INECUACIONES RACIONALES

Introducción

En todo lo que sigue supondremos que los polinomios son de una variable y sus coeficientes números reales. Se da por conocido lo básico de la teoría de polinomios: Grado de un polinomio; suma, diferencia, producto y cociente de polinomios; prueba de la división y relación de los grados de dividendo, divisor, cociente y resto; resolución de ecuaciones polinómicas de primer grado, de segundo grado y bicuadradas; Regla de Ruffini; teorema del resto y cálculo de raíces enteras y fraccionarias de los polinomios de grado mayor que dos y no bicuadrados que tengan coeficientes racionales (enteros o fraccionarios).

Se llama "expresión racional de una variable" a cualquier cociente indicado de dos polinomios con dicha variable. O sea, que si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, una expresión racional será el cociente $P(x)/Q(x)$ y otra expresión racional será $Q(x)/P(x)$.

Así como una "ecuación polinómica de una variable" es cualquier igualdad entre polinomios (que podrá llevarse finalmente a la forma $P(x) = 0$, siendo $P(x)$ un cierto polinomio), una "inecuación polinómica de una variable" será cualquier desigualdad entre polinomios (que podrá llevarse a alguna de las cuatro formas básicas siguientes: $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$, donde $P(x)$ es también cierto polinomio).

De modo análogo, una "ecuación racional de una variable" es cualquier igualdad entre expresiones racionales (que podrá llevarse a la forma $P(x)/Q(x) = 0$, siendo P y Q ciertos polinomios). Y una "inecuación racional de una variable" será cualquier desigualdad entre expresiones racionales, que podrá llevarse a alguna de las cuatro formas básicas siguientes:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \qquad [1]$$

Estas inecuaciones racionales serán realmente "inecuaciones polinómicas" cuando el denominador $Q(x)$ sea una constante (la cual puede eliminarse multiplicando ambos miembros de la inecuación por la misma o dividiendo todos los coeficientes de $P(x)$ por esa constante) o también cuando la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ sea exacta (en cuyo caso resolveríamos una "inecuación polinómica", usando el cociente exacto obtenido como polinomio del primer miembro). Y las inecuaciones anteriores serán realmente "fraccionarias" cuando el denominador sea un polinomio de grado 1 como mínimo y la división de numerador entre denominador no sea exacta.

1) Resolución de inecuaciones racionales en general

"Solución" de una cierta "inecuación racional de una variable" (dada) será cualquier valor real de dicha variable para el cual esa inecuación se transforme en **una "desigualdad de números reales" que sea cierta**, utilizando para ello los valores correspondientes de los polinomios numerador y denominador que aparezcan en la forma básica de la inecuación dada (o, en general, usando los valores de ambos miembros racionales de la inecuación, pues esta podría no estar en su forma básica).

Por ejemplo, si la inecuación dada fuese $(2x + 1)/(x - 3) \leq 0$ (en forma básica) el valor $x = 0$ es una "solución", pues los valores correspondientes de los polinomios del numerador y del denominador son 1 y -3 (respectivamente) dando lugar a la desigualdad $1/(-3) \leq 0$ que es cierta. También es "solución" $x = 1$, pues al sustituir ese valor en la inecuación resulta la desigualdad $3/(-2) \leq 0$ que también es cierta. Así mismo es "solución" $x = -1/2$, pues al sustituir este valor en la inecuación queda la desigualdad $0/\left(-\frac{1}{2} - 3\right) \leq 0$, o sea $0 \leq 0$, que es cierta. En cambio, el valor $x = 4$ es "no solución" pues al sustituirlo nos queda $9/1 \leq 0$, que es una desigualdad falsa. También es "no solución" el valor $x = 3$, pues para dicho valor el denominador de la desigualdad obtenida vale cero, con lo cual esta desigualdad no puede cumplirse ya que el cociente indicado en la misma no existe.

Otro ejemplo, con una inecuación racional que no está en forma básica sería $\frac{3}{x} + 5 > x^2 - 3x$, para la cual es "solución" $x = 1$ (porque $\frac{3}{1} + 5 > 1^2 - 3 \cdot 1$ es la desigualdad cierta $8 > -2$) y también es "solución" $x = 3$ (porque $\frac{3}{3} + 5 > 3^2 - 3 \cdot 3$ es la desigualdad cierta $6 > 0$). Y una "no solución" es por ejemplo $x = 0$ (porque no está definido el cociente $\frac{3}{0}$) y otra "no solución" es $x = -3$ (porque $\frac{3}{-3} + 5 > (-3)^2 - 3 \cdot (-3)$ es la desigualdad falsa $4 > 18$).

Vemos entonces que puede haber muchas "soluciones" de una inecuación racional dada y también puede haber muchas "no soluciones" de esa misma inecuación. Pues bien, **resolver** una inecuación es encontrar el conjunto de **todas** sus soluciones (llamado brevemente su "**conjunto solución**").

Así, resolviendo la inecuación $(2x + 1)/(x - 3) \leq 0$, dada anteriormente (más adelante veremos cómo se procede para ello), encontramos como "conjunto solución" el intervalo $[-1/2\ ,3)$. Obsérvese que incluye las soluciones ya comprobadas $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1/2$, pero también incluye infinitas más, y no incluye como soluciones $x = 4$, $x = 3$ y otros infinitos números reales (todos los que sean menores que $-1/2$ y todos los que sean mayores o iguales que 3).

Como hemos visto en el ejemplo anterior, en muchas ocasiones el "conjunto solución" de una inecuación incluye infinitos valores (suele ser un intervalo o una unión de intervalos). Pero en muchas otras ocasiones el "conjunto solución" posee un solo valor o un número finito de valores. Y a veces el conjunto solución es vacío (cuando no haya ni una solución) o bien es todo $\mathbb{R}$ (cuando cualquier número real sea solución).

Ejemplos:

1) El conjunto solución de la inecuación $(x^2 - 4)^2 \leq 0$ incluye solamente los valores $x = -2$ y $x = 2$, porque el primer miembro nunca será menor que cero (al ser un cuadrado) y será cero solamente para para esos dos valores (que son las raíces del polinomio $x^2 - 4$).

2) La inecuación $x^4 + 3x^2 \geq 0$ tiene conjunto solución $\mathbb{R}$, pues la cumple cualquier número real.

3) La inecuación $x^2 + 1 < 0$ tiene conjunto solución $\emptyset$ (vacío), pues no existe número real que la cumpla.

EN LO QUE SIGUE EXPLICAREMOS CÓMO DETERMINAR EL "CONJUNTO SOLUCIÓN" DE CUALQUIER INECUACIÓN RACIONAL DADA (polinómica o fraccionaria).

INECUACIONES RACIONALES

En primer lugar: Dos inecuaciones de llaman "equivalentes" si poseen el mismo "conjunto solución" (toda solución de la primera es solución de la segunda y viceversa).

Muchas veces las inecuaciones no se tienen escritas inicialmente en una de las cuatro formas [1] indicadas en la página anterior. Pues bien, para hallar el "conjunto solución" de una cualquiera, lo primero que debemos hacer es llevarla a alguna de esas formas, efectuando operaciones válidas entre desigualdades de números reales, con lo cual obtendremos otra inecuación que será "equivalente" a la dada y podrá resolverse más fácilmente (por el método que explicaremos).

Por este motivo, recordamos las tres siguientes propiedades de las desigualdades entre números reales, que serán muy utilizadas:

1) Si es $a < b$, se tendrá $a + c < b + c$ y también $a - c < b - c$, para todo c real (análogamente sustituyendo $<$ por $\leq$ en las tres relaciones). Y también esto se cumple si sustituimos $<$ por $>$ o por $\geq$ en las tres relaciones. Esta propiedad es la que permite pasar términos de un miembro de la inecuación al otro, con tal que cambiemos sus signos al hacer el cambio. Por ejemplo, la inecuación $2x^2 - \frac{3}{x} + 5x \geq 7 - x^3$ es equivalente a esta otra: $x^3 - \frac{3}{x} \geq -2x^2 - 5x + 7$.

2) Si es $a < b$, se tendrá $a \cdot c < b \cdot c$ y también $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, para todo c positivo (análogamente sustituyendo $<$ por $\leq$ en las tres relaciones). Y también se cumple lo anterior si sustituimos $<$ por $>$ o por $\geq$ en las tres relaciones. Esta propiedad permite simplificar **una constante positiva** que multiplique o divida a los dos miembros de una inecuación, así como despejar la variable x en inecuaciones de primer grado donde el coeficiente de esa variable **sea positivo**. Por ejemplo, podemos simplificar $8x^2 - 2 < 10 + 4x$ para escribir $4x^2 - 1 < 5 + 2x$, que es inecuación equivalente a la anterior, y también podemos despejar x de la inecuación $2x > 3$ para obtener $x > 3/2$, que también es inecuación equivalente.

3) Si es $a < b$, se tendrá $a \cdot c > b \cdot c$ y también $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, para todo c negativo (análogamente sustituyendo $<$ por $\leq$ en la primera relación y $>$ por $\geq$ en las dos últimas). Y también se cumple lo anterior si sustituimos $<$ por $>$ (o por $\geq$) en la primera relación y $>$ por $<$ (o por $\leq$) en las dos últimas. Esta propiedad permite simplificar **una constante negativa** que multiplique o divida a toda una inecuación; también cambiar de signo ambos miembros de una inecuación; así como despejar la variable en inecuaciones de primer grado donde el coeficiente de dicha variable **sea negativo**. Por ejemplo, podemos simplificar $-x + 5/2 > -x^2 - 3/2$ multiplicando ambos miembros por -2 , para obtener la nueva inecuación $2x - 5 < 2x^2 + 3$ (donde no hay fracciones y no hay tantos signos negativos), y también podemos despejar la variable en la inecuación $-3x \leq 6$ dividiendo ambos miembros por -3 para obtener la inecuación equivalente $x \geq -2$.

Ejemplo: Obtener una inecuación racional equivalente a $\frac{1}{x} + 5 \leq \frac{2}{x+3} - 8x$ que esté en alguna de las cuatro formas [1].

Se trata de una inecuación racional fraccionaria (no es polinómica, por tener la variable x en dos denominadores; bastaría con que x estuviese en uno de ellos).

Inicialmente podemos efectuar operaciones en ambos miembros escribiendo la inecuación:

$$\frac{5x+1}{x} \leq \frac{2-8x(x+3)}{x+3} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{5x+1}{x} \leq \frac{-8x^2-24x+}{x+3}$$

De la propiedad 1) anterior se deduce que puede pasarse un término cualquiera de un miembro a otro con el signo cambiado, como dijimos. Por tanto, podemos por ejemplo poner todo en el segundo miembro, quedando la inecuación equivalente:

$$0 \leq \frac{-8x^2-24x+}{x+3} - \frac{5x+1}{x}$$

Y operando en su segundo miembro, se llega a: $0 \leq \frac{-8x^3-29x^2-13x-}{x^2+3x}$ que es equivalente a la dada y tiene la forma $0 \leq \frac{P(x)}{Q(x)}$ o bien $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ (última forma dada en [1]).

Pero podemos además escribir la última inecuación obtenida de un modo más cómodo multiplicando ambos miembros por -1, para que el polinomio del numerador tenga sus coeficientes positivos, dejando el denominador como está. Pero la anterior propiedad 3) de las desigualdades establece que entonces el signo $\leq$ se convertirá en $\geq$, obteniéndose así la inecuación

$$\boxed{0 \geq \frac{8x^3+29x^2+13x+3}{x^2+3x}}$$

equivalente a la dada inicialmente y que es de la forma $0 \geq \frac{P(x)}{Q(x)}$ o bien $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ (tercera de las formas dadas en [1]). Desde luego, para encontrar el "conjunto solución" de la inecuación dada es indiferente trabajar con esta última inecuación o con la que habíamos obtenido anteriormente, pues son equivalentes (en la práctica se prefiere la más cómoda, que sería esta última).

¡ATENCIÓN! En general, no pueden quitarse los denominadores de las inecuaciones racionales (por ello no lo hemos hecho anteriormente).

En efecto, sea por ejemplo la inecuación $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Quitar el denominador equivale a multiplicar ambos miembros por $Q(x)$. Pero entonces, en general, no sabríamos qué signo poner en la nueva desigualdad, pues normalmente el polinomio $Q(x)$ tomará valores de signos cambiantes al variar x en todos los reales (recuérdese que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número positivo queda una desigualdad con el mismo signo, pero si se multiplican ambos miembros por un número negativo la nueva desigualdad queda con el signo invertido: Propiedades 2 y 3 de la página anterior). En conclusión: Solamente puede quitarse el denominador de una inecuación que esté en una de las formas [1] si dicho denominador es constante o bien si es un polinomio con valores de un mismo signo en todo $\mathbb{R}$ (que tenga siempre valores positivos o siempre valores negativos).

Tampoco podremos aplicar en una inecuación, por ejemplo de la forma $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$, la conocida "regla en cruz" que nos daría $A(x) \cdot D(x) < C(x) \cdot B(x)$, pues estaríamos quitando dos denominadores sin saber qué signos tendrán al variar x en todo $\mathbb{R}$. (Esta regla valdría si en vez de tener una inecuación tuviésemos una ecuación, o sea con $=$ en vez de con $<$ en este caso, pero habría que descartar de la solución obtenida los valores que hagan cero cualquiera de los denominadores).

Ejemplos:

1) La inecuación $\frac{8x^3+29x^2+13x+}{x^2+3x} \leq 0$ de la que hablábamos anteriormente no puede reducirse a la nueva inecuación $8x^3+29x^2+13x+3 \leq 0$, pues el denominador $x^2+3x = x \cdot (x+3)$ toma valores de signos cambiantes (puede verse que toma valores positivos si es $x < -3$, pues los dos factores serán negativos; toma valores negativos si elegimos $-3 < x < 0$, ya que el primer factor será negativo y el segundo será positivo, y vuelve a tomar valores positivos cuando $x > 0$, pues ambos factores serán positivos). Por tanto, para infinitos valores de x la nueva inecuación debería ser $8x^3+29x^2+13x+3 \leq 0$, pero para otros infinitos valores de x se tendría que escribir como $8x^3+29x^2+13x+3 \geq 0$ (habría que hacer por separado ambos casos y se complica mucho el procedimiento de resolución).

2) En cambio la inecuación $\frac{x^2-5x+8}{7} < 0$ equivale a $x^2-5x+8 < 0$, porque el denominador de la primera es una constante positiva (al multiplicar ambos miembros por 7 queda como equivalente la segunda, según la propiedad 2).

3) Pero si tenemos la inecuación $\frac{x^2-5x+8}{-7} < 0$, al quitar su denominador se está multiplicando ambos miembros por un número negativo, con lo cual la inecuación dada será equivalente a la nueva inecuación $x^2-5x+8 > 0$ (por la propiedad 3).

4) En casos especiales, en que se sabe que el polinomio del denominador toma siempre valores positivos o toma siempre valores negativos, puede eliminarse dicho denominador de la inecuación (invirtiendo, en este último caso, la desigualdad que teníamos). Así $\frac{3x+2}{x^2+3} > 0$ puede reducirse a $3x+2 > 0$, porque x^2+3 toma siempre valores positivos. En cambio, $\frac{3x+2}{-5x^4-1} > 0$ equivale a $3x+2 < 0$, porque observamos que $-5x^4-1$ toma siempre valores negativos.

VAMOS A TRATAR A CONTINUACIÓN LOS PRINCIPALES CASOS DE INECUACIONES RACIONALES, DE MENOR A MAYOR DIFICULTAD.

Empezaremos por las inecuaciones polinómicas "de primer grado" y llegaremos a las inecuaciones racionales "fraccionarias".

1.1) Inecuaciones polinómicas de primer grado

Son las que pueden llevarse a alguna de las formas básicas siguientes:

$$ax+b < 0 \quad ; \quad ax+b > 0 \quad ; \quad ax+b \leq 0 \quad \text{o bien} \quad ax+b \geq 0,$$

siempre con $a \neq 0$.

Este tipo de inecuaciones (que son las más sencillas) se resuelven despejando directamente la variable x, con lo cual su "conjunto solución" será siempre un intervalo no acotado, de alguna de las formas $[m\ ,+\infty)$, $(m\ ,+\infty)$, $(-\infty\ ,m\ ]$ o $(-\infty\ ,m)$.

Ejemplos:

1) Resolver $3x-8\le 0$. Pasamos a $3x\le 8$ y dividiendo ambos miembros por 3 (número positivo) luego queda $x\le 8/3$. Por tanto, tiene infinitas soluciones que son los números reales del intervalo $(-\infty\ ,\ 8/3]$. Este intervalo es el "conjunto solución" de la inecuación.

2) Resolver $-7x+2>0$. Pasamos a $-7x>-2$ y dividiendo ambos miembros por -7 (número negativo) luego queda $x<2/7$. Hay también infinitas soluciones que son los números reales del intervalo $(-\infty\ ,\ 2/7)$. Este es su "conjunto solución".

3) Resolver $-2x+5<0$. Pasamos a $-2x<-5$ y dividiendo por -2 (negativo) luego se obtiene $x>5/2$, que corresponde al "conjunto solución" $(5/2\ ,\ +\infty)$. (Obsérvese que inicialmente podríamos haber escrito también $5<2x$ y dividiendo por 2 (positivo) quedaría la equivalente $5/2<x$, que corresponde al mismo "conjunto solución").

1.2) Inecuaciones polinómicas de segundo grado

Son las que pueden llevarse a alguna de las formas básicas siguientes:

$$ax^2+bx+c<0\ ;\ ax^2+bx+c>0\ ;\ ax^2+bx+c\le 0 \quad \text{o bien} \quad ax^2+bx+c\ge 0$$

siempre con $a\neq 0$.

La resolución de una de estas inecuaciones depende de la existencia o no de raíces reales para la que llamaremos "ecuación asociada" $ax^2+bx+c=0$, pero también depende de que esta ecuación tenga dos raíces reales o solamente una.

Tenemos tres casos:

1.2.1) Caso en que $b^2-4ac>0$ 1.2.2) Caso en que $b^2-4ac=0$

1.2.3) Caso en que $b^2-4ac<0$

1.2.1) $\boxed{\text{Caso en que } b^2-4ac>0}$ (**discriminante positivo**). En este caso la "ecuación asociada" tiene dos raíces reales distintas (que podemos llamar α y β) y entonces **el polinomio de segundo grado se factoriza** así:

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta) \qquad (a\neq 0)$$

Escribimos la inecuación con el polinomio del primer miembro factorizado.

Basta ahora hacer variar x en toda la recta real, para ir obteniendo los signos de los factores de primer grado $x-\alpha$ y $x-\beta$, con lo cual se determinan los signos del producto $a\cdot(x-\alpha)\cdot$

$(x-\beta)$, tomando en cuenta el signo del factor constante conocido a. Aparecen así los valores de x que cumplen la inecuación dada (y los que no la cumplen).

Lo anterior puede hacerse de varios modos, pero **recomendamos hacer un cuadro de signos**, ya que para inecuaciones más complicadas este método es muy cómodo, como veremos más adelante.

Es muy importante observar en este momento que un factor de la forma $x-m$ toma valores negativos cuando x pertenece al intervalo $(-\infty, m)$, toma valor cero para $x=m$ y toma valores positivos cuando x pertenece a $(m,+\infty)$. Esto se lo aplicamos a ambos factores $x-\alpha$ y $x-\beta$, para hacer el cuadro de signos. Pero si un factor fuese de la forma $m-x$, tomará valores positivos cuando x pertenezca al intervalo $(-\infty, m)$, toma valor cero para $x=m$ y tomará valores negativos cuando x pertenezca al intervalo $(m,+\infty)$.

PROCEDIMIENTO PARA HACER EL CUADRO DE SIGNOS:

Supongamos que es $\boxed{\alpha<\beta}$ y que es $\boxed{a>0}$. El cuadro de signos en este caso es:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
a		+	+	+	+	+	
$x-\alpha$		-	0	+	+	+	
$x-\beta$		-	-	-	0	+	
$a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$		+	0	-	0	+	

Explicación:

1) Los signos en las filas segunda, tercera y cuarta son los de las expresiones correspondientes de la primera columna (a , $x-\alpha$ y $x-\beta$, respectivamente) para los valores de x indicados en la primera fila entre los símbolos $-\infty$ y $+\infty$; o sea, para los del intervalo $(-\infty\,,\alpha)$, para $x=\alpha$, para los del intervalo $(\alpha\,,\beta)$, para $x=\beta$ y para los del intervalo $(\beta\,,+\infty)$. Y los signos de la última fila corresponden al producto de todos los signos anteriores, columna a columna (regla de signos), resultando los signos correspondientes al primer miembro de la inecuación que es $a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$.

2) Y así los signos que están en cada columna (excluida la primera, la segunda y la última) corresponden a las distintas expresiones situadas en la primera columna, para el valor de x elegido en la primera fila o los valores de x correspondientes al intervalo elegido en la primera fila. Así, los signos de la tercera columna corresponden al intervalo $(-\infty\,,\alpha)$; los de la cuarta columna corresponden al valor $x=\alpha$; los de la quinta columna corresponden al intervalo $(\alpha\,,\beta)$; los de la sexta columna corresponden al valor $x=\beta$, y los de la séptima columna corresponden al intervalo $(\beta\,,+\infty)$.

Nótese que, entre los valores de x en el cuadro, hemos puesto α a la izquierda de β porque se ha supuesto $\alpha<\beta$. Además, obsérvese que debajo de $-\infty$ y de $+\infty$ no aparecen signos, porque estos no son valores de x (sólo son símbolos para escribir intervalos). Y obsérvese también que, en la última fila, debajo de un cero aparecerá otra vez un cero, independientemente del resto de signos que haya en esa columna (pues el producto de cualquier número por cero da cero).

A partir de este cuadro, según sea la inecuación dada, se identifica fácilmente qué valores de la variable x la verifican, con lo cual puede escribirse el "conjunto solución" correspondiente, que es un intervalo o una unión de dos intervalos disjuntos (separados). Así tenemos:

a) A la inecuación $a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) > 0$ le corresponde $(-\infty\,, \alpha) \cup (\beta\,, +\infty)$ como "conjunto solución". Porque los valores de x pertenecientes a esos intervalos dan resultados positivos (signo $+$) en la última fila (que corresponde al primer miembro de la inecuación), con lo cual esta se cumple. Además, son los únicos valores que la cumplen.
b) A la inecuación $a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) < 0$ le corresponde $(\alpha\,, \beta)$ como "conjunto solución". Porque los valores de x de ese intervalo dan resultados negativos (signo $-$) al primer miembro de la inecuación, luego esta se cumple. Además, son los únicos valores que la cumplen.
c) A la inecuación $a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \geq 0$ le corresponde $(-\infty\,, \alpha] \cup [\beta\,, +\infty)$. Pues a los valores de x que cumplían la inecuación con el signo $>$ (caso a) anterior) hay que agregarles los valores α y β, donde el primer miembro de la inecuación se hace cero.
d) Y a la inecuación $a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \leq 0$ le corresponde $[\alpha\,, \beta]$. Pues a los valores de x que cumplían la inecuación con el signo $<$ (caso b) anterior) hay que agregarles los valores α y β, donde el primer miembro de la inecuación se hace cero.

Nota: Si fuese $\boxed{\beta < \alpha}$, en el cuadro de signos aparecerían las columnas correspondientes a α y a β en orden invertido. Y si fuese $\boxed{a < 0}$, la primera fila de signos los tendría todos negativos (en vez de todos positivos). Los signos de la última fila, correspondientes al producto $a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta)$, son siempre los que nos indicarán dónde se está cumpliendo la inecuación dada.

Ejemplo: Resolver la inecuación $-x^2 + x + 2 \geq 0$

La ecuación asociada es $-x^2 + x + 2 = 0$, cuyas raíces son $x = -1$ y $x = 2$. Tenemos dos raíces reales diferentes, luego estamos en un ejemplo de este caso (aquí es $a = -1$ y podemos tomar $\alpha = -1$ y $\beta = 2$ (siempre podremos llamar α a la menor de las raíces y β a la otra, con lo cual será $\alpha < \beta$). Factorizando, tenemos la inecuación escrita como

$$(-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \geq 0$$

Y el cuadro de signos en este caso es:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
-1		-	-	-	-	-	
$x+1$		-	0	+	+	+	
$x-2$		-	-	-	0	+	
$(-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$		-	0	+	0	-	

Entonces, el “conjunto solución” de la inecuación dada es el intervalo $[-1\,,2]$, ya que la inecuación “pide” que el producto $(-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ sea positivo o cero. Positivo ocurre solamente cuando x está entre -1 y 2, y cero ocurre cuando x está en -1 y cuando está en 2.

ATENCIÓN: Muchos alumnos escriben la factorización anterior como $(x+1)\cdot(x-2)$, omitiendo el coeficiente a de x^2, lo cual es un claro error: En efecto, al efectuar este producto se obtiene el polinomio x^2-x-2 , que no es el polinomio que queremos factorizar sino su opuesto. Y este error produce un conjunto solución completamente equivocado, pues al eliminar la segunda fila del cuadro anterior, los signos finales quedan todos invertidos (donde debía aparecer $+$ aparecerá $-$ y donde debía aparecer $-$ aparecerá $+$).

Otro ejemplo: Resolver la inecuación $(3x-1)\cdot(4-2x)\leq 0$

Tenemos el polinomio del primer miembro ya factorizado, con lo cual podemos construir directamente el correspondiente cuadro de signos:

x	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$
$3x-1$		-	0	+	+	+	
$4-2x$		+	+	+	0	-	
$(3x-1)\cdot(4-2x)$		-	0	+	0	-	

que nos está indicando el conjunto solución: $(-\infty\,,1/3]\cup[2\,,+\infty)$

Nota 1: Aquí los factores de primer grado son más generales, con la variable x multiplicada por un coeficiente distinto de 1 o de -1 en ambos casos. No importa: Los signos del factor $3x-1$ son los señalados anteriormente, como si el factor fuese $x-1/3$. Y los signos del factor $4-2x$ son también los señalados anteriormente, como si el factor fuese $2-x$. En resumen: Si el factor es de primer grado y x lleva coeficiente positivo, sus signos en la fila correspondiente serán $-$, 0 , $+$ con este orden de izquierda a derecha (estando el cero bajo el valor que anule al factor). Y si el factor es de primer grado y x lleva coeficiente negativo, sus signos serán $+$, 0 , $-$ con este orden de izquierda a derecha (estando también el cero bajo el valor que anule el factor).

Nota 2: En la escritura inicial de la inecuación, podríamos haber sacado el coeficiente 3 del primer paréntesis y sacado el coeficiente 2 del segundo paréntesis. Con lo cual se tendría la inecuación escrita factorizada así: $6\cdot(x-1/3)\cdot(2-x)\leq 0$

Y ahora el cuadro de signos sería análogo al anterior, pero incluye una fila más de signos positivos, luego tendremos el mismo “conjunto solución”.

Veamos ahora los otros dos casos posibles de este tipo de inecuaciones de segundo grado (ver los tres casos posibles señalados en la pág. 6).

1.2.2) $\boxed{\text{Caso en que } b^2 - 4ac = 0}$ (**discriminante nulo**). En este caso la ecuación asociada tiene una sola raíz real (que podemos llamar α) y el polinomio de segundo grado se factoriza así:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha)^2 \qquad (a \neq 0)$$

La inecuación puede entonces escribirse con el polinomio del primer miembro factorizado y en este caso queda un cuadro de signos más sencillo:

Si $\boxed{a > 0}$ tendremos el cuadro siguiente:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
a		+	+	+	
$(x-\alpha)^2$		+	0	+	
$a \cdot (x-\alpha)^2$		+	0	+	

(obsérvese que no tenemos ni un solo signo negativo en la última fila).

Por tanto, si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 > 0$, su "conjunto solución" sería

$$\mathbb{R} - \{\alpha\} = (-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty).$$

Si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 < 0$, no habría ni una solución, luego su "conjunto solución" sería $\emptyset$ (vacío).

Si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 \geq 0$, su "conjunto solución" sería $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Y si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 \leq 0$, su única solución será $x = \alpha$ (el "conjunto solución" se escribe $\{\alpha\}$).

Y si fuese $\boxed{a < 0}$ tendremos el cuadro:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
a		-	-	-	
$(x-\alpha)^2$		+	0	+	
$a \cdot (x-\alpha)^2$		-	0	-	

(obsérvese que no tenemos ni un solo signo positivo en la última fila).

De modo que, si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 > 0$, su "conjunto solución" sería $\emptyset$.

Si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 < 0$, su "conjunto solución" sería $\mathbb{R} - \{\alpha\}$.

Si la inecuación fuese $a \cdot (x - \alpha)^2 \geq 0$, su "conjunto solución" sería $\{\alpha\}$.

Y si la inecuación fuese $a \cdot (x-\alpha)^2 \leq 0$, su "conjunto solución" sería $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea la inecuación $-x^2+4x-4<0$. Su ecuación asociada, $-x^2+4x-4=0$, posee una sola raíz real, que es $x=2$. Por tanto, la factorización del polinomio de segundo grado es $-x^2+4x-4=(-1)\cdot(x-2)^2$, con lo cual la inecuación se escribirá $-(x-2)^2<0$, y se cumple siempre que x no sea 2. Entonces, su "conjunto solución" será $\mathbb{R}-\{2\}$.

1.2.3) $\boxed{\text{Caso en que } b^2-4ac<0}$ (**discriminante negativo**). En este caso la ecuación asociada carece de raíces reales (sus raíces son números complejos, imaginarios conjugados), con lo cual el polinomio de segundo grado no puede factorizarse en el campo de los números reales.

¿Qué hacer entonces? Pues se aplica una propiedad muy importante, que nos dice que cuando el discriminante es negativo, el polinomio de segundo grado da siempre valores positivos, o bien da siempre valores negativos (su signo coincide con el del término independiente c, que es el valor correspondiente a $x=0$).

Ejemplo: El polinomio x^2+x+1 tiene discriminante -3. Y al ser $c=1>0$, todos sus valores serán positivos. En efecto, se comprueba que la parábola vertical de ecuación $y=x^2+x+1$, es cóncava hacia arriba, corta al eje OY en el punto 1 y no corta al eje OX. En efecto, tiene su valor mínimo en el punto $(-1/2\,,\ 3/4)$, luego se mantiene siempre por encima de dicho eje OX. Es decir, $x^2+x+1>0$ para cualquier valor de x.

Para dar el "conjunto solución" de la inecuación en estos casos, bastará entonces comparar el signo fijo del polinomio con lo que dice la desigualdad de la inecuación (si concuerdan, el "conjunto solución" será $\mathbb{R}$, y si no concuerdan, el "conjunto solución" será $\emptyset$). Sólo hay estas dos situaciones posibles.

Más ejemplos:

1) La inecuación $x^2+x+1>0$ tiene conjunto solución $\mathbb{R}$ (porque el polinomio x^2+x+1 da siempre valores positivos, como vimos anteriormente, y la inecuación "pide" lo mismo).

2) La inecuación $x^2+x+1<0$ tiene conjunto solución $\emptyset$ (porque nunca es negativo el polinomio del primer miembro).

3) Así mismo, la inecuación $x^2+x+1\geq 0$ tiene conjunto solución $\mathbb{R}$. Mientras que la inecuación $x^2+x+1\leq 0$ tiene conjunto solución $\emptyset$.

1.3) Inecuaciones polinómicas de grado mayor que dos

Son inecuaciones polinómicas similares a las de grado dos, pero el polinomio del primer miembro (en su forma básica) es de grado tres o superior.

Para poder resolverlas, debemos saber factorizar dicho polinomio.

Por tanto, siempre que pidamos resolver inecuaciones de este tipo, el polinomio $P(x)$ asociado se podrá factorizar con cierta facilidad (usando para ello criterios de búsqueda de raíces enteras y fraccionarias de la ecuación asociada; haciendo divisiones sucesivas de $P(x)$ por la Regla de Ruffini, para encontrar raíces y reducir el grado, y finalmente resolviendo la ecuación de segundo grado o bicuadrada que quede).

Para fijar ideas, **supongamos que la inecuación sea de tercer grado**. Y si el grado es mayor, se trabajará de forma análoga.

La factorización de un polinomio de grado tres, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, puede ser de **cuatro tipos**, según el número de raíces reales o complejas que posea (y en el caso de las raíces reales, según coincidan entre sí o no):

1) $P(x) = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma)$, siendo α, β y γ las tres raíces reales distintas de la ecuación asociada.

2) $P(x) = a \cdot (x - \alpha)^2 \cdot (x - \beta)$, siendo α raíz real doble y β raíz real simple (distinta) de la ecuación asociada (dos raíces reales coinciden y otra es diferente). Aquí puede ser $\alpha < \beta$ o bien $\alpha > \beta$ y además $a > 0$ o $a < 0$.

3) $P(x) = a \cdot (x - \alpha)^3$, siendo α raíz real triple de la ecuación asociada (las tres raíces reales coinciden).

4) $P(x) = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x^2 + mx + n)$, siendo α raíz real simple de la ecuación asociada y siendo negativo el discriminante del polinomio de segundo grado (el cual tendrá dos raíces complejas conjugadas que lo serán de la ecuación $P(x) = 0$, y sabemos que entonces dicho polinomio de segundo grado dará valores siempre positivos o dará valores siempre negativos, según el signo del término independiente n).

Para resolver la inecuación que tengamos, en todos los casos, habrá que hacer el correspondiente cuadro de signos. De modo que tendremos en cuenta el signo del coeficiente a, los signos de los factores de las formas $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$, $(x - \alpha)^2$ o $(x - \alpha)^3$ que aparezcan en la factorización, y también el signo del factor $(x^2 + mx + n)$ cuando este aparezca.

Nota: Los signos de un factor de la forma $(x - m)^{2n}$ (exponente par) serán siempre $+$ (o resultará 0) y los signos de un factor de la forma $(x - m)^{2n+1}$ (exponente impar) son como los del factor $(x - m)$.

Ejemplo: Resolvamos la inecuación de tercer grado $2x^3 - 13x^2 + 24x - 9 \leq 0$

La “ecuación asociada” tiene una raíz doble ($x = 3$) y otra raíz real simple ($x = 1/2$), lo cual puede comprobarse dividiendo el polinomio entre $(x - 3)$ y resolviendo luego la ecuación de segundo grado obtenida igualando a cero el cociente.

Escribimos la inecuación dada con el polinomio del primer miembro factorizado:

$$2 \cdot (x-3)^2 \cdot (x-1/2) \leq 0 \,.$$

Con lo cual, el cuadro de signos correspondiente será entonces:

x	$-\infty$		$1/2$		3		$+\infty$
2		+	+	+	+	+	
$(x-3)^2$		+	+	+	0	+	
$(x-1/2)$		-	0	+	+	+	
$P(x)$		-	0	+	0	+	

De donde deducimos que el "conjunto solución" es $(-\infty\,, 1/2] \cup \{3\}$.

Otro ejemplo: Resolvamos la inecuación de cuarto grado $-3x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 12x + 12 > 0$

La "ecuación asociada" tiene una raíz doble ($x = 2$) y dos raíces simples ($x = -1$ y $x = 1$). Por tanto, al factorizar el polinomio, la inecuación puede escribirse:

$$(-3) \cdot (x-2)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) > 0$$

Y el cuadro de signos correspondiente es entonces:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
-3		-	-	-	-	-	-	-	
$(x-2)^2$		+	+	+	+	+	0	+	
$(x+1)$		-	0	+	+	+	+	+	
$(x-1)$		-	-	-	0	+	+	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	-	

que nos indica que el conjunto solución es el intervalo $(-1\,, 1)$.

1.4) Inecuaciones racionales no polinómicas (fraccionarias)

Sus formas básicas son las que mencionamos en la primera página y suponemos que el polinomio del denominador no se reduce a una constante (si fuese así, multiplicaríamos ambos miembros de la inecuación por dicha constante, obteniendo una inecuación polinómica de alguno de los tipos citados anteriormente). También supondremos que la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador no es exacta, con lo cual se trata de una inecuación verdaderamente "fraccionaria".

INECUACIONES RACIONALES

El procedimiento a seguir para su resolución lo podemos sintetizar en los siguientes pasos:

1) Poner la inecuación en una de las formas básicas indicadas, si no lo estaba inicialmente (reuniendo todos sus términos a un solo miembro y efectuando operaciones sin quitar denominadores, hasta llegar finalmente a una sola fracción).

2) Factorizar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ que aparezcan en el numerador y en el denominador de esa forma básica.

3) Escribir la inecuación con ambos polinomios factorizados.

4) Hacer el cuadro de signos correspondiente, con todos los factores que hayan quedado (tanto los del numerador como los del denominador), luego en su primera fila deben aparecer ordenados entre $-\infty$ y $+\infty$ todos los valores reales que anulen al numerador y también al denominador.

5) Determinar el "conjunto solución", en función del signo de desigualdad que lleve la inecuación y de los signos $+$, 0 , $-$ o bien "NE" que hayan quedado en la última fila del cuadro.

NOTA IMPORTANTE: Al hacer el cuadro conviene señalar qué factores son los del numerador y qué factores son los del denominador, de modo que al operar para poner signos del cociente $P(x)/Q(x)$ (en la última fila del cuadro), habrá que poner 0 (cero) debajo de cada cero de los factores del numerador y habrá que poner "NE" (no existe) debajo de cada cero de los factores del denominador (en efecto, si se anula el polinomio numerador, el cociente dará valor cero; pero si se anula el polinomio denominador, el cociente no existirá, luego habrá que excluir esos valores del "conjunto solución").

Ejemplo: Vamos a resolver la inecuación racional $\frac{1}{x-2} \leq \frac{x}{x+4}$

En primer lugar la pasamos a una forma típica: Por ejemplo, reuniendo todo en el primer miembro y operando se llega a $\frac{-x^2+3x+4}{(x-2)\cdot(x+4)} \leq 0$ (no conviene efectuar el producto del denominador, porque luego lo necesitaremos factorizado y ya lo está).

El paso dos anterior nos indica que hay que factorizar los polinomios del numerador y del denominador, pero el denominador ya está factorizado y el numerador se factoriza así:

$$-x^2 + 3x + 4 = (-1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$$

El paso tres nos pide escribir la inecuación con todo factorizado:

$$\frac{(-1)\cdot(x+1)\cdot(x-4)}{(x-2)\cdot(x+4)} \leq 0$$

(podríamos eliminar el factor -1 del numerador, dividiendo ambos miembros por -1, con lo cual el $\leq$ se cambiará por $\geq$; sin embargo, seguiremos resolviendo la inecuación como está).

Ahora hacemos el cuadro de signos correspondiente (paso cuatro anterior), teniendo cuidado de colocar en la primera fila los valores de las raíces de los polinomios del numerador y del denominador en orden creciente entre $-\infty$ y $+\infty$:

	x	$-\infty$		-4		-1		2		4		$+\infty$
N	-1		-	-	-	-	-	-	-	-	-	
N	$x+1$		-	-	-	0	+	+	+	+	+	
N	$x-4$		-	-	-	-	-	-	-	0	+	
D	$x-2$		-	-	-	-	-	0	+	+	+	
D	$x+4$		-	0	+	+	+	+	+	+	+	
	$P(x)/Q(x)$		-	NE	+	0	-	NE	+	0	-	

(obsérvese cómo debajo de los ceros de los factores del denominador, señalados con D, ponemos en la última fila "NE", y debajo de los ceros de los factores del numerador, señalados con N, ponemos 0).

El paso cinco es determinar el "conjunto solución": Como la inecuación pide $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, buscamos los intervalos en que el signo final sea $-$, incluyendo únicamente los extremos de dichos intervalos que correspondan al valor cero (los extremos donde aparezca NE no pueden incluirse).

Así llegamos al siguiente "conjunto solución": $(-\infty\,,-4) \cup [-1\,,2) \cup [4\,,+\infty)$.

Otro ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{(7-3x)\cdot(-x^2+2x-2)}{(x-1)^2\cdot(2x+1)} \geq 0$

Ya está en una de las formas típicas, luego sobra el paso 1) del procedimiento. Los polinomios del numerador y del denominador ya están factorizados, luego sobra el paso 2) del procedimiento (el factor $-x^2+2x-2$ tiene raíces imaginarias y no puede factorizarse en el campo real, teniendo siempre valores negativos). Por tanto, la inecuación ya está escrita con los polinomios que intervienen factorizados, luego sobra el paso 3) del procedimiento. El paso 4) es hacer el cuadro de signos:

		$-\infty$		-1/2		1		7/3		$+\infty$
N	$7-3x$		+	+	+	+	+	0	-	
N	$-x^2+2x-2$		-	-	-	-	-	-	-	
D	$(x-1)^2$		+	+	+	0	+	+	+	
D	$2x+1$		-	0	+	+	+	+	+	
	$P(x)/Q(x)$		+	NE	-	NE	-	0	+	

Nota 1: En este caso las raíces del numerador son $7/3$, $1+i$ y $1-i$ (valores que anulan sus factores), y las raíces del denominador son $-1/2$ y 1 (valores que anulan sus factores). Todas las raíces reales están escritas en la primera fila del cuadro en orden creciente.

Nota 2: El factor $(7-3x)$ toma valores positivos a la izquierda de $x=7/3$, donde se anula, y toma valores negativos a la derecha de ese mismo número (porque tiene la variable x con coeficiente negativo; puede comprobarse dando algunos valores a la variable). En cambio, para el factor $(2x+1)$ los valores positivos quedan a la derecha del punto en que se anula y los valores negativos quedan a su izquierda (porque tiene la variable x con coeficiente positivo). ¡TENER CUIDADO CON ESTO!

Nota 3: El factor $(x-1)^2$ no toma valores negativos, por ser un cuadrado y lo mismo le ocurriría si fuese otra potencia de exponente par. Pero un factor como $(x-1)^3$ o cualquier otro con exponente impar tendrá sus signos como el factor $(x-1)$, o sea positivos a la derecha de $x=1$ y negativos a su izquierda. Análogamente, un factor como $(2-x)^3$ tendría los signos como el factor $(2-x)$, o sea negativos a la derecha de $x=2$ y positivos a su izquierda.

Nota 4: El factor $-x^2+2x-2$ toma únicamente valores negativos, pues su discriminante es negativo y su término independiente es -2 (ver pág. 11).

Por último, el paso 5) del procedimiento es determinar el "conjunto solución". Observando el signo de la inecuación dada (en este caso $\geq$) y los signos del cociente de polinomios que aparecen en la última fila del cuadro, vemos que el "conjunto solución" es:

$$(-\infty\,,-1/2)\cup[7/3\,,+\infty)$$

Observación final: Hay casos en que coincide algún factor del numerador con alguno del denominador de la forma básica a la que hayamos llegado. En esos casos conviene trabajar con la fracción simplificada, eliminando los factores comunes del numerador y del denominador, pero hay que anotar que las raíces reales correspondientes, si las hay, no pueden quedar incluidas en el conjunto solución que se obtenga (pues para esos valores el cociente quedaría en la expresión indeterminada $0/0$ y la inecuación no se cumplirá).

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la inecuación $\frac{(x-2)^2\cdot(x+5)}{(x-3)\cdot(x-2)}\leq 0$

Ya se han dado los pasos 1), 2) y 3) del procedimiento. Al ir a realizar el cuadro de signos observamos que tendríamos que poner una fila para el factor $(x-2)^2$ del numerador y otra fila para el factor $x-2$ del denominador. Como el factor $x-2$ aparece tanto en el numerador como en el denominador, conviene escribir la inecuación simplificada como $\frac{(x-2)\cdot(x+5)}{x-3}\leq 0$. Una vez hecho el correspondiente cuadro de signos se llega al "conjunto solución" $(-\infty\,,-5]\cup[2\,,3)$. Pues bien, ahora debemos quitar el valor 2 de esta solución (ya que anularía numerador y denominador de la inecuación dada inicialmente), con lo cual el "conjunto solución" correcto de dicha inecuación inicial será $(-\infty,-5]\cup(2,3)$.
