

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS EN \mathbb{R} :

Si tenemos el polinomio de coeficientes reales, de grado n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

caben tres posibilidades:

- 1) Todas las raíces de $P(x) = 0$ son reales, teniéndose entonces

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1)^{n_1} \cdot (x - r_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - r_k)^{n_k}$$

donde los exponentes son las multiplicidades de las raíces respectivas, con $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

- 2) Todas las raíces de $P(x) = 0$ son imaginarias, teniéndose entonces

$$P(x) = a_n \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}$$

con $p_1^2 - 4q_1 < 0$, $p_2^2 - 4q_2 < 0$, ..., $p_s^2 - 4q_s < 0$ (o sea, cada polinomio de segundo grado posee dos raíces imaginarias conjugadas de multiplicidades dadas por el correspondiente exponente), siendo $2m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_s = n$.

- 3) $P(x) = 0$ posee raíces reales y también raíces imaginarias, teniéndose entonces

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - r_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}$$

con $n_1 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_s = n$

ECUACIONES DE RECTAS EN EL PLANO:

General: $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$ o $B \neq 0$)

Explícita: $y = mx + b$

Canónica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$)

Punto-pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Punto-punto: $(x_1 - x_0) \cdot (y - y_0) = (y_1 - y_0) \cdot (x - x_0)$

Paramétricas: $x = x_0 + pt$; $y = y_0 + qt$ ($t \in \mathbb{R}$) ($p \neq 0$ o $q \neq 0$)

ÁNGULO MENOR ENTRE DOS RECTAS EN EL PLANO:

Si las rectas son $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ ($A_1 \neq 0$ o $B_1 \neq 0$) y $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ ($A_2 \neq 0$ o $B_2 \neq 0$), se tiene:

$$\alpha = \arccos \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Si las rectas son $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$ se tiene:

$$\alpha = \arctan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad (\text{si } 1 + m_1 \cdot m_2 \neq 0)$$

o bien $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (si $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$)

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL PLANO:

Si el punto es $P(x_0, y_0)$ y la recta es $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$ o $B \neq 0$), se tiene: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

CÓNICAS ORDINARIAS EN FORMA CANÓNICA O REDUCIDA:

Ecuación de la **circunferencia** de centro $C(h, k)$ y radio r :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación de la **elipse** de centro $C(h, k)$ y semiejes " a " (horizontal) y " b " (vertical) :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b)$$

Ecuaciones de las **hipérbolas horizontal y vertical** de centro $C(h, k)$ con parámetros " a " y " b " :

$$\text{horizontal: } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{vertical: } -\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

cuyas asíntotas comunes son

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

Ecuación de la **parábola horizontal** de vértice $V(h, k)$ y distancia " p " entre vértice y foco:

$$(y - k)^2 = 4p \cdot (x - h)$$

Ecuación de la **parábola vertical** de vértice $V(h, k)$ y distancia " p " entre vértice y foco:

$$(x - h)^2 = 4p \cdot (y - k)$$

CONICAS DEGENERADAS EN FORMA CANÓNICA O REDUCIDA:

Ecuación de una **circunferencia degenerada en el punto** (h, k) :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

Ecuación de una **elipse degenerada en el punto** (h, k) , con parámetros a y b (diferentes):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 0$$

Ecuación de una **hipérbola horizontal o vertical degenerada en dos rectas que se cortan en el punto** (h, k) , con parámetros a y b :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 0$$

Ecuación de una **parábola horizontal degenerada en dos rectas paralelas horizontales**: $(y - a) \cdot (y - b) = 0$ ($a \neq b$).

Ecuación de una **parábola horizontal degenerada en dos rectas horizontales coincidentes**: $(y - a)^2 = 0$

Ecuación de una **parábola vertical degenerada en dos rectas paralelas verticales**: $(x - a) \cdot (x - b) = 0$

($a \neq b$)

Ecuación de una **parábola vertical degenerada en dos rectas verticales coincidentes**: $(x - a)^2 = 0$

CÓNICAS HORIZONTALES O VERTICALES EN FORMA GENERAL:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (A \neq 0 \text{ o } B \neq 0)$$

Incluye cónicas ordinarias, degeneradas e imaginarias.

$$\text{circunferencia} \Rightarrow A = B$$

$$\text{elipse} \Rightarrow \text{signo de } A = \text{signo de } B, \text{ pero } A \neq B$$

$$\text{hipérbola} \Rightarrow \text{signo de } A \neq \text{signo de } B$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

$$\text{parábola horizontal} \Rightarrow \boxed{A = 0 \text{ y } B \neq 0}$$

$$\text{parábola vertical} \Rightarrow \boxed{B = 0 \text{ y } A \neq 0}$$

CÓNICAS NO HORIZONTALES NI VERTICALES EN FORMA TOTALMENTE GENERAL:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad (B \neq 0)$$

Incluye cónicas ordinarias, degeneradas e imaginarias.

Ángulo de rotación para eliminar término Bxy :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \text{ arc tag } \left(\frac{B}{A-C} \right)}, \quad (\text{si } A \neq C)$$

$$\text{o bien } \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}, \quad (\text{si } A = C)$$

Ecuaciones del cambio de coordenadas por rotación de ejes de ángulo α :

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \text{sen} \alpha \\ y' = -x \cdot \text{sen} \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \text{sen} \alpha \\ y = x' \cdot \text{sen} \alpha + y' \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

CUÁDRICAS ORDINARIAS EN FORMA CANÓNICA O REDUCIDA:

Ecuación de una **superficie esférica** de centro $C(h, k, l)$ y radio r : $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2}$

Ecuación de un **elipsoide** de centro $C(h, k, l)$ y semiejes a (paralelo al eje OX), b (paralelo al eje OY) y c (paralelo al eje OZ):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Ecuación de un **hiperboloide de una hoja vertical**, de centro $C(h, k, l)$ y parámetros a, b y c :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Ecuación de un **hiperboloide de dos hojas vertical**, de centro $C(h, k, l)$ y parámetros a, b y c :

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Ecuación de un **paraboloide elíptico o de revolución vertical**, de vértice $V(h, k, l)$ y parámetros a y b (de revolución si es $a = b$):

$$z-l = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Ecuación de un **paraboloide hiperbólico vertical**, de vértice $V(h, k, l)$ y parámetros a y b :

$$z-l = \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Ecuación de una **superficie cónica cuadrática vertical**, de centro $C(h, k, l)$ y parámetros a, b y c :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

CUÁDRICAS VERTICALES, HORIZONTALES CON LA DIRECCIÓN DEL EJE OX U HORIZONTALES CON LA DIRECCIÓN DEL EJE OY, EN FORMA GENERAL:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0}$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

siendo $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Incluye cuádricas ordinarias, degeneradas e imaginarias.

CUÁDRICAS EN FORMA TOTALMENTE GENERAL:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Mx + Ny + Pz + Q = 0$$

El primer miembro tiene que ser de grado dos. Incluye cuádricas ordinarias en cualquier posición, degeneradas en cualquier posición e imaginarias.

VECTORES EN EL ESPACIO \mathbb{R}^3 :

Base canónica: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Componentes escalares o coordenadas respecto a la base canónica: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

Producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, siendo $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$

Producto vectorial: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha$, siendo $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$

Producto mixto: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

ECUACIONES DE PLANOS EN EL ESPACIO:

General: $Ax + By + Cz + D = 0$, siendo $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Canónica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, siendo $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Paramétricas: $x = x_0 + au + mv$; $y = y_0 + bu + nv$; $z = z_0 + cu + pv$ ($u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$)

Siendo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $(m, n, p) \neq (0, 0, 0)$ y $(a, b, c) \neq k(m, n, p)$ con $k \in \mathbb{R}$.

ECUACIONES DE RECTAS EN EL ESPACIO:

Forma continua: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, siendo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Forma paramétrica: $x = x_0 + at$; $y = y_0 + bt$; $z = z_0 + ct$ ($t \in \mathbb{R}$), siendo $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Por intersección de dos planos: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Mx + Ny + Pz + Q = 0 \end{cases}$,

siendo $(A, B, C) \neq k(M, N, P)$, con $k \in \mathbb{R}$.

ÁNGULO MENOR DE DOS PLANOS: Siendo los planos $Ax + By + Cz + D = 0$ y $Mx + Ny + Pz + Q = 0$,

$$\alpha = \arccos \left| \frac{A \cdot M + B \cdot N + C \cdot P}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} \right|$$

ÁNGULO MENOR DE DOS RECTAS: Siendo las rectas $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ y $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$,

$$\alpha = \arccos \left| \frac{a \cdot m + b \cdot n + c \cdot p}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right|$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

ÁNGULO DE RECTA Y PLANO: Siendo la recta $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$\alpha = \arcsen \left| \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

DISTANCIA ENTRE RECTA Y PLANO: Siendo el punto (x_0, y_0, z_0) y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

LONGITUDES EN ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS:

Perímetro de polígono regular de n lados (longitud del lado " l "): $n \cdot l$

Longitud de circunferencia de radio " r ": $2\pi \cdot r$

ÁREAS DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS:

Triángulo de base " b " y altura " a ": $\frac{b \cdot a}{2}$

Paralelogramo de base " b " y altura " a ": $b \cdot a$

(incluye cuadrado, rectángulo, rombo y romboide)

Trapecio de bases " B " y " b " con altura " a ": $\frac{B+b}{2} \cdot a$

Polígono regular de n lados, siendo " l " la longitud de un lado y " a " una apotema (distancia del centro al punto medio de un lado): $\frac{n \cdot l \cdot a}{2}$

Círculo de radio " r ": $\pi \cdot r^2$

VOLÚMENES DE ALGUNOS CUERPOS GEOMÉTRICOS:

Prisma o cilindro, con área de la base " B " y altura " a ": $B \cdot a$

Pirámide o cono, con área de la base " B " y altura " a ": $\frac{B \cdot a}{3}$

Esfera de radio " r ": $\frac{4 \pi \cdot r^3}{3}$

ÁREAS LATERALES DE ALGUNOS CUERPOS GEOMÉTRICOS:

Prisma regular recto, con perímetro de la base " P " y altura " a ": $P \cdot a$

Cilindro circular recto, con radio de la base " r " y altura " a ": $2 \pi \cdot r \cdot a$

Pirámide regular recta, con perímetro de la base " P " y apotema " a ": $\frac{P \cdot a}{2}$

Cono circular recto, con radio de la base " r " y generatriz " g ": $\pi \cdot r \cdot g$

Superficie esférica de radio " r ": $4 \pi \cdot r^2$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PRINCIPALES:

Fundamentales:

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

$$\operatorname{tag} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad ; \quad \operatorname{cot} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \quad ; \quad \operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x} \quad ; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \quad ; \quad 1 + \operatorname{tag}^2 x = \operatorname{sec}^2 x \quad ; \quad 1 + \operatorname{cot}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Suma y diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y \pm \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x \pm y) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y \mp \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tag}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tag} x \pm \operatorname{tag} y}{1 \mp \operatorname{tag} x \cdot \operatorname{tag} y}$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x \quad ; \quad \operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad ; \quad \operatorname{tag} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tag} x}{1 - \operatorname{tag}^2 x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2} \quad ; \quad \operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2} \quad ; \quad \operatorname{tag}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{1 + \operatorname{cos} 2x}$$

Productos convertidos en sumas o diferencias:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

$$\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{cos}(x + y) + \operatorname{cos}(x - y)]$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{cos}(x - y) - \operatorname{cos}(x + y)]$$

Sumas o diferencias convertidas en productos:

$$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{x \mp y}{2} \quad ; \quad \operatorname{cos} x + \operatorname{cos} y = 2 \cdot \operatorname{cos} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$$

FUNCIONES BÁSICAS (reales de una variable real):

Nombre	Expresión	Dominio	Recorrido
Constante	$y = k$	\mathbb{R}	$\{k\}$
Identidad	$y = x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Potencial par	$y = x^n$ (n par pos.)	\mathbb{R}	$[0, +\infty)$
Potencial impar	$y = x^n$ (n impar pos.)	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Radical par	$y = \sqrt[n]{x}$ (n par)	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
Radical impar	$y = \sqrt[n]{x}$ (n impar)	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Exponencial	$y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$)	\mathbb{R}	$(0, +\infty)$
Logarítmica	$y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$	\mathbb{R}

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Seno	$y = \operatorname{sen} x$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
Coseno	$y = \operatorname{cos} x$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
Tangente	$y = \operatorname{tag} x$	$\mathbb{R} - \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots\}$	\mathbb{R}
Arco seno	$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Arco coseno	$y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
Arco tangente	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tag} x$	\mathbb{R}	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
Valor absoluto	$y = x $	\mathbb{R}	$[0, +\infty)$

VALORES NOTABLES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	x
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$
$\operatorname{cos} x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	x

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tag} x$
$\operatorname{tag} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	x

FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS INVERSAS:

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tagh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x} \quad ; \quad \operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{arg} \operatorname{cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad , \quad \text{para todo } x \geq 1$$

$$\operatorname{arg} \operatorname{senh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad , \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arg} \operatorname{tagh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \text{para todo } x \in (-1, 1)$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTERPOLACIÓN POLINÓMICA:

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Fórmula de Lagrange: Datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, siendo $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Polinomio interpolador:
$$P_n(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

siendo $L_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}$, para $0 < i < n$, siendo $L_0(x) = \frac{(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot \dots \cdot (x_0-x_n)}$

y siendo $L_n(x) = \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0) \cdot \dots \cdot (x_n-x_{n-1})}$.

Fórmula de Newton-Gregory: Datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, con $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h > 0$.

Polinomio interpolador:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

donde $\Delta y_0 = y_1 - y_0$; $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$; ...; $\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$ (tabla de diferencias progresivas).

FUNCIONES EQUIVALENTES USUALES:

Infinitésimos equivalentes:

$\text{sen}(u)$ equivalente a u ($u \rightarrow 0$) $\text{tag}(u)$ equivalente a u ($u \rightarrow 0$)

$\text{arc sen}(u)$ equiv. a u ($u \rightarrow 0$) $\text{arc tag}(u)$ equiv. a u ($u \rightarrow 0$)

$1 - \cos(u)$ equivalente a $\frac{u^2}{2}$ ($u \rightarrow 0$)

$a^u - 1$ equivalente a $u \cdot \ln a$ ($u \rightarrow 0$) ($0 < a \neq 1$)

$\log_a(u)$ equivalente a $(u - 1) \cdot \log_a e$ ($u \rightarrow 1$) ($0 < a \neq 1$)

$u^\alpha - 1$ equivalente a $\alpha \cdot (u - 1)$ ($u \rightarrow 1$) ($\alpha \neq 0$)

Infinitos equivalentes:

$(ax^n + bx^{n-1} + \dots)$ equivalente a ax^n ($x \rightarrow +\infty$) o ($x \rightarrow -\infty$) ($a \neq 0$)

$n!$ equivalente a $n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$ ($n \rightarrow \infty$)

$\sqrt[n]{n!}$ equivalente a n/e ($n \rightarrow \infty$)

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ equivalente a $\log_e(n)$ ($n \rightarrow \infty$)

ALGUNOS INFINITOS DE ÓRDENES CRECIENTES:

$\log_a x \ll x^p \ll a^x \ll x^x$ ($x \rightarrow +\infty$) ($a > 1$) ($p > 0$)

$\log_a(n) \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$ ($n \rightarrow \infty$) ($a > 1$) ($p > 0$)

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA RESOLVER $f(x) = 0$ en $[a, b]$:

Condiciones:

a) $f(a) \cdot f(b) < 0$ b) $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$ c) $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$

Fórmula recurrente:
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Aproximación inicial: $x_0 = a$, si $f(a)$ tiene el mismo signo que $f''(x)$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

$x_0 = b$, si $f(b)$ tiene el mismo signo que $f''(x)$

Acotación del error de la aproximación x_n :

$$|\text{error de } x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (m_1 \text{ es el mínimo de } |f'(x)| \text{ en } [a, b])$$

INTEGRALES INMEDIATAS:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) & \int x^{-1} dx &= \ln|x| + C \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0; a \neq 1) \\ \int \operatorname{sen} x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \operatorname{sen} x + C \\ \int \operatorname{tag} x dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \operatorname{cot} x dx &= \ln|\operatorname{sen} x| + C \\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} &= -\operatorname{cot} x + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tag} x + C \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arc} \operatorname{tag} x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \end{aligned}$$

CAMBIO UNIVERSAL DE VARIABLE PARA INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES DE LAS TRIGONÓMICAS:

$$\operatorname{tag} \frac{x}{2} = t \quad \text{para el cual:} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

REDUCCIÓN DE INTEGRALES DE POTENCIAS DEL COSENO:

$$n \cdot I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) \cdot I_{n-2}, \quad \text{siendo } I_n = \int \cos^n x dx$$

REDUCCIÓN DE INTEGRALES DE POTENCIAS DEL SENO:

$$n \cdot I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot I_{n-2}, \quad \text{siendo } I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx$$

ELIMINACIÓN DE RADICALES CUADRÁTICOS EN LAS INTEGRALES MEDIANTE CAMBIOS TRIGONÓMICOS E HIPERBÓLICOS:

Radical $\sqrt{1-x^2}$: Conviene hacer $x = \operatorname{sen} t$ o bien $x = \cos t$

Radical $\sqrt{1+x^2}$: Conviene hacer $x = \operatorname{senh} t$ o bien $x = \operatorname{tag} t$

Radical $\sqrt{x^2-1}$: Conviene hacer $x = \operatorname{cosh} t$ o bien $x = \sec t$

CAMBIOS DE EULER PARA INTEGRALES CON $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

Si $a > 0$, hacer $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t$

Si $c \geq 0$, hacer $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x \cdot t + \sqrt{c}$

Si $b^2 - 4ac > 0$ hacer $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - p)$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

siendo p una de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

INTEGRACIÓN APROXIMADA:

Fórmulas para paso variable: Se dan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, siendo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Rectángulos 1:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Rectángulos 2:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Rectángulos 3:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Trapezios:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Fórmulas para paso constante: Las diferencias $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$ son todas de valor h .

Rectángulos 1:
$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^n y_{k-1}$$

Rectángulos 2:
$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^n y_k$$

Trapezios:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot (E + 2R)$$

Simpson:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot (E + 4I + 2P)$$

siendo $E = y_0 + y_n$; $R = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}$; $I = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}$ (n par, con lo cual será $n - 1$ impar) y $P = y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}$ (n par, con lo cual será $n - 2$ par).

FUNCIONES EULERIANAS:

Función gamma:
$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{p-1} dx \quad (p > 0)$$

Función beta:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cdot \cos^{2q-1} x dx \quad (p > 0 \text{ y } q > 0).$$

Relación fundamental entre ellas:
$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

PRINCIPALES DESARROLLOS EN SERIE DE MACLAURIN:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (\text{válido en todo } \mathbb{R})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (\text{válido en todo } \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (\text{válido en todo } \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (\text{válido en } (-1, 1])$$

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (\text{válido en todo } \mathbb{R})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (\text{válido en todo } \mathbb{R})$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots \quad (\text{válido en } (-1, 1))$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

siendo $\binom{\alpha}{0} = 1$ y $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$ para k entero positivo.

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \frac{105}{3456}x^9 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

(válido en $[-1, 1]$) (el término general vale para $n \geq 1$)

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 - \frac{105}{3456}x^9 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dots$$

(válido en $[-1, 1]$) (el término general vale para $n \geq 1$)

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (\text{válido en } [-1, 1])$$
