”).

Ejemplo 2: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ahora ninguna fila comienza por 1 o por -1 . Pero todos los elementos de la primera fila son múltiplos de 3, luego empezamos el procedimiento dividiendo todos sus elementos por 3, con lo cual no sólo trabajamos con valores menores sino que ya conseguimos una fila que comience por 1. Pero también observamos que la segunda fila tiene todos sus elementos pares, luego vendrá bien dividirlos todos por 2. Hacemos las dos operaciones simultáneas y queda:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{operaciones: } F'_1 = \frac{1}{3} \cdot F_1; F'_2 = \frac{1}{2} \cdot F_2)$$

Ahora que tenemos un 1 al comienzo de la primera columna, lo tomamos como “primer elemento pivote” para sustituir por ceros los dos elementos que le siguen en esa primera columna. Entonces, podemos hacer simultáneamente las dos siguientes operaciones por filas, ya que el resultado de la primera no influye en la segunda: La primera operación sería sumar a los elementos de la segunda fila los correspondientes de la primera, y la segunda operación es sumar a los elementos de la tercera fila los correspondientes de la primera, previamente multiplicados por -2 . Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{operac.: } F'_2 = F_2 + F_1; F'_3 = F_3 + (-2) \cdot F_1)$$

Ha resultado una fila toda de ceros, que debemos pasar al último lugar (si las filas en la “matriz escalonada por filas” tienen que comenzar con más ceros cada vez, está claro que una que tenga todos sus elementos cero tendrá que estar como última (o entre las últimas si hay varias)). Por tanto, aplicamos la operación de intercambiar las posiciones de las dos últimas filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_2 = F_3 \text{ y } F'_3 = F_2)$$

Pero esta matriz ya es “escalonada por filas”, con lo cual el procedimiento ha terminado. Podemos escribir entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Además, el número de filas con algún elemento distinto de cero en la “matriz escalonada” obtenida es 2. Luego, el rango de A es 2 (según el Teorema de la pág. 4).

Nota: En el ejemplo anterior, el procedimiento de los “menores orlados” para calcular el rango habría comenzado con el 3 de la primera fila que es un menor de orden 1 no nulo; después, los tres menores orlados del 3 con elementos de la segunda fila y las restantes columnas dan todos cero, luego concluiremos que esa segunda fila es proporcional a la primera (y puede desecharse); finalmente, el menor orlado de 3 obtenido usando elementos de la tercera fila y la segunda columna, que es $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, es un menor no nulo de orden 2 (de valor 27), luego concluiríamos también que el rango de A es 2.

MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL ORDENADO: Consiste en tomar la matriz ampliada A^* del sistema ordenado de ecuaciones lineales y aplicarle el proceso descrito de "operaciones por filas" hasta llegar a una cierta matriz "esalonada por filas" equivalente. Pero, a cada operación por filas que hagamos con las matrices obtenidas en el proceso, desde la inicial A^* hasta la última, le corresponde una modificación del sistema que nos produce siempre otro sistema equivalente, por el Teorema de la pág. 2. En conclusión: EL SISTEMA ORIGINAL SERÁ EQUIVALENTE AL QUE TIENE COMO MATRIZ AMPLIADA LA "ESCALONADA POR FILAS" OBTENIDA.

Lo bueno es que en este "sistema lineal escalonado" final se verá fácilmente lo que ocurre: 1) Será “incompatible” cuando haya quedado alguna ecuación absurda (en ese caso será visible que el rango de A será menor que el rango A^* , como dice el Teorema de Rouché). 2) Será “compatible indeterminado” cuando no haya ninguna ecuación absurda, pero el número que haya quedado de ecuaciones auténticas (que no sean identidades $0 = 0$) resulte menor que el número de incógnitas (en ese caso será visible que los rangos de las matrices A y A^* resultan iguales, pero ambos rangos resultan ser menores que el número de incógnitas, como también establece el Teorema de Rouché). Y será “compatible determinado” cuando no haya ninguna ecuación absurda y el número de ecuaciones auténticas que hayan quedado coincida con el número de incógnitas (como también establece el Teorema de Rouché).

Y en el caso de resultar compatible el sistema dado, escribiremos el “sistema escalonado” obtenido (equivalente al dado) con todos sus coeficientes y todas las incógnitas, obteniendo las soluciones del mismo mediante despeje de las primeras incógnitas que aparezcan en cada una de sus ecuaciones; haciendo luego "sustituciones regresivas" (de la última incógnita despejada hacia las anteriores), con lo cual quedan finalmente todas halladas con sus valores numéricos (caso de solución única) o quedan en función de unas mismas incógnitas sobrantes, que hay que interpretar como parámetros reales (caso de infinitas soluciones). Ver ejemplos.

Nota 1: El rango de la matriz A^* es el número de filas no nulas de la “matriz escalonada por filas” obtenida en el procedimiento que hayamos aplicado. Y el rango de A es el número de filas no nulas de la “matriz escalonada” que le corresponde a A, que es la misma de A^* quitándole la última columna.

Nota 2: Si el sistema dado fuese “homogéneo”, la última columna de A^* estará formada solamente por ceros y en las “operaciones por filas” dicha columna se mantendrá siempre así, con lo cual aparecerá del mismo modo en la “matriz escalonada” que se obtenga finalmente. Por tanto, en estos casos resultará siempre $r(A) = r(A^*)$, con lo cual el sistema será siempre compatible (bastaría ver que siempre admitirá la “solución trivial” para llegar a la misma conclusión).

Ejemplo 1: Sea el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:
$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 4 \\ x - 2z = 1 \\ -3x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Su matriz ampliada es: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Esta matriz fue utilizada en el ejemplo 1 de

la pág. 5. Por tanto, una matriz "escalonada por filas" equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & -6 \end{pmatrix}$ (ver dicho ejemplo, que consistía en hallarla). Así que un sistema lineal esca-

lonado equivalente (por tanto, con las mismas soluciones) será:
$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2y - 3z = 2 \\ 21z = -6 \end{cases}$$

Observamos que no hay ninguna ecuación absurda (de la forma $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = k$, con $k \neq 0$). Luego el sistema es compatible. Pero, además el número de ecuaciones auténticas que han quedado al final son 3, que coincide con el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

(Se ve además que los rangos de A y A* son 3, luego el Teorema de Rouché dice lo mismo).

Y su solución se obtiene despejando la incógnita x de la primera ecuación, despejando la incógnita y de la segunda ecuación y despejando la incógnita z de la tercera ecuación. Se obtiene: $x = 1 + 2z$; $y = \frac{2+3z}{2}$; $z = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$ (podría haber quedado x en función de y también). Basta ahora "sustituir regresivamente" el valor de z obtenido en las otras dos expresiones, para tener la solución única del sistema dado (que puede comprobarse por sustitución directa en el mismo):

$$\boxed{z = -\frac{2}{7}} ; \quad \boxed{y = 1 + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}} ; \quad \boxed{x = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}}$$

Ejemplo 2: Sea el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:
$$\begin{cases} 3x - 6y - 3z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 2 \end{cases}$$

Su matriz ampliada es: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz fue utilizada en el ejemplo 2

de la pág. 6. Por tanto, una matriz "escalonada por filas" equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ver dicho ejemplo, que consistía en hallarla). Así que un sistema lineal es-

calonado equivalente (por tanto, con las mismas soluciones) será:
$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 9y - z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Observamos que no hay ninguna ecuación absurda, luego el sistema es compatible. Pero el número de ecuaciones auténticas es 2 (una de ellas es la identidad $0 = 0$; por tanto, desechable) y el número de incógnitas es 3, luego el sistema es compatible indeterminado.

(Se ve además que los rangos de A y A* son 2, luego el Teorema de Rouché dice lo mismo).

Sus soluciones se obtienen despejando x de la primera ecuación y despejando y de la segunda (la incógnita z queda libre como parámetro real del cual dependerán todas). Así tenemos $x = 2y + z$ e $y = \frac{2+z}{9}$. Basta ahora sustituir "regresivamente" la expresión de y encontrada en la de x para tener las infinitas soluciones:

$$\boxed{y = \frac{2+z}{9}} ; \quad \boxed{x = 2 \cdot \frac{2+z}{9} + z = \frac{4+2z}{9} + z = \frac{4+11z}{9}} \quad (z: \text{cualquier real})$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

También pueden expresarse las infinitas soluciones anteriores llamando $z = t$, con lo cual se tendrá:

$$\boxed{x = (4 + 11t)/9}; \quad \boxed{y = (2 + t)/9}; \quad \boxed{z = t},$$

con el parámetro t tomando valores arbitrarios en \mathbb{R} .

Ejemplo 3: Sea el sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas:
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 1 \\ -3x + y - 2z + 3t = 2 \\ 2x + 4y + 2z - 4t = 3 \end{cases}$$

Su matriz ampliada es: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vamos a hallar una matriz "escalonada por filas" equivalente a A^* .

Como ninguna fila comienza por 1 o por -1 , y la primera comienza por el valor más pequeño 2, dejamos las filas en el orden dado y tomamos el elemento 2 de la primera fila como "primer elemento pivote".

Para facilitar las operaciones (no usando fracciones), multiplicamos la segunda fila por 2:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_2 = 2 \cdot F_2)$$

Ahora sumamos a los elementos de la segunda fila los correspondientes de la primera, previamente multiplicados por 3. Y también sumamos a los elementos de la tercera fila los correspondientes de la primera, previamente multiplicados por -1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(operaciones: $F'_2 = F_2 + 3 \cdot F_1$; $F'_3 = F_3 + (-1) \cdot F_1$).

Ahora tomamos el -7 que está en la segunda columna como "segundo pivote" y sumamos a los elementos de la tercera fila los correspondientes de la segunda:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{operación: } F'_3 = F_3 + F_2)$$

Y, como vemos, esta es ya una matriz "escalonada por filas".

Entonces, un sistema lineal escalonado equivalente al dado es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 1 \\ -7y - z + 3t = 7 \\ 0 = 9 \end{cases}$$

que incluye una ecuación absurda ($0 = 9$), luego es un sistema incompatible. Y el sistema dado también lo será, por ser ambos equivalentes. (Alguien, al ver que el sistema dado tiene más incógnitas que ecuaciones, podría haber creído que sería compatible indeterminado, lo cual vemos que es falso en este caso).

Obsérvese que una "matriz escalonada por filas" equivalente a la matriz A del sistema dado es la anterior quitándole la última columna, luego vemos que su rango es 2 y el rango de A será el mismo; mientras que la matriz equivalente por filas de A^* es toda la anterior (sin quitarle la última columna) y su rango es 3, luego el de A^* también será 3 (diferentes rangos de A y A^* , luego el Teorema de Rouché también nos diría que el sistema dado es incompatible).

El método de Gauss-Jordan

Es una variante del método de Gauss, aplicable solamente a los sistemas lineales de tantas ecuaciones como incógnitas con determinante de los coeficientes diferente de cero (llamados "sistemas de Cramer"). Sabemos que en estos casos el sistema es compatible determinado (con solución única) y su solución puede hallarse por cocientes de determinantes (Teorema de Cramer, visto en la pág. 1). Pero también la solución puede hallarse por el método de Gauss ya explicado o por esta variante nueva llamada método de Gauss-Jordan (Camille Jordan fue un matemático francés del siglo XIX).

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Supongamos entonces que el sistema lineal tiene n ecuaciones y n incógnitas: El método de Gauss-Jordan consiste en realizar el proceso que conduce de la matriz ampliada A^* del sistema dado hasta una matriz “escalonada por filas” equivalente, para luego seguir operando por filas hasta obtener una “matriz diagonal” en las primeras n columnas (“equivalente por filas” a la matriz de coeficientes inicial A).

Por ejemplo, en el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas, después de aplicarle el método de Gauss explicado anteriormente, se llega a la equivalencia entre matrices siguiente:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & b'_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & b'_3 \end{pmatrix}$$

donde $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$ y $c_{33} \neq 0$ (por ser 3 el rango de la matriz A , con lo cual tendrá que ser 3 el rango de la matriz $C = (c_{ij})$ y el determinante de C es el producto $c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33}$).

Ahora, tomando c_{33} como “nuevo pivote”, seguimos operando por filas para conseguir ceros en los lugares de c_{23} y de c_{13} , con lo cual se tendrá la nueva equivalencia:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & b''_1 \\ 0 & d_{22} & 0 & b''_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & b''_3 \end{pmatrix}$$

donde $d_{11} \neq 0$, $d_{22} \neq 0$ y $d_{33} \neq 0$, por ser 3 el rango de A , con lo cual será 3 el rango de la nueva matriz $D = (d_{ij})$, cuyo determinante es $d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}$.

Ahora, tomando d_{22} como “segundo nuevo pivote”, podremos lograr un cero en el lugar del d_{12} haciendo la operación por filas que corresponda. Así se tendrá finalmente:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 & b'''_1 \\ 0 & e_{22} & 0 & b'''_2 \\ 0 & 0 & e_{33} & b'''_3 \end{pmatrix}$$

donde $e_{11} \neq 0$, $e_{22} \neq 0$ y $e_{33} \neq 0$ (obsérvese que las 3 primeras columnas constituyen ya una “matriz diagonal” (e_{ij}) , “equivalente por filas” a la matriz de coeficientes inicial A).

Pero entonces, el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas dado inicialmente será equivalente (misma solución) al sistema que corresponde a la última matriz obtenida, que es: $e_{11} \cdot x = b'''_1$; $e_{22} \cdot y = b'''_2$; $e_{33} \cdot z = b'''_3$. El cual nos da la solución:

$$\boxed{x = \frac{b'''_1}{e_{11}} ; \quad y = \frac{b'''_2}{e_{22}} ; \quad z = \frac{b'''_3}{e_{33}}}$$

Ejemplo: Resolver por el método de Gauss-Jordan el sistema:
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ -5y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

El sistema es de tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante Δ de la matriz de los coeficientes es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 18 - 20 + 3 = -4 \neq 0$$

Por tanto, podemos resolver este sistema por el método de Gauss-Jordan. Empezamos buscando la matriz escalonada por filas equivalente:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -10 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 35 & -25 & 50 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 36 \end{pmatrix}$$

(en la primera equivalencia se hizo $F'_3 = F_3 + (-2) \cdot F_1$; en la segunda equivalencia se hizo $F'_3 = -5 \cdot F_3$, y en la tercera equivalencia se hizo $F'_3 = F_3 + 7 \cdot F_2$).

Ya tenemos una “matriz escalonada por filas” equivalente a la matriz A^* inicial.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ahora tomaremos -4 como “nuevo pivote” para obtener ceros en la tercera columna, por encima de dicho elemento. Pero si dividimos la tercera fila por 4 , tenemos un “nuevo pivote” que es -1 (mucho mejor). Por tanto, lo primero que hacemos es $F'_3 = \frac{1}{4} \cdot F_3$, con lo cual tenemos:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 36 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Tomamos ahora en la tercera columna el -1 como “nuevo pivote”, para lograr primero un cero en lugar del 3 que está por encima y luego lograr un cero en lugar del -2 que está más arriba. Entonces hacemos $F'_2 = F_2 + 3 \cdot F_3$ y hacemos $F'_1 = F_1 + (-2) \cdot F_3$, quedando:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -13 \\ 0 & -5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

(nótese cómo estas operaciones no afectan a las dos primeras columnas)

Ahora dividimos la segunda fila por 5 ($F'_2 = \frac{1}{5} \cdot F_2$), y tomamos el -1 que queda en esa fila y en la segunda columna, como “nuevo segundo pivote”, para lograr un cero en la posición del 3 de la primera fila:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -13 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{operación } F'_1 = F_1 + 3 \cdot F_2)$$

Así hemos llegado a una “matriz escalonada por filas” que incluye en sus tres primeras columnas una “matriz diagonal”, que es lo que buscábamos.

Pero, si queremos que el sistema final nos dé directamente los tres valores de las incógnitas, conviene llevar esta “matriz diagonal” a la matriz identidad I_3 , para lo cual cambiamos de signo las dos últimas filas:

$$A^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \text{ cuyo sistema lineal asociado es } \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = -9 \end{cases}$$

que nos está dando la solución única del sistema inicial (se puede comprobar sustituyéndola en el mismo).

Cálculo de la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan permite un cálculo de la matriz inversa correspondiente a una matriz cuadrada que tenga determinante distinto de cero. Cálculo diferente al conocido, que se basaba en la matriz adjunta, según el cual $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [adj(A)]^t$, visto en la Sección 9.1.

Vamos a explicar el procedimiento para una matriz cuadrada de orden 3 por simplicidad, pero se puede razonar análogamente con matrices de mayor orden.

Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y supongamos que $|A| \neq 0$, para que tenga inversa.

Su matriz inversa la podemos escribir así: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

de modo que tendrá que cumplirse $A \cdot A^{-1} = I_3$.

O sea, tiene que cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero entonces, por definición del producto de matrices, será:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Sistema 1)}; \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Sistema 2)}; \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (Sistema 3)}$$

O sea, que la primera columna de A^{-1} será la solución única del Sistema 1 (que es de Cramer), la segunda columna de A^{-1} será la solución única del Sistema 2 (que también es de Cramer) y la tercera columna de A^{-1} será la solución única del Sistema 3 (también de Cramer). Esto demuestra que la matriz A^{-1} existe y es única.

Bastará entonces que resolvamos los tres sistemas anteriores para que tengamos las tres columnas de A^{-1} , con lo cual se conocerá esta matriz.

Ahora bien, la única diferencia entre los tres sistemas es los valores de sus términos independientes: (1, 0, 0) para el Sistema 1; (0, 1, 0) para el Sistema 2, y (0, 0, 1) para el Sistema 3. Por tanto, las matrices ampliadas de los tres sistemas son casi iguales (cambia solamente la cuarta columna, de los términos independientes). Con lo cual, el trabajo de aplicar el método de Gauss-Jordan a uno de ellos se repetirá exactamente igual al resolver los otros dos sistemas, pues dicho trabajo depende solamente de la matriz de los coeficientes que es común.

Entonces lo que se hace es aplicar una sola vez el método de Gauss-Jordan, pero a una matriz de tipo 3 x 6, resultante de ampliar la matriz A de los coeficientes con las tres columnas de términos independientes, una tras otra.

Entonces la matriz tres veces ampliada será:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, al aplicar a M el método de Gauss-Jordan hasta transformar la matriz A en la matriz unitaria I_3 , habremos encontrado simultáneamente los nuevos términos independientes que corresponden a los sistemas equivalentes al 1, al 2 y al 3, como si los hubiésemos resuelto separadamente por el mismo método.

Así quedará al final: $M \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, donde la 4ª columna inicial $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se

habrá transformado en la nueva 4ª columna $\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$; donde la 5ª columna inicial $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se habrá

transformado en la nueva 5ª columna $\begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$, y donde la 6ª columna inicial $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se habrá trans-

formado en la nueva 6ª columna $\begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

Basta recordar, ahora, que en el método de Gauss-Jordan, cuando se transforma A en la matriz unitaria I_3 , la solución única del sistema está en la columna de términos independientes de la matriz final (ver ejemplo anterior), para que sepamos que la solución del Sistema 1 estará en la 4ª columna de la matriz final, la solución del Sistema 2 estará en la 5ª columna de esa misma matriz y la solución del Sistema 3 será la 6ª columna de la misma matriz.

Conclusión: Las tres últimas columnas de la matriz final (donde aparecerá I_3 como equivalente por filas a la matriz A) serán las columnas de A^{-1} (**luego tendremos calculada esa inversa**).

Ejemplo: Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se trata de la matriz de los coeficientes del sistema que pusimos como ejemplo para resolver por el método de Gauss-Jordan en la pág. 10. Sabemos de dicho ejemplo que $|A| = -4 \neq 0$, con lo cual existe A^{-1} .

Vamos a calcularla por el método de Gauss-Jordan:

Partimos de la matriz triplemente ampliada $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y le aplicamos a

esta matriz M las mismas operaciones por filas que usamos en aquel ejemplo para transformar A en I_3 .

Esas operaciones habían sido: $F'_3 = F_3 - 2 \cdot F_1$; $F'_3 = -5 \cdot F_3$ y $F'_3 = F_3 + 7 \cdot F_2$, para obtener en las tres primeras columnas una “matriz escalonada” equivalente a A; luego hicimos las operaciones $F'_3 = (1/4) \cdot F_3$; $F'_2 = F_2 + 3 \cdot F_3$; $F'_1 = F_1 - 2 \cdot F_3$; $F'_2 = (1/5) \cdot F_2$ y $F'_1 = F_1 + 3 \cdot F_2$ para obtener en las tres primeras columnas una “matriz diagonal” equivalente a A, y finalmente $F'_2 = (-1) \cdot F_2$ y $F'_3 = (-1) \cdot F_3$ para obtener la matriz I_3 en las tres primeras columnas.

Entonces la 4ª columna se habrá transformado en $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$. Al mismo tiempo, la 5ª columna se

habrá transformado en $\begin{pmatrix} 1/4 \\ -5/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}$. Y también la 6ª columna se habrá transformado en $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$.

Comprobarlo, aplicándole a M las operaciones por filas citadas anteriormente que habíamos aplicado a A^* en aquel ejemplo.

Conclusión: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -5/4 & 3/4 \\ -5/2 & -7/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

Recordemos aquí el cálculo de A^{-1} por el método de la matriz adjunta: Se tiene

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 10 \\ -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego $[adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 10 & 7 & -5 \end{pmatrix}$, pero como $|A| = -4$ se tendrá finalmente:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 10 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -5/4 & 3/4 \\ -5/2 & -7/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Nota: Aquí la parte más costosa en operaciones es el cálculo de la matriz adjunta, que representa calcular 9 menores de orden 2 y aplicarles los signos correspondientes (además del cálculo del determinante de orden 3).

Pero si la matriz dada fuese de orden 4, su adjunta requeriría el cálculo de 16 menores de orden 3, además del cálculo del único determinante de orden 4, lo cual es bastante trabajo. Sin embargo, la aplicación del método de Gauss-Jordan a este caso aumenta el número de operaciones por filas a realizar, pero la situación es más manejable (hay que hacer tres ceros con el primer pivote, dos ceros con el segundo pivote y un cero más con el tercer pivote, para llegar a la “matriz escalonada” equivalente a A (o sea, 6 ceros en vez de 3) y luego hay que hacer otros 6 ceros para llegar a la “matriz diagonal” equivalente a A (total: 12 ceros, pero el cálculo de los 6 últimos es más sencillo que el de los 6 primeros; además, si las matrices por las que se pasa tienen elementos cero en alguna de las posiciones que nos interesan, nos ahorraremos las operaciones por fila correspondientes).

Y si pensamos en matrices más grandes, la ventaja del método de Gauss-Jordan aumenta respecto al método de los adjuntos, por el menor trabajo. Además, el método de Gauss-Jordan puede programarse con menor dificultad que el método de los adjuntos, con lo cual suele aplicarse cuando se trata de obtener matrices inversas utilizando un computador o una calculadora programable.