

# LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

## Conceptos básicos y nomenclatura

Llamamos “propiedad” a alguna característica (o características) susceptible de que un objeto de una cierta naturaleza la cumpla o no la cumpla. Hay propiedades que son aplicables a determinados objetos (o sea, tiene sentido plantearse si uno de esos objetos la cumple o no la cumple) y la misma propiedad no será, en general, aplicable a otros objetos de naturalezas diferentes.

Por ejemplo, la propiedad matemática “ser derivable” es aplicable a objetos como las funciones reales de una variable real, pero no tiene sentido aplicarla a objetos como polígonos o matrices numéricas. Pues bien, dada una cierta función real de una variable real, puede ser que cumpla la propiedad de “ser derivable” (entendida como derivable en todo su dominio) o que no la cumpla.

Si A es “una propiedad” aplicable a objetos de una cierta naturaleza, llamaremos noA a “su propiedad contraria”, de modo que todo objeto de esa naturaleza cumpla necesariamente A o bien noA, pero no las dos a la vez. Por ejemplo, si A es “ser blanco” (aplicable a objetos pintados), la propiedad noA es “no ser blanco”, lo cual incluye “ser de cualquier otro color”, “ser de varios colores, aunque incluya el blanco”, así como “no tener un color definido”.

Suponemos siempre, en nuestra lógica ordinaria, que ningún objeto puede cumplir a la vez las propiedades A y noA (es la lógica aristotélica con la que razonamos en Matemáticas y en las demás ciencias). Además, obviamente, la propiedad contraria de “la contraria de A” será A (es decir,  $\text{no}(\text{no}A) = A$ ).

Muchas veces A tiene forma de afirmación, con lo cual noA será la correspondiente negación. Pero puede ocurrir que A tenga forma de negación y noA será la correspondiente afirmación.

Si una propiedad jamás se cumple entre objetos de una cierta naturaleza, se dice que “es absurda” en ese contexto. Y si se cumple siempre, se dice que “es una tautología”. Entonces, si A fuese absurda, noA sería una tautología, entre los objetos donde se aplican. Y al revés, si A fuese una tautología, noA sería absurda en dicho contexto.

Ejemplo de propiedad absurda es “ser triángulo con la suma de sus tres ángulos menor que  $\pi$  radianes”, aplicable a todos los triángulos, pero que ninguno cumple. Y ejemplo de tautología es “ser múltiplo de 2”, cuando la aplicamos a todos los números enteros múltiplos de 4, pues todos la cumplen.

## Implicaciones

“Una implicación” es una afirmación que involucra dos propiedades A y B (aplicables a objetos de una misma naturaleza) y dice esencialmente lo siguiente: “Si se cumple A, entonces se cumple B”. Lo cual puede ser cierto o ser falso, dependiendo de lo que sea A, de lo que sea B y de la naturaleza de los objetos donde se apliquen. Esta implicación se expresa en forma abreviada como “A implica B” o bien como “ $A \Rightarrow B$ ”.

Se dice que la implicación “ $A \Rightarrow B$ ” es “cierta” o es “verdadera” solamente si “cada vez que un objeto cumpla la propiedad A, dicho objeto también cumplirá la propiedad B”. Por tanto, basta que exista un solo objeto que cumpla A y no cumpla B, para que con-

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

sideremos “falsa” o “no verdadera” la implicación (en ese caso, dicho objeto se llama “un contraejemplo de la misma”).

La “certeza” de una implicación es también una “propiedad”, aplicable a todas las implicaciones posibles entre objetos de una cierta naturaleza y la cumplen las implicaciones que sean “verdaderas”. Y su “propiedad contraria” es la “falsedad”, aplicable a las mismas implicaciones y la cumplen las implicaciones que sean “no verdaderas”. De manera que, dada una de esas implicaciones en concreto, la misma cumplirá la “certeza” (será verdadera) o cumplirá la “falsedad” (será falsa), pero no puede cumplir ambas.

Ahora, tomando en cuenta el orden de dos propiedades A y B y tomando en cuenta sus propiedades contrarias noA y noB, podemos considerar formalmente cuatro implicaciones importantes:

$$“A \Rightarrow B” ; “B \Rightarrow A” ; “noA \Rightarrow noB” ; “noB \Rightarrow noA”$$

“ $B \Rightarrow A$ ” se llama “la implicación recíproca” de “ $A \Rightarrow B$ ”.

“ $noA \Rightarrow noB$ ” se llama “la implicación contraria” de “ $A \Rightarrow B$ ”.

Y “ $noB \Rightarrow noA$ ” se llama “la implicación contrarrecíproca” de “ $A \Rightarrow B$ ”.

Aquí no hablamos de si estas implicaciones son verdaderas o falsas, sino de sus relaciones formales.

La “certeza” o “falsedad” de una cualquiera de ellas depende de lo que sea A, de lo que sea B y de la naturaleza de los objetos donde se apliquen.

Muy importante:

En nuestra lógica ordinaria una implicación del tipo “ $A \Rightarrow B$ ” es siempre lógicamente equivalente a su implicación contrarrecíproca “ $noB \Rightarrow noA$ ”. O sea, que ambas son ciertas o ambas son falsas, pero no puede suceder que una sea verdadera y la otra sea falsa.

En efecto, supongamos que  $A \Rightarrow B$  es cierta y veamos que  $noB \Rightarrow noA$  también será cierta: Pues si fuese falsa  $noB \Rightarrow noA$ , habría al menos un objeto que cumpliría noB y no cumpliría noA, con lo cual dicho objeto cumpliría A y no cumpliría B, lo cual demostraría que  $A \Rightarrow B$  es falsa (contra lo supuesto).

Y si suponemos que  $A \Rightarrow B$  es falsa, veamos que  $noB \Rightarrow noA$  también es falsa: Pues, al ser falsa  $A \Rightarrow B$ , habrá al menos un objeto que cumpla A y no cumpla B, con lo cual dicho objeto cumplirá noB y no cumplirá noA, lo cual demuestra que  $noB \Rightarrow noA$  es también falsa.

### Teoremas

En cualquier “teoría matemática”, hay afirmaciones que no se demuestran (son muy sencillas y difícilmente pueden demostrarse apoyándose en otras más sencillas, o bien se acepta su validez por conveniencia): Son los “axiomas” o “postulados” de la teoría. Y todas las demás afirmaciones de la “teoría” son sus “teoremas”, los cuales tienen sus respectivas demostraciones basándose por razonamiento en los “axiomas” o en otros “teoremas” ya demostrados. O sea, que una “teoría matemática” es como un edificio, cuyos cimientos son sus “axiomas” y donde todo el resto son “teoremas” (como ladrillos, que se apoyan directamente en los cimientos o en otros ladrillos ya instalados).

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

Ejemplos de “teorías matemáticas” son “el Álgebra”, “la Geometría euclídea”, “el Cálculo diferencial”, “el Cálculo integral”, “la Estadística matemática”, etc...

A su vez, hay muchos tipos de “teoremas” en una misma “teoría matemática”.

Entendiendo que A y B son “propiedades” aplicables a objetos de una determinada naturaleza (correspondientes a la “teoría matemática” que sea), el enunciado de cualquier “teorema” es esencialmente de alguna de las siguientes cuatro formas:

- 1) FORMA BÁSICA (como una implicación): “Si se cumple A, entonces se cumple B” o más brevemente “Si A, entonces B” o en forma simbólica “ $A \Rightarrow B$ ” (A implica B). Aquí A representa la propiedad que se llama **hipótesis del teorema** y B representa la propiedad que se llama **tesis del teorema** (en el enunciado del teorema se está estableciendo taxativamente la verdad de la tesis, cada vez que sea verdadera la hipótesis). Muchas veces, un teorema en esta forma básica se expresa también así: “Todo el que cumpla A, cumplirá B”.

Ejemplo: “Si un número es racional, entonces es número real” o bien “ser número racional implica ser número real” o bien “todo número racional será número real”. Aquí la hipótesis es “ser número racional” (número que puede representarse mediante una razón o cociente de dos enteros) y la tesis es “ser número real” (número que proviene de medir la longitud de un cierto segmento rectilíneo con una determinada unidad de medida, o su correspondiente opuesto).

- 2) FORMA DE CONDICIÓN NECESARIA: “Una condición necesaria para que se cumpla A es que se cumpla B”. Esto significa que “es obligatorio el cumplimiento de B para que A se cumpla”, con lo cual podemos ponerlo en la forma “noB implica noA”, y esto equivale lógicamente a “A implica B” (pues son implicaciones contrarrecíprocas).

Ejemplo: Tratando con funciones reales de una variable que sean derivables (en todo su dominio), tenemos: Una condición necesaria para que “la función  $f(x)$  tenga un extremo relativo en  $x = a$ ” (propiedad A) es que “ $f'(a) = 0$ ” (propiedad B).

Lo cual significa que “ $f'(a) \neq 0$ ” (propiedad noB) implica “la función  $f(x)$  no tiene un extremo relativo en  $x = a$ ” (propiedad noA). Lo cual viene a ser en definitiva que “la función  $f(x)$  tiene un extremo relativo en  $x = a$ ” (propiedad A) implica “ $f'(a) = 0$ ” (propiedad B).

- 3) FORMA DE CONDICIÓN SUFICIENTE: “Una condición suficiente para que se cumpla A es que se cumpla B”. Esto significa que “basta que se cumpla B, para que se cumpla A”, lo cual es “B implica A”.

Ejemplo: Tratando con funciones de una variable que sean derivables (en su dominio), tenemos: Una condición suficiente para que “la función  $f(x)$  tenga un máximo relativo en  $x = a$ ” (propiedad A) es que “ $f'(x) > 0$  en un intervalo  $(a - \delta_1, a)$  y  $f'(x) < 0$  en un intervalo  $(a, a + \delta_2)$ ” (propiedad B).

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

Lo cual significa que " $f'(x) > 0$  en un intervalo  $(a - \delta_1, a)$  y  $f'(x) < 0$  en un intervalo  $(a, a + \delta_2)$ " (propiedad B) implica "la función  $f(x)$  tiene un máximo relativo en  $x = a$ " (propiedad A).

Nota: Un mismo teorema de los anteriores puede darse siempre en tres formas diferentes (en su forma básica como "una implicación", como "una condición necesaria" y también como "una condición suficiente"). Pues su hipótesis será una condición suficiente para el cumplimiento de su tesis y su tesis será una condición necesaria para el cumplimiento de su hipótesis.

- 4) FORMA DE CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE: "Una **condición necesaria y suficiente** para que se cumpla A es que se cumpla B". Entonces, por "ser B condición necesaria para A", será "A implica B", y por "ser B condición suficiente para A", será "B implica A". Por tanto, en forma simbólica se está diciendo " $A \Rightarrow B$ " y " $B \Rightarrow A$ ", que suele escribirse " $A \Leftrightarrow B$ " (en estos casos se dice que "A y B son propiedades equivalentes"). Por tanto, un teorema en esta forma equivale a dos teoremas, que son "recíprocos" entre sí.

Ejemplo: "Una condición necesaria y suficiente para que la matriz cuadrada M tenga inversa es que el determinante de M sea diferente de cero", que quiere decir a la vez "la matriz cuadrada M tiene inversa" (propiedad A) implica "el determinante de M es diferente de cero" (propiedad B) y "el determinante de M es diferente de cero" (propiedad B) implica "la matriz cuadrada M tiene inversa" (propiedad A).

---

Vemos por todo lo anterior que la esencia de cualquier teorema es una implicación entre dos propiedades (pues hemos visto que las distintas formulaciones de los teoremas corresponden siempre a implicaciones). Y cuando un teorema corresponda a una implicación doble, será en realidad dos teoremas.

¿Cómo se demuestra la certeza de "A implica B"? Comprobando que la tesis B es cierta en todos los casos en que la hipótesis A sea cierta. Si hay un número finito de casos en que se cumpla la hipótesis, puede comprobarse el cumplimiento de la tesis caso por caso. Pero cuando hay infinitos casos que cumplen la hipótesis, como ocurre normalmente, se requiere un razonamiento general que nos asegure el cumplimiento de la tesis en todos esos casos.

Sin embargo, ¿cómo se demuestra la falsedad de "A implica B"? Encontrando un solo caso en que sea cierta la hipótesis A y no sea cierta la tesis B, llamado "un contraejemplo de la implicación" (por este motivo suele ser más fácil demostrar la falsedad de un teorema que demostrar su certeza; sin embargo, la búsqueda de un contraejemplo puede ser muy complicada en algunos casos).

En Matemáticas todos los teoremas que se dan son ciertos (si hubiese algún teorema que no tuviese demostración, no podemos estar seguros de su certeza y no se dará; desde que alguien encuentre una demostración correcta del mismo se sabrá que es verdadero y podrá incluirse en el cuerpo de la "teoría matemática" respectiva; pero si alguien encuentra un contraejemplo del mismo, se sabrá que es falso y se anotará como tal o no se nombrará). Pero en la historia de las Matemáticas a veces ocurrió que se tenía por verdadero un cierto

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

teorema (porque se tenía una demostración para el mismo) y más tarde alguien encontró un contraejemplo de ese mismo teorema, con lo cual quedó claro que era falso (en esos casos la demostración que se tenía para el teorema era siempre incorrecta por algún motivo, pero nadie había detectado hasta entonces el fallo o los fallos en su razonamiento y se daba por válida dicha demostración).

Por último, en Matemáticas hay “condiciones necesarias” que no son “condiciones suficientes” (implicación en un solo sentido) y hay “condiciones suficientes” que no son “condiciones necesarias” (también implicación en un solo sentido). Pero también hay muchas “condiciones necesarias y suficientes” (implicaciones dobles):

- 1) Cuando sea cierto el teorema “A implica B” y no sea cierto el teorema recíproco “B implica A”, se dice que “A es una condición suficiente para B, pero dicha condición no es necesaria” o bien podríamos decir que “B es una condición necesaria para A, pero dicha condición no es suficiente”.

Ejemplo: Tratando con funciones reales de una variable, se tiene el conocido teorema “derivable implica continua”, luego podemos decir “derivable es una condición suficiente para ser continua, pero dicha condición no es necesaria”, y también podemos decir “continua es una condición necesaria para ser derivable, pero dicha condición no es suficiente”

- 2) Cuando no sea cierto el teorema “A implica B” y sea cierto el teorema recíproco “B implica A”, se dice que “B es condición suficiente para A, pero dicha condición no es necesaria” o bien podríamos decir que “A es condición necesaria para B, pero dicha condición no es suficiente”. Obsérvese que es lo mismo que dijimos anteriormente, pero intercambiando los papeles de A y B.
- 3) Y cuando sean ciertos los teoremas “A implica B” y “B implica A”, las propiedades A y B se llaman **equivalentes** (si determinado objeto cumple una de ellas, también cumplirá la otra, y si otro objeto no cumple una de ellas, tampoco cumplirá la otra) y se dice “A es una condición necesaria y suficiente para B” o bien “B es una condición necesaria y suficiente para A”.
- 4) Cuando no sean aplicables las dos propiedades A y B a los mismos objetos, no tendrán sentido los teoremas “A implica B” ni “B implica A”. Simplemente, las propiedades A y B son independientes (no tienen relación lógica). Pero pueden incluso tener sentido los teoremas anteriores y sin embargo no ser cierto ninguno de ellos, con lo cual las propiedades A y B tampoco tendrán relación lógica.

Ejemplo: “Ser matriz real con inversa” es independiente de “ser función real continua” (no tienen ninguna relación lógica, pues la primera propiedad es aplicable a las matrices pero no a las funciones y la segunda propiedad es aplicable a las funciones pero no a las matrices, luego no tienen sentido los posibles teoremas que las incluyan).

Otro ejemplo (propiedades sí aplicables a los mismos objetos): “Ser función periódica” no tiene relación lógica con “ser función continua”, pues no son ciertos los posibles teoremas “toda función periódica es continua” ni “toda función continua es periódica”.

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

### Ejemplos de demostraciones

Ejemplo de la búsqueda de un razonamiento general para demostrar la validez de un teorema:

Vamos a demostrar que el teorema “ser número racional implica ser número real” o “todo número racional es un número real” es cierto.

En efecto, “si  $x$  es **un número racional positivo** cualquiera (con lo cual ya cumple la hipótesis del teorema), existirá alguna fracción  $p/q$ , con  $p$  y  $q$  enteros positivos, de modo que se cumple  $x = p/q$ . Pero entonces, tomando el “segmento unidad de medida” y dividiéndolo en  $q$  partes iguales, cualquiera de dichas partes será un segmento de longitud  $1/q$ . Ahora, podemos construir un nuevo segmento a partir de un punto cualquiera, agregando consecutivamente en la misma dirección  $p$  veces el segmento de longitud  $1/q$ , con lo cual resultará un segmento que medirá  $p/q$  (en relación al “segmento unidad de medida” inicial). Por tanto  $x = p/q$  es “un número real positivo” por ser la medida de dicho segmento, con lo cual cumple la tesis del teorema (recuérdese que “número real positivo” es cualquier resultado de medir la longitud de algún segmento con una cierta unidad).

Y si  $x$  fuese **un número racional negativo**,  $-x$  será racional positivo, con lo cual también será un número “real positivo” por el razonamiento anterior. Pero entonces  $-(-x) = x$  será un “real negativo” y entonces también cumple la tesis del teorema (nos basamos en otro teorema más sencillo que suponemos ya demostrado, según el cual “el opuesto de un real positivo es un real negativo”).

Finalmente, el número racional cero es el mismo número real cero.

Mediante este razonamiento general (incluye todos los casos), queda entonces demostrada la certeza del teorema “todo número racional es un número real”.

---

Ejemplo de la búsqueda de un contraejemplo para demostrar la falsedad de un teorema:

Vamos a demostrar que el teorema recíproco del anterior (“ser número real implica ser número racional”) es falso.

En efecto, tenemos **un contraejemplo, que es  $\sqrt{2}$** . Veamos: “ $\sqrt{2}$  es un número real” pues es la longitud de un cierto segmento y por tanto **cumple la hipótesis** ( $\sqrt{2}$  es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos midan una “unidad de medida”), pero sabemos que  $\sqrt{2}$  no se puede expresar como un cociente  $a/b$ , con  $a$  y  $b$  enteros, con lo cual “ $\sqrt{2}$  no es un número racional” y entonces **no cumple la tesis** (demostración de esto último en la siguiente página).

Si  $\sqrt{2}$  cumple la hipótesis del teorema y no cumple su tesis, es un contraejemplo de dicho teorema, luego el mismo es falso.

### Demostración de un teorema por reducción al absurdo

Es un procedimiento bastante utilizado en Matemáticas.

Consiste en lo siguiente: Para demostrar la validez del teorema “ $A \Rightarrow B$ ” basta saber que no existe ningún objeto que cumpla la hipótesis “ $A$ ” y a la vez **no** cumpla la tesis “ $B$ ”.

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

Pero cumplir “A” y no cumplir “B”, es lo mismo que cumplir “A” y cumplir “noB”, con lo cual no deberá existir objeto que cumpla la propiedad “A y noB”.

Entonces, la idea para la demostración del teorema “ $A \Rightarrow B$ ” es considerar la propiedad “A y noB” y demostrar por reducción al absurdo que no puede haber algún objeto que la cumpla, o sea que “A y noB” es una propiedad absurda (para ello supondremos que sí haya un objeto que cumpla “A y noB”, lo cual conducirá a alguna contradicción).

Este es el procedimiento que se llama “demostración por reducción al absurdo del teorema dado “ $A \Rightarrow B$ ”.

---

Ejemplo: Queremos demostrar la propiedad “ $\sqrt{2}$  es un número irracional”.

Al respecto, podemos considerar el siguiente teorema que dice lo mismo: “ $x$  es real positivo que cumple la ecuación  $x^2 = 2$ ” (propiedad “A”) implica “ $x$  no puede escribirse como  $a/b$ , con  $a$  y  $b$  enteros positivos sin divisores comunes salvo 1” (propiedad “B”). Entonces, tenemos  $A \Rightarrow B$  y debemos demostrar que este teorema es cierto.

Pues bien, usaremos la demostración del teorema  $A \Rightarrow B$  por reducción al absurdo, para lo cual consideramos la propiedad “A y noB” y probaremos que esta propiedad es absurda. O sea, que debe ser absurda la propiedad “ $x$  es un real positivo que cumple la ecuación  $x^2 = 2$  y puede escribirse como  $a/b$ , con  $a$  y  $b$  enteros positivos sin divisores comunes salvo 1”. Y lograremos esto, suponiendo que exista un  $x$  que la cumpla, con lo cual resultará por razonamiento directo (\*) que dicho  $x$  no cumple esa misma propiedad “A y noB” de la que partimos (contradicción, con lo cual dicho  $x$  no puede existir, y entonces la propiedad “A y noB” es absurda).

Razonamiento directo (\*): Supongamos que exista un  $x$  que cumpla la propiedad “A y noB” dicha anteriormente. Al ser  $x = a/b$  (por cumplirse “noB”) se tendrá  $x^2 = a^2/b^2$ , con lo cual  $a^2 = x^2 \cdot b^2 = 2 \cdot b^2$  (por ser  $x^2 = 2$ , establecido en “A”). Esto prueba que  $a^2$  es múltiplo de 2, pero entonces tendrá que ser  $a$  también múltiplo de 2 (propiedad de los números enteros, que se supone ya demostrada). Se tendrá entonces  $a = 2 \cdot k$ , con  $k$  entero positivo. Con lo cual, al sustituir esta expresión de  $a$  en  $a^2 = 2 \cdot b^2$ , obtenemos la igualdad  $2^2 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$ , que simplificada conduce a  $2 \cdot k^2 = b^2$ . Por tanto, tenemos que  $b^2$  es también múltiplo de 2, lo cual obliga a que  $b$  sea múltiplo de 2 (misma razón anterior). Conclusión: Hemos llegado a que  $a$  y  $b$  son múltiplos de 2, lo cual contradice lo supuesto inicialmente (pues suponíamos que  $a$  y  $b$  no tenían divisores comunes salvo 1 y resulta que 2 es un divisor común de  $a$  y de  $b$ ). Esta contradicción demuestra que el número  $x$  mencionado al principio no puede existir.

---

Otro ejemplo: Queremos demostrar que “La suma de un número irracional y un número racional es siempre un número irracional”.

El teorema  $A \Rightarrow B$  que dice lo mismo será: “ $x$  es número irracional e  $y$  es número racional”  $\Rightarrow$  “ $x + y$  es número irracional” (los objetos donde el teorema es aplicable son los pares de números reales).

## LOS TEOREMAS EN MATEMÁTICAS

Demostración por reducción al absurdo de  $A \Rightarrow B$ : **La propiedad “A y noB” debe ser absurda**, siendo dicha propiedad “ $a$  es número irracional y  $b$  es número racional, siendo  $a + b$  número racional”.

Pues bien, supongamos que los números  $a$  y  $b$  la cumplen. Entonces, al ser  $b$  racional y  $a + b$  también racional, el número  $a = (a + b) - b$  será racional (la diferencia de dos números racionales es siempre otro número racional, como indica un teorema que se supone probado anteriormente). Por tanto, **tenemos una contradicción con lo anteriormente supuesto** (ya que suponíamos que  $a$  era irracional), luego los números  $a$  y  $b$  que suponíamos cumpliendo la propiedad “A y noB” no existen. **Entonces “A y noB” es absurda y por tanto el teorema  $A \Rightarrow B$  es cierto**.

---

Nota: En la práctica, si queremos demostrar que “la suma de un irracional  $a$  con un racional  $b$  es un número irracional”, diríamos en forma mucho más abreviada: Supongamos lo contrario, con lo cual  $a + b$  será racional; pero al ser  $b$  también racional, el número  $a = (a + b) - b$  será racional, contra lo supuesto. Por tanto, queda demostrado el teorema.

---