

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

(Prerrequisitos: Números reales. Potencias, raíces y logaritmos en $\mathbb{R}$. Inecuaciones racionales)

Conceptos básicos

Se llama “función real de una variable real” a **cualquier modo de asignar, a cada uno** de los números reales de un cierto conjunto, llamado “**dominio** de la función”, un cierto valor real llamado “**su imagen** por la función”, de modo que a elementos distintos del dominio se le asignen imágenes diferentes o imágenes iguales, **pero una sola imagen para cada uno**.

Por tanto, una **función bien definida** no puede dejar sin imagen a uno o más elementos de su dominio. Y tampoco puede asignar más de una imagen a algún elemento de su “dominio”.

Se llama “**recorrido**” de una “función real de variable real” al conjunto formado por las distintas imágenes asignadas por esa función, a partir de **todos** los elementos de su “dominio”.

Por lo cual, tanto “el dominio” como “el recorrido” de una “función real de una variable real”, son conjuntos formados por números reales.

Dicho de otra manera: Si llamamos a la función f , llamamos a su “dominio” A y llamamos a su “recorrido” B , a **todo** valor real a en A la función le asigna **un único** valor real $f(a)$ en B . De modo que si a recorre todos los valores de A , $f(a)$ recorre todos los valores de B . Pero, a valores diferentes de A no tienen por qué corresponderles siempre valores diferentes en B .

Nota: Cuando no haya peligro de confusión, utilizaremos la letra f para designar muchas funciones tomadas como ejemplos, aunque sean distintas (por ser esa letra la inicial de “función”). Pero cuando queramos tratar con más de una función en un mismo ejemplo, usaremos diferentes letras para identificarlas (f, g, h, l, m, n , etc...).

Ejemplos:

1) Tenemos la función f cuyo “dominio” es el conjunto $A = \{-1, \sqrt{2}, \pi, 5\}$, de modo que $f(-1) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 1/3$, $f(\pi) = \sqrt{3}$ y $f(5) = -2/7$. Obsérvese que en este caso ningún punto del “dominio” queda sin imagen y ninguno tiene más de una imagen, luego se trata de una “función bien definida”, siendo su “recorrido” $B = \{0, 1/3, \sqrt{3}, -2/7\}$. Además, se trata de una función llamada “inyectiva”, porque siempre asigna imágenes distintas a elementos distintos del “dominio”.

2) Sea la función g cuyo “dominio” A es el intervalo $[-1, 1]$, de modo que $f(x) = x^2$ para todo x de A (en este caso las imágenes responden a una “fórmula”, pero esto no es obligatorio). Obsérvese que ningún punto del “dominio” queda sin imagen (el cuadrado de cualquier número real siempre existe y da número real) y ninguno tiene más de una imagen (el cuadrado de x es un único valor, para cada x elegido en A). Por tanto, g es otra “función bien definida”. Se demuestra que el “recorrido” en este caso es el intervalo $[0, 1]$. Además, la función g no es “inyectiva”, porque las imágenes de números opuestos del intervalo coinciden (por ejemplo: $g(-1) = g(1) = 1$; $g(-1/2) = g(1/2) = 1/4$; etc...).

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

3) Si decimos que el “dominio” A de la función h es el intervalo $[0, +\infty)$ y que $h(x) = \ln x$, **no hemos definido bien la función h** , pues 0 está en A y no existe la imagen $h(0) = \ln(0)$. Podemos decir también que h no es función de “dominio” $[0, +\infty)$.

4) Pero si tomamos la función j con “dominio” $(0, +\infty)$ tal que $j(x) = \ln x$, j está “bien definida” como función, porque ahora **todo** número x del “dominio” tendrá su imagen, la cual es un **único** número real para cada x . El “recorrido” de esta función es todo $\mathbb{R}$. Además, números positivos distintos tienen siempre logaritmos distintos, luego esta función es “inyectiva”.

5) Si decimos que el “dominio” A de la función m es el intervalo $[0, 5]$ y que $m(x) = \pm\sqrt{x}$, **no hemos definido bien la función m** , pues muchos elementos de A tienen dos imágenes, como el número 4 que tiene imágenes $+2$ y -2 ; también tendrán dos imágenes todos los elementos restantes de A , salvo cero, pero esto ya no importa: Basta que un solo elemento del “dominio” tenga más de una imagen, para que la función no esté bien definida.

Si una función viene dada solamente por “una fórmula” del tipo $y = E(x)$, donde $E(x)$ representa una cierta expresión con la variable x , y no se indica cuál es su “dominio” (cosa muy frecuente), se supone que **dicho “dominio” es el mayor conjunto de números reales que den valores numéricos reales a la expresión $E(x)$ y no más de un valor para cada elemento de ese conjunto** (se entiende que el valor real de y dado por la expresión $E(x)$ para cada x de dicho conjunto es “la imagen” dada por la función para ese valor de x).

Por ejemplo, la función definida únicamente por la “fórmula” $y = x^3$ tiene “dominio” todo $\mathbb{R}$ (pues todo número real tiene un cubo único que es real). En esa función, como sabemos, la imagen de 1 es $1^3 = 1$, la imagen de -2 es $(-2)^3 = -8$, etc... Esta función es “inyectiva”.

Y la función definida únicamente por $y = \sqrt[4]{x}$ tiene “dominio” $[0, +\infty)$ (pues los únicos reales que tienen raíz cuarta real son los positivos y cero; además se tomará como imagen de cada número x de ese “dominio” su raíz cuarta **no negativa** (valor único), pues recuérdese el convenio según el cual la expresión $\sqrt[4]{x}$ equivale a $+\sqrt[4]{x}$). Así, la imagen de 0 es $\sqrt[4]{0} = 0$, la imagen de 4 es $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, la imagen de 81 es $\sqrt[4]{81} = 3$, etc...

Variables asociadas a una función

A toda “función real de una variable real” se le asocian **dos variables reales**: Una, llamada “**variable independiente**”, cuyos valores **se eligen libremente** en el “dominio” A de la función (representaremos esta variable normalmente por x , pero que en la práctica puede estar representada por cualquier otra letra). Y otra variable, llamada “**variable dependiente**”, cuyos valores son los números reales que están en el “recorrido” B de la función, **los cuales dependen a través de la función de los valores que hayamos elegido en el “dominio”** (esta variable normalmente se representa por y , pero en la práctica puede ser cualquier otra letra).

Si llamamos f a “la función”, se escribe $y = f(x)$ para todo x del “dominio” A , estando y en B . Aquí la escritura $y = f(x)$ no representa necesariamente una “fórmula” del tipo $y = E(x)$ como las que hemos nombrado anteriormente: Lo único que nos indica es que “la función” se llama f que “su variable independiente” se llama x y que “su variable dependiente” se llama y .

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Por ejemplo, si una función representa la distancia de un objeto móvil a un punto de referencia, la cual es una función del tiempo transcurrido a partir de un cierto instante, esa función la representaríamos como $d = f(t)$, con t “variable independiente” y d “variable dependiente”.

Precisamente, **a la función se le dice “real” porque su “variable dependiente” toma valores reales** (los del “recorrido”). Y decimos que la función es **“de una variable real”** porque posee **una sola “variable independiente”, la cual toma también valores reales** (los del “dominio”).

Pero hay “funciones reales” que tienen **dos o más “variables independientes”** las cuales toman valores reales, como la función que nos da el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas, la cual tiene tres variables independientes (las masas m_1 y m_2 de que se trate, así como la distancia d que las separe). Trataremos las “funciones reales de dos y de tres variables reales” en los Temas 5, 6 y 7 de esta página web.

Y hay funciones cuya “variable dependiente” toma valores que son números complejos (se las llama “funciones complejas”), las cuales a su vez podrían tener una sola “variable independiente compleja” o varias “variables independientes complejas”. No las estudiaremos en esta página web.

Gráfica de una función real de una variable real

Se llama **“gráfica”** de una función real de una variable real, $y = f(x)$, a la representación geométrica en un plano de los puntos cuyas abscisas son todos los valores del “dominio” y cuyas ordenadas son sus correspondientes imágenes. O sea, que la gráfica de la función $f(x)$ será el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, con x variando en todo el “dominio” A de la función. (Se supone, obviamente, la existencia previa de un sistema cartesiano de referencia en dicho plano, que supondremos ortogonal en todo lo que sigue).

La gráfica puede ser una recta o parte de ella; puede ser una curva o parte de ella; también puede incluir tramos de rectas y de curvas diferentes, enlazadas o no; pero a veces sólo incluye varios puntos. Por ejemplo, la gráfica de la función del ejemplo 1 dado en la pág. 1, tiene solamente cuatro puntos: Los de coordenadas $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, 1/3)$, $(\pi, \sqrt{3})$ y $(5, -2/7)$. Por tanto, **no incluye segmentos rectilíneos ni arcos de curvas que los unan**.

Nota: En muchas ocasiones la gráfica no se puede dibujar completa por ser muy extensa. En esos casos, se dibuja una parte representativa de la misma indicando que tiene otros puntos (a veces infinitos puntos más). Por ejemplo, si la gráfica es una recta no puede dibujarse completa, pero podemos dibujar un segmento suficientemente grande de la misma (que incluya sus cortes con los ejes o el único corte que posea), indicando que se extiende más allá de sus extremos con unos puntos suspensivos o con unas puntas de flecha en los mismos. De modo análogo ocurre si la gráfica es una parábola vertical, dibujando entonces un arco suficientemente grande de la misma, donde veamos sus puntos más importantes (sus cortes con los ejes y su máximo o su mínimo), indicando del mismo modo que se extiende más allá de sus extremos. Etc...

Propiedades importantes de la gráfica de cualquier “función real de una variable real”:

- 1) **Toda recta vertical corta en un solo punto o no corta** a la gráfica de cualquier función (pues de lo contrario, si alguna recta vertical, de ecuación $x = a$, cortase en más de un punto a la gráfica de la función, puntos que podríamos designar (a, b) , (a, c) , etc..., se

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

tendría $f(a) = b$ y también $f(a) = c$ con $b \neq c$, lo cual estaría indicando que el elemento a del “dominio” tiene al menos dos imágenes, lo cual es imposible por ser f función).

Así, curvas como una parábola horizontal o una circunferencia **no son gráficas de funciones**. En cambio, curvas como una parábola vertical o la mitad superior (o inferior) de una circunferencia **sí son gráficas de funciones**. Obsérvese que puede haber rectas verticales que no corten a la gráfica de una función (pues si el valor $x = a$ que corresponde a la recta no pertenece al “dominio” de la función, no tendrá imagen y la recta vertical que tiene esa ecuación no incluirá ningún punto de su gráfica).

- 2) La “proyección vertical” de los puntos de la gráfica sobre el eje OX nos dará siempre la representación geométrica del “dominio” de la función. En muchas ocasiones, el “dominio” de la función es ilimitado y no podrá quedar totalmente representado, como le ocurre a la propia gráfica de la misma función.
- 3) La “proyección horizontal” de los puntos de la gráfica sobre el eje OY nos dará siempre la representación geométrica del “recorrido” de la función. También en muchas ocasiones ese recorrido será ilimitado y no podrá representarse en forma completa.
- 4) Si la función es “inyectiva”, toda recta horizontal corta en un solo punto o no corta a su gráfica (pues de lo contrario, si alguna recta horizontal, de ecuación $y = b$, cortase en más de un punto a la gráfica, puntos que podríamos designar (a, b) , (c, b) , etc..., se tendría $f(a) = b$ y también $f(c) = b$, con $a \neq c$, lo cual es imposible si f es “inyectiva”).

Así, curvas como una parábola vertical o como la mitad superior (o inferior) de una circunferencia **son gráficas de funciones “no inyectivas”**, pues hay rectas horizontales que cortan en dos puntos a esas gráficas. En cambio, curvas como media parábola horizontal, media parábola vertical y cualquiera de los cuatro arcos de una circunferencia de centro el origen que estén situados en uno solo de los cuadrantes del sistema de coordenadas, **son gráficas de funciones “inyectivas”**, porque cualquier recta horizontal que corte a esas gráficas lo hará en un solo punto.

Funciones pares e impares

Una función se llama “par” cuando tenga un “dominio” simétrico respecto al valor cero (o sea, que al incluir un valor x incluirá también el valor $-x$) y cumpla además la propiedad $f(-x) = f(x)$, para todo x de su “dominio”.

Ejemplo: La función $y = x^2$ es “par”, si suponemos que su “dominio” es todo $\mathbb{R}$ (simétrico respecto al valor cero), pues es $(-x)^2 = x^2$, para todo x real. Pero la función $y = x^2$ de “dominio” $(0, +\infty)$ no es “par”, pues el “dominio” que hemos dado no es simétrico respecto al valor cero (incluye solamente los reales positivos, pero no incluye sus simétricos negativos).

Propiedades importantes de las “funciones pares”:

1) Si una función es “par”, será “no inyectiva”, pues será $x \neq -x$ si x no es cero y sin embargo $f(x) = f(-x)$ (elementos diferentes tienen la misma imagen). (Suponemos que su dominio no se reduce solamente a 0).

2) La gráfica de una función “par” es siempre **simétrica respecto al eje OY**. Pues al incluir un punto (x, y) , incluirá también a su punto simétrico respecto a dicho eje que es el $(-x, y)$.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

(Comprobarlo con la función $y = x^2$ y con otra función “par” muy conocida que es $y = \cos x$, cuya gráfica está en la Sección 2.2).

Una función se llama “impar” cuando tenga un “dominio” simétrico respecto al valor cero y además cumpla la propiedad $f(-x) = -f(x)$, para todo x de su “dominio”.

Ejemplo: La función $y = x^3$ es “impar”, si suponemos que su “dominio” es $\mathbb{R}$, pues se tiene $(-x)^3 = -x^3$, para todo x real. Pero la función $y = x^3$ de “dominio” $[-1, 3]$ no es “impar”, pues dicho “dominio” no es simétrico respecto al valor cero (por ejemplo, incluye el valor 3 pero no incluye el valor -3). Entonces no cumple la propiedad $f(-3) = -f(3)$ porque $f(-3)$ no existe.

Propiedad importante: La gráfica de una función “impar” será siempre **simétrica respecto al origen**. Pues al incluir un punto (x, y) , incluirá también a su punto simétrico respecto al origen que es el $(-x, -y)$. (Comprobarlo con la función $y = x^3$ y con la función $y = \sin x$, cuyas gráficas están en la Sección 2.2).

Es importante saber que hay muchísimas funciones que no son “pares” ni “impares” (la mayoría).

Ejemplo: La función $y = 2x + 1$ no es “par” ni es “impar”, porque su gráfica es una recta no simétrica respecto a OY, ni simétrica respecto al origen (comprobarlo dibujándola). O de otro modo: Tenemos $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, luego no es $f(-1) = f(1)$ y entonces la función no es “par”; pero tampoco es $f(-1) = -f(1)$, luego la función no es “impar”.

Otro ejemplo: La función $y = 2^x$ no es “par” ni es “impar”, porque $f(1) = 2$ y $f(-1) = 1/2$, con lo cual no es $f(-1) = f(1)$ ni es $f(-1) = -f(1)$. (Si vemos en la Sección 2.2 la gráfica de $y = a^x$, con a mayor que 1, vemos que la misma no es simétrica respecto al eje OY ni es simétrica respecto al origen; e $y = 2^x$ es un caso particular).

Funciones periódicas

Una función se llama “periódica” cuando exista un número positivo fijo P , de modo que se cumpla $f(x \pm P) = f(x)$ para todo x de su “dominio”. P se llama “periodo de la función” si es el menor número positivo que cumple lo anterior.

Entonces, el “dominio” puede ser todo $\mathbb{R}$ (y los valores de la función en el intervalo $[0, P]$ se repetirán con el mismo orden en los intervalos $[P, 2P]$, $[2P, 3P]$, etc... así como en los intervalos $[-P, 0]$, $[-2P, -P]$, etc...) o también el “dominio” puede ser una unión de infinitos intervalos de igual longitud e igual tipo (todos abiertos, todos cerrados o todos con un mismo extremo incluido), de modo que todos puedan obtenerse a partir de uno cualquiera de ellos, desplazándolo sucesivas veces la cantidad P hacia la derecha y hacia la izquierda (repitiéndose los valores de la función en el mismo orden sobre todos esos intervalos).

Por tanto, si una función es “periódica”, “no será inyectiva” (porque repite valores).

Ejemplos:

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1) La función $y = \sen x$ es “periódica” de “periodo” $P = 2\pi$. En efecto, sabemos que toma todos sus valores en el intervalo $[0, 2\pi]$ y repite dichos valores en el mismo orden en los intervalos a su derecha $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, etc... Y también los repite en $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$, etc... En este caso el “dominio” es $\mathbb{R}$. (Nótese que al sumar o restar $4\pi, 6\pi, 8\pi$, etc... a cualquier x , la función $y = \sen x$ repite sus valores en el mismo orden, pero **2π es el menor número positivo que lo hace**, luego es “el periodo” de esta función).

2) La función $y = \tan x$ es “periódica” de “periodo” $P = \pi$. Toma todos sus valores en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de longitud π y los repite en el mismo orden en los intervalos $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, etc... También los repite en los intervalos $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$, etc... Al desplazar el primer intervalo la distancia π sucesivas veces hacia la derecha se obtienen los siguientes, y al desplazarlo hacia la izquierda resultan estos últimos. En este caso el “dominio” es una unión de infinitos intervalos disjuntos de longitud π , todos abiertos, que no coincide con todo $\mathbb{R}$, pues no incluye los múltiplos impares positivos y negativos de $\pi/2$. En este caso la función también repite sus valores en el mismo orden sumando o restando $2\pi, 3\pi, 4\pi$, etc... a cualquier x del “dominio”, pero **π es el menor número positivo que lo hace**.

(Ver gráficas de las funciones seno y tangente en Sección 2.2)

3) Sea la función f que toma valor 1 en todos los puntos del intervalo $[0, 1]$, toma valor 1 en todos los puntos del intervalo $[2, 3]$, toma valor 1 en todos los puntos del intervalo $[4, 5]$, etc... y que también toma valor 1 en todos los puntos de los intervalos $[-2, -1]$, $[-4, -3]$, etc... Y en los intervalos intermedios f no está definida. Entonces, f es una función “periódica” de “periodo” $P = 2$ (desplazando el intervalo $[0, 1]$ hacia la derecha 2 unidades se obtiene el intervalo $[2, 3]$ y desplazándolo otras 2 unidades se obtiene el $[4, 5]$, etc..., y desplazando el mismo intervalo $[0, 1]$ hacia la izquierda 2 unidades, sucesivas veces, se obtienen los intervalos $[-2, -1]$, $[-4, -3]$, etc..., y además los valores que toma f en todos esos intervalos son exactamente iguales). Aquí la función f tiene un “dominio” que es la unión de los infinitos intervalos cerrados de longitud 1 cuyos extremos izquierdos son números enteros pares, pero no incluye los intervalos abiertos intermedios de longitud 1 cuyos extremos izquierdos son números enteros impares. Y los valores que toma la función en cualquiera de los intervalos de su dominio se repiten en los demás (la función en este caso solamente toma el valor 1, pero podríamos haberle dado valores crecientes o decrecientes entre 2 y 5, por ejemplo, repitiendo esos mismos valores y en el mismo orden para todos los intervalos del dominio, de modo que las partes de “la gráfica” sobre los distintos intervalos serían desplazamientos de 2 unidades hechos a la parte de “la gráfica” correspondiente a uno cualquiera de ellos. (Hacer un dibujo de la gráfica de la función dada para ver más claramente lo dicho; es un caso en que la longitud de los intervalos que se repiten es 1, lo cual no coincide con el valor del “periodo” que es 2).

Restricciones de una función

Si reducimos “el dominio” A de una cierta función f , manteniendo las imágenes de los puntos que hayan quedado en la parte considerada como “nuevo dominio”, se obtiene otra función que se llama “restricción de la función inicial al nuevo dominio elegido”.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Entonces, hay tantas “restricciones” de una función como subconjuntos podamos elegir en el “dominio” inicial de la misma. Y, en general, el “recorrido” de cada “restricción” depende de cuál sea su “dominio”, pero estará siempre contenido en el “recorrido” de la función inicial.

Ejemplo: Podemos reducir el dominio $\mathbb{R}$ de la función $y = x^2$ al intervalo $[0, +\infty)$, obteniéndose otra función (la “restricción de $y = x^2$ a dicho intervalo”), cuya gráfica es solamente la mitad derecha de la gráfica de la función anterior (que es una parábola vertical con vértice en el origen, como sabemos). Nótese que la función inicial, de dominio todo $\mathbb{R}$, no es “inyectiva” por ser “par” (en efecto, las rectas horizontales por encima del eje OX cortan a la parábola vertical en dos puntos) y sin embargo “la restricción” elegida sí es “inyectiva” (pues, al quedarnos con la mitad derecha de la parábola, esas rectas horizontales cortan ya en un solo punto a la gráfica). Sin embargo el “recorrido” de esta “restricción” sigue siendo el intervalo $[0, +\infty)$, como el de la función inicial. Pero si la “restricción” que tomásemos fuese de “dominio” el intervalo $[-2, -1]$, también resultaría una función “inyectiva”, con gráfica el arco de la mitad izquierda de la parábola inicial que va del punto $(-1, 1)$ al punto $(-2, 4)$ y cuyo “recorrido” sería el intervalo $[1, 4]$.

Otro ejemplo: La función $y = \cos x$ de “dominio” $\mathbb{R}$ **no** es “inyectiva” por ser “periódica”. Pero “su restricción al intervalo $[0, \pi]$ ” sí es una función “inyectiva”. En efecto, su gráfica es un tramo de la gráfica inicial que **baja constantemente** desde el punto $(0, 1)$ al punto $(\pi, -1)$, con lo cual las rectas horizontales la cortarán en un solo punto o no la cortarán, siendo su “recorrido” en este caso el mismo de la función inicial: El intervalo $[-1, 1]$. (Ver la gráfica de la función coseno de dominio $\mathbb{R}$ en la Sección 2.2 y comprobar lo que estamos diciendo para el tramo que corresponde al nuevo dominio $[0, \pi]$).

Funciones inversas

Si una función f es “inyectiva”, de “dominio” A y “recorrido” B , existe siempre otra función que se representa por f^{-1} , también “inyectiva”, de “dominio” B y “recorrido” A , que se llama “su función inversa”, la cual queda definida así: $f^{-1}(b) = a$ sí y sólo si es $f(a) = b$, para todos los b pertenecientes al conjunto B .

O sea, f^{-1} actúa **invirtiendo el sentido de f** (f va de a hacia b y f^{-1} va de b hacia a), con lo cual también invierte los papeles de “dominio” y “recorrido”.

Desde luego, la “inversa” de f^{-1} vuelve a ser f (da igual cuál de ellas representemos por f , que la otra será f^{-1}).

Propiedad importante de las funciones “inversas”: Las gráficas de dos funciones “inversas” son **siempre simétricas respecto de la recta $y = x$** (bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º). Pues si un punto (a, b) está en una de las gráficas, el punto simétrico (b, a) está en la otra gráfica. (Hacer un dibujo para comprobarlo; el segmento que une dos puntos simétricos debe ser perpendicular a la recta $y = x$ y ambos deben estar a la misma distancia de dicha recta; es lo que ocurre con los puntos (a, b) y (b, a)).

Ejemplos de “funciones inversas”:

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1) La función f del ejemplo 1 dado en la página 1 era “inyectiva”, luego su “función inversa” tendrá dominio $B = \{0, 1/3, \sqrt{3}, -2/7\}$ y tendrá recorrido $A = \{-1, \sqrt{2}, \pi, 5\}$, de modo que $f^{-1}(0) = -1$, $f^{-1}(1/3) = \sqrt{2}$, $f^{-1}(\sqrt{3}) = \pi$, $f^{-1}(-2/7) = 5$.

2) La función g de “dominio” $A = [1, 25]$ y de “recorrido” $B = [1, 5]$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$, es “inyectiva” (pues dos números positivos distintos en A tienen siempre raíces cuadradas positivas distintas en B ; además, si x avanza desde 1 hasta 25, $\sqrt{x}$ avanza desde 1 hasta 5, con lo cual vemos que efectivamente “el recorrido” de g es el intervalo $[1, 5]$). En este caso la función “inversa” g^{-1} , de “dominio” B y de “recorrido” A , es la que tiene por expresión $g^{-1}(x) = x^2$ (pues si g pasa de cada valor de A al correspondiente de B hallando su raíz cuadrada, g^{-1} pasará de este último al primero elevándolo al cuadrado). Así tenemos, por ejemplo:

$$g(1) = \sqrt{1} = 1; g(4) = \sqrt{4} = 2; g(7) = \sqrt{7} \text{ y } g(9) = \sqrt{9} = 3$$

Y para la “función inversa” se tendrá:

$$g^{-1}(1) = 1^2 = 1; g^{-1}(2) = 2^2 = 4; g^{-1}(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7 \text{ y } g^{-1}(3) = 3^2 = 9$$

Nota: Es muy importante no confundir f^{-1} con la función $\frac{1}{f}$ (esta última se llama “**función recíproca de f** ” y representa el cociente de la función constante 1 entre la función $f(x)$). Con números es indiferente hablar de “inverso” o de “recíproco” ($2^{-1} = \frac{1}{2}$), pero con funciones es totalmente distinto.

Por ejemplo, la “función inversa” de $y = x^3$ es $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, pero la “función recíproca” de $y = x^3$ es $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ (completamente distinta).

Otro ejemplo: La “función inversa” de $y = \cos x$, restringida al intervalo $[0, \pi]$, es $y = \arccos x$ (también escrita como $y = \cos^{-1} x$, lo cual se puede prestar a confusión). ¡Tener cuidado!. En cambio, la “función recíproca de $y = \cos x$ es $y = \sec x$ (completamente distinta). Recuérdese que $\sec x = 1/\cos x$.

(Nosotros no usaremos las notaciones $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ ni $\tan^{-1}x$ en lugar de las notaciones $\arcsin x$, $\arccos x$ y $\arctan x$ porque se prestan a confusión. Sin embargo, en muchas calculadoras aparecen las primeras y no las segundas, por razones de espacio en las teclas que son pequeñas).

Funciones básicas

Llamaremos así a las más sencillas funciones reales de una variable real, para las cuales el cálculo de imágenes es inmediato o se obtiene utilizando una sola expresión muy simple (cuyos valores están en las calculadoras científicas).

LISTA DE LAS FUNCIONES BÁSICAS: Funciones constantes ($y = k$, con k real), función identidad ($y = x$), funciones potenciales de exponente entero positivo ($y = x^n$), funciones radicales ($y = \sqrt[n]{x}$, con $n > 1$), funciones exponenciales ($y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$), funciones lo-

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

garítmicas ($y = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$), principales funciones trigonométricas ($y = \sen x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$, con x en radianes), inversas de las anteriores ($y = \arc \sen x$, $y = \arc \cos x$ e $y = \arc \tan x$, con y en radianes) y función valor absoluto ($y = |x|$).

SUS GRÁFICAS Y SUS CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES ESTÁN EN LA SECCIÓN 2.2 DE ESTA PÁGINA WEB.

Obsérvese que, salvo las funciones constantes y la función identidad (donde no hay que operar para obtener imágenes), en cada una de las “funciones básicas” interviene una determinada expresión $E(x)$, característica de la función de que se trate y que ha sido señalada antes, cuyos valores para cada x del “dominio” respectivo se obtienen directamente con las teclas de cualquier calculadora científica (en el caso de las funciones trigonométricas y de sus inversas, hay que trabajar en modo radianes).

En todas las “funciones básicas”, salvo que se indique otra cosa para alguna “restricción”, tomaremos siempre los “dominios” mayores posibles (o sea, los mayores conjuntos de números reales para los cuales la función considerada sea capaz de darnos imágenes reales únicas).

Así tenemos:

- 1) $\mathbb{R}$ es el “dominio” de las funciones: constantes, identidad, potenciales de exponente entero positivo, radicales de índice impar, exponenciales, seno, coseno, arco tangente y valor absoluto.
- 2) $[0, +\infty)$ es el “dominio” de las funciones radicales de índice par.
- 3) $(0, +\infty)$ es el “dominio” de las funciones logarítmicas.
- 4) $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$ es el “dominio” de la función tangente.
- 5) $[-1, 1]$ es el “dominio” de las funciones arco seno y arco coseno.

Con esos “dominios” máximos, tenemos los siguientes “recorridos” de las funciones básicas:

- 1) $\mathbb{R}$ es el “recorrido” de la funciones identidad, potenciales de exponente impar, radicales de índice impar, logarítmicas y tangente.
- 2) $[0, +\infty)$ es el “recorrido” de las funciones potenciales de exponente par y valor absoluto.
- 3) $(0, +\infty)$ es el “recorrido” de las funciones exponenciales.
- 4) $[-1, 1]$ es el “recorrido” de las funciones seno y coseno.
- 5) $[-\pi/2, \pi/2]$ es el “recorrido” de la función arco seno.
- 6) $[0, \pi]$ es el “recorrido” de la función arco coseno.
- 7) $(-\pi/2, \pi/2)$ es el “recorrido” de la función arco tangente.
- 8) El conjunto $\{k\}$ es el “recorrido” de la función constante $y = k$.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Inversas de las funciones básicas

- 1) No existe “la inversa” de una “función constante”, ya que no es inyectiva ni posee “restricciones” inyectivas.
- 2) “La inversa” de la “función identidad”, $y = x$, es ella misma. Y “la inversa” de “su función opuesta”, $y = -x$, es también ella misma.
- 3) Las “funciones potenciales” $y = x^n$ de exponente par “no son inyectivas” en $\mathbb{R}$, luego no tienen “inversas”. Pero “la restricción” de una cualquiera de ellas al intervalo $[0, +\infty)$ es “inyectiva” y “su inversa” es la “función radical” $y = +\sqrt[n]{x}$ (con mismo valor de n). Así mismo, “la restricción” de una cualquiera de ellas al intervalo $(-\infty, 0]$ es “inyectiva” y “su inversa” es $y = -\sqrt[n]{x}$ (mismo valor de n).
- 4) Las “funciones potenciales” $y = x^n$ de exponente impar “son inyectivas” en $\mathbb{R}$ y “sus inversas” son las “funciones radicales” $y = \sqrt[n]{x}$ (mismo valor de n).
- 5) Las “funciones radicales” $y = +\sqrt[n]{x}$ de índice par “son inyectivas” en $[0, +\infty)$ y “sus inversas” son las “funciones potenciales” $y = x^n$ restringidas a $[0, +\infty)$ (mismo valor de n).
- 6) Las “funciones radicales” $y = -\sqrt[n]{x}$ de índice par “son inyectivas” en $[0, +\infty)$ y “sus inversas” son las “funciones potenciales” $y = x^n$ restringidas a $(-\infty, 0]$ (mismo valor de n).
- 7) Las “funciones radicales” $y = \sqrt[n]{x}$ de índice impar “son inyectivas” en $\mathbb{R}$ y “sus inversas” son las “funciones potenciales” $y = x^n$ (mismo valor de n).
- 8) Las “funciones exponenciales” $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) “son inyectivas” en $\mathbb{R}$ y “sus inversas” son las “funciones logarítmicas” $y = \log_a x$ (mismo valor de a).
- 9) Las “funciones logarítmicas” $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) “son inyectivas” en $(0, +\infty)$ y “sus inversas” son las “funciones exponenciales” $y = a^x$ (mismo valor de a).
- 10) La función $y = \operatorname{sen} x$ (x en radianes) “no es inyectiva” en $\mathbb{R}$, pero tiene muchas “restricciones inyectivas”. Una de ellas (llamada “su restricción principal”) es la que tiene como “dominio” el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, donde la función crece de -1 a 1 sin repetir valores. “Su inversa” es $y = \operatorname{arc sen} x$.
- 11) La función $y = \operatorname{cos} x$ (x en radianes) “no es inyectiva” en $\mathbb{R}$, pero tiene muchas “restricciones inyectivas”. Una de ellas (llamada “su restricción principal”) es la que tiene como “dominio” el intervalo $[0, \pi]$, donde la función decrece de 1 a -1 sin repetir valores. “Su inversa” es $y = \operatorname{arc cos} x$.
- 12) La función $y = \operatorname{tag} x$ (x en radianes) “no es inyectiva” en su dominio. Pero tiene muchas “restricciones inyectivas”. Una de ellas (llamada “principal”) es la que tiene como “dominio” el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, donde la función crece de $-\infty$ a $+\infty$. “Su inversa” es $y = \operatorname{arc tag} x$.
- 13) La función $y = \operatorname{arc sen} x$ “es inyectiva” en $[-1, 1]$ y “su inversa” es la función $y = \operatorname{sen} x$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
- 14) La función $y = \operatorname{arc cos} x$ “es inyectiva” en $[-1, 1]$ y “su inversa” es la función $y = \operatorname{cos} x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

15) La función $y = \arctan x$ “es inyectiva” en $\mathbb{R}$ y su inversa es $y = \tan x$ restringida al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

16) La función $y = |x|$ “no es inyectiva” en $\mathbb{R}$, luego no tiene inversa. Tiene muchas “restricciones inyectivas”, pero no tienen mayor interés, pues son restricciones de la función $y = x$ o de la función $y = -x$.

Nota 1: El conocimiento de “las inversas” y de “los recorridos” de las funciones básicas nos permiten en la práctica despejar la incógnita en una ecuación de la forma $f(x) = k$, siendo f una función básica “inyectiva” y k un valor real de “su recorrido” (que estará en “el dominio” de su “inversa”). En efecto, si es $f(x) = k$, con k en el “recorrido” de f , le aplicamos f^{-1} a ambos miembros de la anterior igualdad y usamos la propiedad de que la composición de f con f^{-1} es la función identidad i_A del conjunto A (función que convierte todo elemento de A en sí mismo), obteniendo $(f^{-1} \circ f)(x) = i_A(x) = x = f^{-1}(k)$ con lo cual tenemos x despejada como $x = f^{-1}(k)$.

Por ejemplo: Tenemos $x^5 = 30$ y queremos despejar x . La función $f(x) = x^5$ es una función básica “inyectiva” y su “recorrido” es todo $\mathbb{R}$, con lo cual 30 está en el mismo, luego la ecuación dada cumple los dos requisitos dichos anteriormente para la ecuación $f(x) = k$. Y como “la inversa” de $f(x) = x^5$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$, se tendrá $x = \sqrt[5]{30} = 1.9743\dots$.

Otro ejemplo: Tenemos $\sin x = 0.3$ y queremos despejar x . Sabemos que $f(x) = \sin x$ de “dominio” $\mathbb{R}$ **no** es una función básica “inyectiva”, pero **sí lo es** “su restricción” al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, de modo que la función $\arcsin x$ es “su inversa”. Además 0.3 está en el “recorrido” de la función seno con esa “restricción”, que es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, resultará $x = \arcsin 0.3 = 0.3046\dots$ (cálculo en modo radianes), siendo este el único valor de x del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ que cumple la ecuación dada.

Ahora bien, sabemos que hay otros infinitos x con el mismo valor del seno (por la “periodicidad” de la función f , de periodo 2π), luego en este caso hay infinitas soluciones de la ecuación dada, que son:

$$\boxed{x = \arcsin 0.3 + 2k\pi} = 0.30469\dots + k \cdot 6.28318\dots \quad (k \text{ entero positivo, negativo o cero})$$

Nota: Si la ecuación dada hubiese sido $\sin x = k$, con k **no perteneciente** al intervalo $[-1, 1]$, no podría aplicarse el método anterior porque k no pertenece al “recorrido” de la función seno. Pero en este caso la ecuación dada se ve que es absurda y por tanto no tiene solución.

Operaciones entre funciones

Dadas dos funciones reales de una variable real, podemos definir nuevas funciones operando con ellas.

Supongamos que las funciones sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Llamaremos $Dom(f)$ y $Dom(g)$ a sus respectivos “dominios” y supongamos que estos dominios tengan puntos comunes (intersección no vacía).

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Entonces el conjunto D “intersección” de ambos “dominios” (puntos comunes entre ambos), puede tomarse como “dominio” de cuatro nuevas funciones que representaremos por $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$:

La “función suma $f + g$ ”, para cada x de D , da la imagen $f(x) + g(x)$.

La “función diferencia $f - g$ ”, para cada x de D , da la imagen $f(x) - g(x)$.

La “función diferencia $g - f$ ”, para cada x de D , da la imagen $g(x) - f(x)$.

La “función producto $f \cdot g$ ”, para cada x de D , da la imagen $f(x) \cdot g(x)$.

Obsérvese que los puntos de D son los únicos x para los cuales existen a la vez los valores $f(x)$ y $g(x)$, con lo cual podemos sumarlos, restarlos o multiplicarlos. Si D fuese vacío (caso en que los “dominios” de las dos funciones carezcan de puntos comunes), ninguna de las funciones anteriores podrá existir.

En resumen:

$$\boxed{Dom(f + g) = Dom(f - g) = Dom(g - f) = Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)}$$

Además puede definirse en D “la función cociente f/g ” mediante la expresión $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, siempre que la función del denominador no se haga cero. Por tanto, su “dominio” en general será el conjunto que resulte de quitarle a D los puntos donde $g(x) = 0$.

O sea:
$$\boxed{Dom(f/g) = [Dom(f) \cap Dom(g)] - \{x : g(x) = 0\}}$$

E igualmente puede definirse en D “la función cociente g/f ” mediante la expresión $y = \frac{g(x)}{f(x)}$, cuando el nuevo denominador no se haga cero. Por tanto, su “dominio” en general será el conjunto que resulte de quitarle a D los puntos donde $f(x) = 0$.

O sea:
$$\boxed{Dom(g/f) = [Dom(f) \cap Dom(g)] - \{x : f(x) = 0\}}$$

En cualquier caso, se supone que el “dominio” de la operación que se realice tiene que ser no vacío. Si algún “dominio” fuese vacío, la función correspondiente no existirá. Por ejemplo: No existen las funciones suma, diferencias, producto y cocientes de $f(x) = \sqrt{-x}$ y $g(x) = \ln x$, ya que el “dominio” de la primera es $(-\infty, 0]$ y el “dominio” de la segunda es $(0, +\infty)$, siendo la intersección de ambos vacía (no tienen puntos comunes).

Nota: La función tangente es el cociente de las funciones seno y coseno ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) por lo cual podríamos no haberla incluido entre las funciones básicas, pero es tan importante que se justifica plenamente haberla incluido en la lista correspondiente, junto con su inversa arco tangente (ambas se usan muchísimo y sus valores están en las calculadoras científicas, en modo grados que aquí no nos interesan y en modo radianes).

Ejemplos de operaciones:

Nos dan las funciones $y = \ln x$ e $y = \sqrt{2-x}$, cuyos “dominios” son respectivamente $(0, +\infty)$ y $(-\infty, 2]$, los cuales tienen intersección $D = (0, 2]$. Tenemos: La suma $y = \ln x + \sqrt{2-x}$, la

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

diferencia $y = \ln x - \sqrt{2-x}$, la otra diferencia $y = \sqrt{2-x} - \ln x$ y el producto $y = \ln x \cdot \sqrt{2-x}$ (todas son funciones con “dominio” D). Además tenemos la función cociente $y = \frac{\ln x}{\sqrt{2-x}}$ con “dominio” $D - \{2\} = (0, 2)$. Y tenemos la otra función cociente $y = \frac{\sqrt{2-x}}{\ln}$ con “dominio” $D - \{1\} = (0, 1) \cup (1, 2]$.

Nota 1: El “dominio” de $y = \sqrt{2-x}$ es $(-\infty, 2]$ porque para que exista el valor de la raíz como número real tiene que cumplirse la inequación $2-x \geq 0$, con lo cual ha de ser $x \leq 2$.

Nota 2: El producto y el cociente de dos funciones “pares” darán otras funciones “pares” en sus respectivos dominios. Igualmente, el producto y el cociente de dos funciones “impares” darán también funciones “pares”. Pero el producto y el cociente de una función “par” y una función “impar” darán nuevas funciones “impares”.

Por ejemplo, la función seno es “impar” en $\mathbb{R}$ y la función coseno es “par” en $\mathbb{R}$, con lo cual la función tangente (que es su cociente) resulta función “impar” en $\mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$.

Ya mencionamos en la pág. 8 que la llamada “función recíproca” de $y = f(x)$ es la función $y = \frac{1}{f(x)}$ (cociente de la función constante 1 entre la función f), cuyo “dominio” será entonces la intersección de $\mathbb{R}$ con el “dominio” de f (que nos dará siempre el “dominio” de f) menos los puntos de dicho “dominio” donde se cumpla $f(x) = 0$.

Casos particulares importantes de “funciones recíprocas”:

La “recíproca” de $y = x$, que es $y = \frac{1}{x}$, con “dominio” $\mathbb{R} - \{0\}$

La “recíproca” de $y = x^2$, que es $y = \frac{1}{x^2}$, con “dominio” $\mathbb{R} - \{0\}$

La “recíproca” de $y = \sin x$, que es $y = \operatorname{cosec} x$ (función cosecante) cuyo “dominio” es $\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots\}$ (pues $\sin x$ se anula en esos valores eliminados)

La “recíproca” de $y = \cos x$, que es $y = \sec x$ (función secante) cuyo “dominio” $\mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$ (pues $\cos x$ se anula en los valores eliminados)

La “recíproca” de $y = \tan x$, que es $y = \cotan x$ (función cotangente) con “dominio” $\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots\}$ (pues $\tan x$ se anula en los valores eliminados)

Composición de funciones

Dadas las funciones reales de una variable real f y g , no sólo se pueden considerar las funciones suma ($f + g$), diferencias ($f - g$ y $g - f$), producto ($f \cdot g$) y cocientes (f/g y g/f). También pueden considerarse **otras dos operaciones** con las funciones dadas:

- Una es “**la compuesta de f con g** ”, representada por $g \circ f$ (este es el orden en su escritura, pero se lee “ f compuesta con g ”), y definida como $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, para

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

todo x de su “dominio”, a determinar (ya vemos por qué se escribe $g \circ f$ y no $f \circ g$). O sea, que se le aplica la función g a la imagen $f(x)$: f actúa primero y luego actúa g .

- b) Otra es “**la compuesta de g con f** ”, representada por $f \circ g$ (este es el orden en su escritura, pero se lee “ g compuesta con f ”), y definida como $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, para todo x de su “dominio”, a determinar. O sea, se le aplica la función f a la imagen $g(x)$: g actúa primero y luego actúa f .

En ambos casos se habla de la operación “composición” de las dos funciones. Así como había dos diferencias y dos cocientes, **en general hay dos “compuestas” según el orden en que se opere** (las cuales normalmente serán distintas).

Ejemplo: Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$, tenemos $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \cos(x^2)$. Y también tenemos $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\cos x) = (\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Obsérvese que en este caso (y en muchos más) resultan diferentes $g \circ f$ y $f \circ g$. Así, por ejemplo, para $x = \pi/2$ es

$$(g \circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -0.7812\dots \text{ y } (f \circ g)(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0^2 = 0$$

O sea, para un mismo x dan resultados diferentes, luego son funciones diferentes.

¿Cuál será el “dominio” de “la compuesta $g \circ f$ ”? Pues será el conjunto de todos los elementos x del “dominio” de f para los cuales su imagen $f(x)$ esté en el “dominio” de g . En efecto, necesitamos que x esté en $Dom(f)$ para que pueda existir la imagen $f(x)$; pero también necesitamos que esta imagen esté situada en $Dom(g)$ para que podamos aplicarle la función g a la misma y exista finalmente $g[f(x)]$.

De un modo análogo, el “dominio” de “la compuesta $f \circ g$ ” estará formado por todos los elementos x del “dominio” de g para los cuales su imagen $g(x)$ esté en el “dominio” de f .

El “dominio” de alguna “compuesta” puede resultar vacío, en cuyo caso dicha “compuesta” no existirá.

Ejemplo: Sea la función $y = \ln(-2 + \sen x)$ donde podemos llamar $g(x) = \ln x$, así como $f(x) = -2 + \sen x$, con lo cual la función dada será “la compuesta de f con g ”: En efecto,

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(-2 + \sen x) = \ln(-2 + \sen x)$$

Entonces su “dominio” estará formado por todos los elementos x del “dominio” de f (todos los reales) para los cuales $f(x)$ esté en el “dominio” de g (los reales positivos). O sea, tendría que cumplirse la inequación $-2 + \sen x > 0$, equivalente a $\sen x > 2$, lo cual es imposible porque el “recorrido” de la función seno es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el conjunto solución de la inequación anterior es $\emptyset$ (vacío) y entonces esa función dada no existe.

Ejemplo de cálculo de “dominios” de dos funciones compuestas:

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \arcsen x$, las dos compuestas son:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = \arcsen \sqrt{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\arcsen x) = \sqrt{\arcsen x}$$

Veamos “el dominio” de la primera:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\} = \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in [-1, 1]\}$$

Si consultamos la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (que está en la Sección 2.2), veremos que los únicos x que cumplen la condición $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$ son los del intervalo $[0, 1]$. En conclusión: “El dominio” de $g \circ f$ es dicho intervalo $[0, 1]$.

Dicho en forma más sencilla e intuitiva: Como queremos que exista $(g \circ f)(x) = \arcsen \sqrt{x}$, podemos decir: “la función externa ($\arcsen x$) le exigirá a la función interna ($\sqrt{x}$) que esté en su dominio”. Por tanto, tendrá que ser $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$, cuya solución se obtiene mirando qué parte de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (la cual es media parábola horizontal que abre hacia la derecha partiendo del origen y situada toda en el primer cuadrante) queda entre las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 1$, viendo que es el tramo correspondiente a $0 \leq x \leq 1$.

Nota importante: Lo anterior es lo que se llama “resolución gráfica de inecuaciones donde intervienen funciones básicas” (en este caso interviene $y = \sqrt{x}$), para lo cual es fundamental conocer las gráficas de todas ellas, que aparecen en la Sección 2.2 de esta página web).

Calculemos ahora “el dominio” de la otra función compuesta:

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f)\} = \{x \in [-1, 1] : \arcsen x \in [0, +\infty)\}$$

Si consultamos la gráfica de $y = \arcsen x$ (también en la Sección 2.2), veremos que los únicos x que cumplen la inecuación $\arcsen x \geq 0$ son los del intervalo $[0, 1]$. Conclusión: “El dominio” de $f \circ g$ es dicho intervalo $[0, 1]$.

Dicho en forma más sencilla e intuitiva: Como queremos que exista $(f \circ g)(x) = \sqrt{\arcsen x}$, podemos decir “la función externa ($\sqrt{x}$) le exigirá a la función interna ($\arcsen x$) que esté en su dominio”. Por tanto, tendrá que ser $\arcsen x \geq 0$, cuya solución se obtiene mirando qué parte de la gráfica de $y = \arcsen x$ queda por encima del eje OX o sobre dicho eje, viendo que es el tramo correspondiente a $0 \leq x \leq 1$.

Nota: Aunque “los dominios” de las dos compuestas del ejemplo anterior sean iguales, **dichas funciones no son la misma**. En efecto, las expresiones finales de ambas son diferentes; luego para un mismo x darán en general imágenes diferentes. Por ejemplo, para $x = 1/2$, la compuesta $g \circ f$ nos da la imagen $\pi/4$ y la otra compuesta nos da imagen $\sqrt{\pi/6}$:

$$\arcsen(\sqrt{1/2}) = \arcsen(\sqrt{2}/2) = \pi/4 \quad ; \quad \sqrt{\arcsen(1/2)} = \sqrt{\pi/6}$$

Además hay muchos ejemplos, como los dos que siguen, donde resultan diferentes “los dominios” de las compuestas obtenidas cambiando el orden de las dos funciones:

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Dadas $f(x) = e^x$ y $g(x) = \arccos x$, las dos compuestas son:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(e^x) = \arccos(e^x)$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\arccos x) = e^{\arccos x}$$

Veamos “sus dominios”:

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in \text{Dom}(g)\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x \in [-1, 1]\}$$

Si esbozamos la gráfica de $y = e^x$ (ver Sección 2.2), veremos que los únicos x que cumplen la condición $-1 \leq e^x \leq 1$ son los del intervalo $(-\infty, 0]$. Conclusión: “El dominio” de $g \circ f$ es dicho intervalo $(-\infty, 0]$.

En forma más sencilla e intuitiva: Como queremos que exista $(g \circ f)(x) = \arccos(e^x)$, la función externa ($\arccos x$) le exigirá a la función interna (e^x) que esté en su dominio. Por tanto, tendrá que ser $-1 \leq e^x \leq 1$, cuya solución gráfica se obtiene mirando qué parte de la gráfica de $y = e^x$ queda entre las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 1$, lo cual ocurre en el tramo que queda a la izquierda del eje OY, incluyendo el corte con dicho eje; o sea, cuando sea $x \leq 0$.

El otro “dominio” es:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) \in \text{Dom}(f)\} = \{x \in [-1, 1] : \arccos x \in \mathbb{R}\}$$

Ahora la condición que tiene que cumplirse es que $\arccos x$ sea un número real, lo cual es siempre cierto si se toma x en el intervalo $[-1, 1]$. Conclusión: “El dominio” de $f \circ g$ es $[-1, 1]$.

En forma más sencilla e intuitiva: Como queremos que exista $(f \circ g)(x) = e^{\arccos x}$, la función externa (e^x) le exigirá a la función interna ($\arccos x$) que esté en su dominio. Por tanto, tendrá que ser $\arccos x$ un número real cualquiera (pues el dominio de e^x es $\mathbb{R}$), lo cual se cumple si x está en el dominio del arco coseno, que es $[-1, 1]$.

Ejemplo en que existe una de las “compuestas” y no existe la otra: Si tomamos $f(x) = -x^2$ y $g(x) = \ln x$, la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \ln[f(x)] = \ln(-x^2)$ **no existe** pues su dominio es $\emptyset$ ($-x^2$ es siempre negativo o cero y entonces su logaritmo no existe en $\mathbb{R}$). En cambio, la función $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = -[g(x)]^2 = -(\ln x)^2$ **sí existe** pues su dominio es el de la función $\ln x$, que es $(0, +\infty)$ (el cuadrado de cualquier número real siempre existe en $\mathbb{R}$).

Propiedades de la “composición” de “funciones reales de una variable real”:

- 1) Si f, g y h son funciones de modo que “el recorrido” de f esté contenido en “el dominio” de g (escrito $\text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$) y “el recorrido” de g esté contenido en “el dominio” de h (escrito $\text{Rec}(g) \subseteq \text{Dom}(h)$), se tiene $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. O sea, “la compuesta previamente hallada de f con g ” compuesta a su vez con h (primer miembro de la igualdad) **coincide** con la compuesta de f con “la compuesta previamente hallada de g con h ” (segundo miembro de la igualdad).

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

- 2) La función “identidad” de un conjunto A (la cual convierte todo elemento de A en sí mismo), que podemos llamar i_A , cumple $i_A \circ f = f \circ i_A = f$, para toda función f de “dominio” A y “recorrido” A (i_A se llama “elemento neutro” de la “composición” de funciones de “dominio” A y “recorrido” A).
- 3) Si la función f es “inyectiva” de “dominio” A y “recorrido” B , con lo cual existe f^{-1} de “dominio” B y “recorrido” A , se tiene $f^{-1} \circ f = i_A$ y también se tiene $f \circ f^{-1} = i_B$.
- 4) Si dos funciones f y g son “inyectivas” y “el recorrido” de f coincide con “el dominio” de g , no solamente existe “la compuesta de f con g ”, sino que esta función compuesta también es “inyectiva” y “su inversa” es la compuesta en orden invertido de las dos “inversas” de f y de g . O sea, se tiene que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Nota importante: Estas propiedades nos permiten despejar la función $g(y)$ en una ecuación que sea del tipo $f[g(y)] = h(x)$, con f “inyectiva” de “dominio” A y “recorrido” B , aplicando f^{-1} a ambos miembros de dicha ecuación para obtener la expresión $g(y) = f^{-1}[h(x)]$. (Esto suele llamarse “eliminación de la función f en la ecuación dada” y se usa mucho en el “cálculo de inversas de funciones elementales” que veremos a partir de la pág. 22). En efecto, el primer miembro de la ecuación dada pasará a ser

$$f^{-1}\{f[g(y)]\} = (f^{-1} \circ f)[g(y)] = i_A[g(y)] = g(y)$$

(Se supone que “el recorrido” de la función g está contenido en “el dominio” A de la función f , para poder hablar de la compuesta $f[g(y)]$ y además “el recorrido” de la función h estará contenido en “el dominio” B de f^{-1} , para que pueda existir la compuesta $f^{-1}[h(x)]$).

Funciones elementales

Se llaman “**funciones elementales**” a todas las “funciones reales de una variable real” que cumplan las siguientes condiciones:

- 1) Que estén definidas “en forma explícita” (con la variable dependiente despejada)
- 2) Que les baste para su definición una única ecuación de la forma $y = E(x)$, donde el segundo miembro represente alguna expresión con la única variable x , la cual puede ser una constante (quedan excluidas entonces las funciones que requieran más de una ecuación para ser definidas, las cuales se llaman “funciones definidas a trozos” las cuales veremos más adelante).
- 3) Que la expresión $y = E(x)$ mencionada deba corresponder a una función básica o bien ser el resultado de operar con un número finito de funciones básicas (las operaciones pueden ser una combinación de todas o de algunas de las que vimos anteriormente: sumar, restar, multiplicar, dividir y componer).

En particular, todas las funciones “básicas” son “elementales” (son las “elementales” más sencillas).

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Pero por “**elemental**” no debe entenderse “**sencilla**”, porque las hay muy complicadas (todo depende de cuántas y cuáles funciones básicas se hayan combinado mediante operaciones y de cuáles sean dichas operaciones).

Ejemplo: Una “función elemental” es la que viene dada por $y = \frac{\ln(x^2+1)+\sqrt[3]{x-3}}{\arcsen x}$, que no es “sencilla”. En efecto, está definida en forma **explícita** por esa **única** expresión $y = E(x)$ dada y además dicha expresión es el resultado de **sumar** la “función compuesta” $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ con la “función compuesta” $h(x) = \sqrt[3]{x-3}$ y luego **dividir** dicha suma por la función básica $m(x) = \arcsen x$. Y a su vez, $g(x)$ proviene de **componer** la **suma** de dos funciones básicas con la función básica $\ln x$ y $h(x)$ proviene de **componer** la **diferencia** de dos funciones básicas con la función básica $\sqrt[3]{x}$. **Todo son operaciones con “funciones básicas”.**

“El dominio” de cualquier “función elemental” se obtiene entonces aplicando las reglas que dimos para “los dominios” de sumas, diferencias, productos, cocientes y compuestas (ver las págs. 12, y 14). Pero para ello hay que conocer perfectamente los “dominios” y “recorridos” de todas las “funciones básicas” (pág. 9).

Ejemplo: “El dominio” de la función elemental $y = f(x)$ del ejemplo anterior se obtiene hallando inicialmente la intersección de “los dominios” de las tres funciones $g(x)$, $h(x)$ y $m(x)$. “El dominio” de $g(x)$ es todo $\mathbb{R}$ (porque $x^2 + 1$ es siempre mayor que cero, que es lo que nos exige la función externa $\ln x$); “el dominio” de $h(x)$ también es $\mathbb{R}$ (pues se trata de una raíz de índice impar de un polinomio, la cual existe siempre), y “el dominio” de $m(x)$ es $[-1, 1]$, luego dicha intersección de “los tres dominios” resulta ser el intervalo $[-1, 1]$. Pero, además, habrá que quitar de este intervalo el valor $x = 0$, por ser el único que hace cero la función del denominador. Así, “el dominio” de $f(x)$ resulta ser $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Otro ejemplo más complicado: Hallar “el dominio” de la función $y = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+x-6}} - \arccos\left(\frac{x}{5-x}\right)$.

Llamamos $y = f(x)$ a la función dada, llamando $g(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+x-6}}$ y $h(x) = \arccos\left(\frac{x}{5-x}\right)$, con lo cual $f(x) = g(x) - h(x)$. Entonces $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$.

Halleemos $\text{Dom}(g)$: La función g es una “compuesta”, luego la función externa ($\sqrt{x}$) le exigirá a la función interna $\left(\frac{x^3-1}{x^2+x-6}\right)$ que esté en “su dominio”. Por tanto, tendrá que ser $\frac{x^3-1}{x^2+x-6} \geq 0$. Resolviendo esta “inecuación racional” (ver Sección 1.3) resulta como “conjunto solución” de la misma $(-3, 1] \cup (2, +\infty)$. Luego, este es “el dominio” de g .

Halleemos $\text{Dom}(h)$: Al ser h otra “compuesta”, tenemos que la función externa ($\arccos x$) le exigirá a la función interna $\left(\frac{x}{5-x}\right)$ que esté en “su dominio”. Tendrá que ser $-1 \leq \frac{x}{5-x} \leq 1$. Pero aquí tenemos **un sistema de dos “inecuaciones racionales” simultáneas**: La primera inecuación $-1 \leq \frac{x}{5-x}$ tiene “conjunto solución” $(-\infty, 5)$. Y la segunda $\frac{x}{5-x} \leq 1$ tiene “conjunto solución” $(-\infty, 5/2] \cup (5, +\infty)$. Con lo cual, el conjunto solución del sistema de las dos inecuaciones será la intersección de los dos conjuntos anteriores (se obtienen así los x que cumplen las dos

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

inecuaciones a la vez, que son los que buscamos). Resulta dicha intersección $(-\infty, 5/2]$, luego este intervalo es “el dominio” de la función h .

Finalmente, “el dominio” de f será (como habíamos dicho) la intersección de los dominios de g y de h , resultando $(-3, 1] \cup (2, 5/2]$.

(Para ver cualquier intersección conviene representar gráficamente los dos conjuntos en la recta real con rayados diferentes o colores diferentes y ver dónde se superponen).

LO MENOS QUE SE PUEDE SABER DE “UNA FUNCIÓN ELEMENTAL” ES “SU DOMINIO”, ASÍ QUE NORMALMENTE SE EXIGE DESTREZA EN SU DETERMINACIÓN.

Nota: Ver la Sección 2.3 (“Clasificación de las funciones elementales”), donde dichas funciones reciben nombres especiales, según las funciones básicas que intervengan y las operaciones que las combinen.

Las funciones hiperbólicas

Unas “funciones elementales” muy importantes son el “seno hiperbólico”, el “coseno hiperbólico”, la “tangente hiperbólica” y sus “tres inversas”.

Son las siguientes:

$$y = sh\,x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{función “seno hiperbólico”})$$

$$y = ch\,x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{función “coseno hiperbólico”})$$

$$y = th\,x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{función “tangente hiperbólica”})$$

Todas tienen “dominio” $\mathbb{R}$; el “recorrido” de $y = sh\,x$ es $\mathbb{R}$, el “recorrido” de $y = ch\,x$ es el intervalo $[1, +\infty)$ y el “recorrido” de $y = th\,x$ es el intervalo $(-1, 1)$.

Las funciones $y = sh\,x$ e $y = th\,x$ son “impares”, cumpliéndose $sh(0) = 0$ y $th(0) = 0$ (sus gráficas, simétricas respecto al origen y pasando por ese punto, quedan en el primer cuadrante y en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas; además la gráfica de $y = th\,x$ queda entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$, que son sus “asíntotas horizontales”). Y la función $y = ch\,x$ es “par”, cumpliéndose $ch(0) = 1$ (su gráfica, simétrica respecto al eje OY, queda en los cuadrantes primero y segundo, pues la función solamente da valores positivos; se llama “catenaria” y se parece a una parábola vertical de vértice $(0, 1)$ muy abierta hacia arriba). (La forma de una cadena colgando de dos postes es muy parecida a un arco de dicha curva, que por eso se llama “catenaria”).

Las identidades principales que cumplen las “funciones hiperbólicas” son $ch^2x - sh^2x \equiv 1$ y $th\,x \equiv \frac{sh\,x}{ch\,x}$, fácilmente demostrables al sustituir las expresiones de $ch\,x$, $sh\,x$ y $th\,x$.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Adelantándonos a lo establecido en la Sección 3.1, pero usando conocimientos de la Enseñanza Media, tenemos que la “función derivada” de $y = sh\,x$ es $y' = ch\,x$ y la “función derivada” de $y = ch\,x$ es $y' = sh\,x$ (comprobables fácilmente a partir de sus expresiones iniciales). Por tanto, la derivada de $y = th\,x$ es $y' = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$ (basta derivar el cociente shx/chx y aplicar la identidad $ch^2x - sh^2x = 1$).

Se demuestra que “la inversa” de $y = sh\,x$ es la función $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, de “dominio” $\mathbb{R}$ y “recorrido” $\mathbb{R}$, siendo su derivada $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ en todo $\mathbb{R}$ (es muy importante para el cálculo de ciertas integrales). Esta inversa se escribe $y = arg\,sh\,x$ y se llama “argumento seno hiperbólico”.

También se demuestra que “la inversa” de $y = ch\,x$, restringida al intervalo $[0, +\infty)$ con lo cual es “inyectiva” y su “recorrido” sigue siendo $[1, +\infty)$, es la función $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, de “dominio” $[1, +\infty)$ y “recorrido” $[0, +\infty)$, siendo su derivada $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ en $(1, +\infty)$ (también es muy importante para el cálculo de ciertas integrales). Esta inversa, de un modo análogo, se escribe $y = arg\,ch\,x$ y se llama “argumento coseno hiperbólico”.

Nota: La función $y = ch\,x$ de dominio $\mathbb{R}$ no es “inyectiva” por ser “par”, por lo cual hay que tomar “su restricción” al intervalo $[0, +\infty)$ o “su restricción” al intervalo $(-\infty, 0]$ para tener una “inversa”. Normalmente se toma la primera restricción, de dominio los números no negativos y su “inversa” es la mencionada.

Se demuestra también que “la inversa” de $y = th\,x$ es la función $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, de “dominio” el intervalo $(-1, 1)$ y “recorrido” $\mathbb{R}$, siendo su función derivada $y' = \frac{1}{1-x^2}$ (que también se usa en cálculo integral). Esta inversa se escribe $y = arg\,th\,x$ y se llama “argumento tangente hiperbólica”.

Otros tipos importantes de funciones reales de una variable real

Aparte de “las funciones elementales”, tenemos “las funciones definidas a trozos” y “las funciones implícitas”.

- 1) Las “**funciones definidas a trozos**” son funciones definidas en forma explícita, pero **requieren más de una ecuación** del tipo $y = E(x)$ (a veces se usa una ecuación del tipo anterior y un valor dado aparte o varios valores dados aparte, y otras veces se usan dos o más ecuaciones del tipo anterior, con valores dados aparte o no). Frecuentemente estas funciones se apoyan en varias “funciones elementales”, las cuales actuarán normalmente “restringidas” a ciertos intervalos, que deben quedar indicados en la definición de la “función definida a trozos”.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Ejemplo: Una función “definida a trozos” es
$$y = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ 3, & \text{si } 2 < x < 4 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Su dominio es $(-\infty, 0] \cup (2, 4) \cup [10, +\infty)$. Y las “funciones elementales” en que se apoya su definición son: La función exponencial $y = e^x$ restringida al intervalo $(-\infty, 0]$; la función constante $y = 3$ restringida al intervalo $(2, 4)$, y la función logarítmica $y = \ln x$ restringida al intervalo $[10, +\infty)$.

Pero hay casos (que no trataremos) en que la definición de la “función a trozos” es más complicada (no basada únicamente en la consideración de ciertos intervalos).

Por ejemplo, una “función definida a trozos” de dominio $\mathbb{R}$ con definición no basada en intervalos es: $f(x) = 1$ si x es número racional y $f(x) = 0$ si x es número irracional (recordemos que en cualquier intervalo hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales intercalados, luego esta definición no tiene relación con intervalos).

-
- 2) Y las “**funciones implícitas**” (reales de una variable real) son aquellas que sola-mente puedan definirse mediante ecuaciones del tipo $E(x, y) = 0$, que **no tengan la variable dependiente despejada** (ni que pueda despejarse).

Si una función viene dada por una sola ecuación en que la variable dependiente no esté despejada, pero la misma se pueda despejar, debe considerarse como una “función elemental” y no como una “función implícita” (se diría que “la han dado en forma implícita” pero **no es** una “función implícita”). Ver el Ejemplo 3 más adelante.

Ejemplo 1: Una “función implícita” es la que queda definida por la ecuación

$$\boxed{xy^5 - 3x + 8y = 10}$$

cuando hayamos dado un punto que la cumpla (si además se dan determinadas condiciones adicionales que se verán en la Sección 6.6 y que aquí omitiremos). Pedimos que como mínimo haya un punto de coordenadas reales que cumpla la ecuación dada, pues de lo contrario podría no existir la “función real de una variable real” que pretendemos definir con esa ecuación, como ocurre con la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ que no es satisfecha por ningún punto del plano, puesto que siendo x e y reales no podrá cumplirse que $x^2 + y^2 = -1$ (nótese que si despejásemos la variable y se obtendrían dos funciones que **son complejas imaginarias**, las cuales son: $y = \sqrt{-1 - x^2} = \sqrt{1 + x^2} \cdot i$ e $y = -\sqrt{-1 - x^2} = -\sqrt{1 + x^2} \cdot i$).

Obsérvese ahora que en la ecuación dada al principio **no puede despejarse la variable dependiente y** (porque es una ecuación de 5º grado en dicha variable que incluye dos potencias distintas de la misma, y se sabe que no hay manera de obtenerla como sí ocurre con una ecuación de segundo grado). Sin embargo, vemos que el punto de coordenadas $(-1, 1)$ cumple la ecuación dada, lo cual significa que si llamamos f a la “función implícita” que suponemos asociada a ese punto, será $f(-1) = 1$. (Estamos suponiendo que esa función existe porque se están cumpliendo además las condiciones que se verán en la Sección 6.6). Es decir, que la gráfica de esa “función implícita”

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

definida por la ecuación dada inicialmente, incluye a ese punto $(-1, 1)$ y a muchos otros, todos los cuales cumplirán esa ecuación.

Nota: En este mismo ejemplo podríamos dar otro punto que cumpla la ecuación dada, pudiendo ser **otra** la “función implícita” asociada a ese nuevo punto. (Por ejemplo, el punto $(-10/3, 0)$ también la cumple, así como el punto $(-6/29, 2)$ y muchos más).

En efecto, todos los puntos que cumplan la ecuación dada suelen formar “una cierta curva en el plano”, la cual puede ser cortada por rectas verticales en varios puntos; por tanto, en ese caso, esa curva no será la gráfica de una sola “función implícita”, sino mezcla de las gráficas de varias “funciones implícitas”. Pero, para que esto ocurra es esencial que la ecuación dada se cumpla para muchos puntos del plano (así, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ se cumple únicamente para el punto $(0, 0)$ y por ese motivo no define ninguna “función real de una variable real” que no sea la trivial que da valor cero para el único punto $x = 0$ de su “dominio”).

Ejemplo 2: La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ la cumplen todos los puntos de una circunferencia de centro el origen y radio 1, la cual no es gráfica de una sola función, sino que es la mezcla de las gráficas de las funciones: $y = +\sqrt{1 - x^2}$ (cuya gráfica es la mitad superior de dicha circunferencia) e $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (cuya gráfica es la mitad inferior de la misma circunferencia). En este caso, la variable dependiente ha podido despejarse, obteniendo dos funciones que son “elementales” y no deben llamarse “implícitas” (pero ambas están incluidas en la expresión $x^2 + y^2 = 1$). Si damos, por ejemplo, el punto $(0, 1)$ de la circunferencia, la función que le corresponde es la primera dada anteriormente (porque el punto tiene ordenada positiva). Y si damos, el punto $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ de la circunferencia, la función que le corresponde es la segunda dada (porque el punto tiene ordenada negativa). Pero si diésemos otro punto con ordenada negativa que cumpla la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la función que le correspondería será también esta última; luego puntos distintos dados pueden corresponder a funciones distintas o a la misma función.

Ejemplo 3: La función definida por la ecuación $xy^3 - 3x = 7$ parece “implícita” pero no lo es, pues podemos despejar la variable dependiente, obteniéndose: $y = \sqrt[3]{\frac{3x+7}{x}}$ (se trataría entonces “una función elemental”, cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, pero que estaba “definida implícitamente” por la ecuación dada al comienzo).

Cálculo de inversas de funciones elementales

Suponiendo que una “función elemental” $y = f(x)$ sea “inyectiva”, ¿cómo se obtiene la expresión explícita de “su inversa”, suponiendo que la misma sea también una “función elemental”?

Se hace en dos etapas:

1) Habrà que sustituir, en la expresión dada, la variable “dependiente” por la “independiente”, y viceversa. En efecto, en la “función inversa” se corresponden los mismos valores reales, pero al revés: Los que eran de partida (valores antiguos de x) ahora serán de llegada (valores de la nueva

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

y) y los que eran de llegada (valores antiguos de y) ahora serán de partida (valores de la nueva x). Así tendremos una expresión de la “función inversa”, que tendrá la forma $x = f(y)$. Sin embargo, esta expresión no tiene la “variable dependiente” despejada, aunque suponemos que puede despejarse (porque suponíamos desde el principio que la “función inversa” es también “elemental”).

2) Para obtener la “expresión explícita” de la “función inversa”, habrá entonces que despejar la “variable dependiente” en la ecuación $x = f(y)$ que habíamos obtenido en el paso anterior (de una forma directa, como se ve en el Ejemplo 1 que sigue, o bien aplicando varias veces la nota de la pág. 17 (“eliminación” de una cierta “función inyectiva” en una ecuación, por aplicación de su “función inversa” a ambos miembros de la misma), llegando finalmente a $y = f^{-1}(x)$). (Ver esto en el Ejemplo 2).

Ejemplo 1: Calcular “expresión explícita” de “la inversa” de la función f definida por $y = \frac{x-2}{x+8}$, de “dominio” $\mathbb{R} - \{-8\}$.

Empezamos cambiando las variables, con lo cual queda: $x = \frac{y-2}{y+8}$ (expresión “no explícita” de “la inversa”). Y ahora despejamos y en la ecuación anterior:

$$(y + 8) \cdot x = y - 2 ; \quad yx + 8x = y - 2 ; \quad yx - y = -8x - 2 ; \quad y \cdot (x - 1) = -(8x + 2)$$

de donde tenemos finalmente: $y = -\frac{8x+2}{x-1}$. Por tanto, será $f^{-1}(x) = -\frac{8x+2}{x-1} = \frac{8x+2}{1-x}$, cuyo “dominio” es $\mathbb{R} - \{1\}$ (que será entonces el “recorrido” de la función dada). Y como la función dada tenía “dominio” $\mathbb{R} - \{-8\}$, ese será el “recorrido” de esta inversa obtenida.

Tenemos, por ejemplo, que $f(2) = 0$ y también es $f^{-1}(0) = 2$, como debe ser. Y si quisiésemos que fuese $f(x) = 1$, resultaría la ecuación absurda $x - 2 = x + 8$, o sea $-2 = 8$, lo cual nos confirma que el número 1 no pertenece al “recorrido” de f .

También es $f(5) = 3/13$ y también es $f^{-1}(3/13) = 5$, como debe ser. Y si quisiésemos que fuese $f^{-1}(x) = -8$, resultaría la ecuación absurda $8x + 2 = -8 \cdot (1 - x)$, o sea $2 = -8$, lo cual nos confirma que el número -8 no pertenece al “recorrido” de f^{-1} .

Ejemplo 2: Calcular “expresión explícita” de “la inversa” de la función $y = \sqrt[3]{\arccos(2^x)} + 4$

Empezamos cambiando las variables, con lo cual queda: $x = \sqrt[3]{\arccos(2^y)} + 4$ (“expresión no explícita” de “la inversa”).

Y ahora despejamos la variable y de la ecuación anterior, en varios pasos:

Primer paso: Escribimos la ecuación equivalente $x - 4 = \sqrt[3]{\arccos(2^y)}$ y ahora, “eliminamos” la función raíz cúbica (que es “inyectiva”), aplicando a ambos miembros “su inversa”, que es la potencia de exponente 3, obteniendo la nueva ecuación $(x - 4)^3 = \arccos(2^y)$.

(En efecto, recuérdese la nota de la pág. 17 donde se explicaba que para “eliminar f ” en una ecuación de la forma $f[g(y)] = h(x)$, con f “inyectiva”, se debe aplicar f^{-1} a ambos miembros

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

de la ecuación, obteniendo $g(y) = f^{-1}[h(x)]$). Aquí, en la ecuación $\sqrt[3]{\arccos(2^y)} = x - 4$, f es la función raíz cúbica, $g(y) = \arccos(2^y)$ y $h(x) = x - 4$.

Segundo paso: Del mismo modo, para “eliminar” de la ecuación anterior la función arco coseno (que es “inyectiva”), aplicamos a ambos miembros su inversa, que es $\cos x$ restringida al intervalo $[0, \pi]$, quedando la nueva ecuación $\cos[(x - 4)^3] = 2^y$.

Tercer paso: Por último, para “eliminar” de la ecuación anterior la función exponencial de base 2 (que es “inyectiva”), aplicamos a ambos miembros su inversa, que es el logaritmo base 2, quedando finalmente $\log_2\{\cos[(x - 4)^3]\} = y$.

Por tanto, tenemos $f^{-1}(x) = \log_2\{\cos[(x - 4)^3]\}$, donde la función coseno tiene como dominio el intervalo $[0, \pi]$ y no todo $\mathbb{R}$.

Un caso particular de imágenes: Tenemos que $f(-1) = \sqrt[3]{\arccos(1/2)} + 4 = \sqrt[3]{\pi/3} + 4$ y también tenemos $f^{-1}(\sqrt[3]{\pi/3} + 4) = \log_2[\cos(\pi/3)] = \log_2(1/2) = -1$, lo cual indica que la “función inversa” puede estar bien calculada.

Ejemplo 3: Calculemos la función “inversa” del “seno hiperbólico” (la cual ya fue mencionada en la pág. 20).

La función elemental de partida es ahora $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, con lo cual cambiando las variables entre sí nos queda $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Tenemos que despejar la variable dependiente y para lo cual escribimos $e^y - e^{-y} = 2x$, multiplicando ambos miembros por e^y obteniendo $e^{2y} - 1 = 2xe^y$, que es la ecuación de segundo grado en e^y : $(e^y)^2 - 2x \cdot e^y - 1 = 0$. Por tanto, despejamos e^y obteniendo $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$, pero al ser la exponencial e^y siempre positiva, solamente vale la solución $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Con lo cual se tiene finalmente $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, que es la expresión de “la inversa” del “seno hiperbólico” dada en la pág. 20.

(De un modo similar se demuestran las expresiones dadas en la pág. 20 para las “inversas” del “coseno hiperbólico” restringido al intervalo $[0, +\infty)$ y de la “tangente hiperbólica”).

Valor absoluto de una función

El “valor absoluto” de una función $y = f(x)$ es la nueva función $y = |f(x)|$ resultante de “componer” la función $f(x)$ dada con la función básica $|x|$.

Así, el “dominio” de $|f(x)|$ será el mismo “dominio” de $f(x)$, porque el “dominio” de $|x|$ es todo $\mathbb{R}$ (con lo cual el “recorrido” de $f(x)$ siempre estará contenido en dicho “dominio”). Y para cualquier elemento $x = a$ de ese “dominio”, la imagen dada por $|f(x)|$ se obtendrá hallando primero la imagen que da f y luego hallando el valor absoluto de dicha imagen.

Por tanto, todas las imágenes del valor absoluto de una función son números positivos o cero.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Ejemplos:

1) La función $y = |x^3|$ tiene “dominio” todo $\mathbb{R}$ (como el “dominio” de $y = x^3$). Y la función $y = x^3$ da valores positivos, negativos y cero, pero $y = |x^3|$ dará solamente valores positivos y cero. Por ejemplo, la imagen de $x = 2$ es $|2^3| = |8| = 8$; la imagen de $x = -2$ es $|(-2)^3| = |-8| = 8$, y la imagen de $x = 0$ es $|0^3| = |0| = 0$.

2) La función $y = |\ln x|$ tiene “dominio” $(0, +\infty)$, igual que el “dominio” de $y = \ln x$. Pero esta última también da valores positivos, negativos y cero, mientras que $y = |\ln x|$ dará sólo valores positivos y cero. Así, su imagen para $x = e^3$ es $|\ln(e^3)| = |3| = 3$; su imagen para $x = 1/e$ es $|\ln(e^{-1})| = |-1| = 1$, y su imagen para $x = 1$ es $|\ln 1| = |0| = 0$.

Nótese que las funciones $y = |x^2|$, $y = |3^x|$ e $y = |\arccos x|$ son idénticas a las mismas sin valor absoluto, ya que dan solamente valores positivos o cero (por tanto, el valor absoluto no les afecta).

Propiedades importantes del “valor absoluto de una función”:

1) El “recorrido” de $y = |f(x)|$ incluye los mismos valores positivos del “recorrido” la función $y = f(x)$, si tiene alguno; incluye el valor cero si el “recorrido” de $y = f(x)$ también lo incluye, e incluye los opuestos de los valores negativos del “recorrido” de $y = f(x)$, si tiene alguno. Así, el “recorrido” de $y = |f(x)|$ solamente incluye valores positivos y posiblemente el valor cero.

O sea, si un punto $P(a, b)$ está en la gráfica de $y = f(x)$ y es $b \geq 0$, dicho punto también estará en la gráfica de $y = |f(x)|$. Pero si un punto $P(a, b)$ está en la gráfica de $y = f(x)$ y es b negativo, el punto P no estará en la gráfica de $y = |f(x)|$, estando en su lugar en dicha gráfica el punto simétrico de P respecto al eje OX , que es el punto $P'(a, -b)$.

Dicho de otro modo: Cuando se aplica la función valor absoluto a una función cualquiera $f(x)$, los puntos de la gráfica de $f(x)$ que estuviesen por encima del eje OX o que estuviesen sobre dicho eje, quedan intactos, y los puntos de la gráfica de $f(x)$ que estuviesen por debajo del eje OX , pasan a estar por encima de dicho eje, quedando en posición simétrica (a igual distancia del eje).

2) Si una función $f(x)$ tiene valores positivos y también tiene valores negativos, la función valor absoluto correspondiente, $y = |f(x)|$, puede expresarse como una “función a trozos” sin usar el valor absoluto, de la siguiente manera:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Nota 1: En cada caso particular, habrá que resolver la inecuación $f(x) \geq 0$ para saber cuáles son los x cuyas imágenes vendrían dadas por $f(x)$. Y para los restantes valores x del “dominio” de la función f habrá que usar la expresión $-f(x)$.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Nota 2: Si la función $f(x)$ dada es una “función elemental”, la función $|f(x)|$ también será “elemental” (pues si la expresión única en forma explícita de $y = f(x)$ era una función básica o era el resultado de varias operaciones con funciones básicas, la función $y = |f(x)|$ tendrá una expresión totalmente similar pero con una operación más (la “composición” final de $f(x)$ con la función $|x|$). Pero si $f(x)$ cambia de signos, también puede expresarse $|f(x)|$ como “una función a trozos” (lo cual nos indica que entre “funciones elementales” y “funciones definidas a trozos” no existe una separación total).

Ejemplo: Puesto que la función $y = \ln x$ (que es “básica” y por tanto “elemental”) toma valores positivos y también toma valores negativos, podremos expresar la “función elemental” $y = |\ln x|$ como “función a trozos” así:

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \text{si } \ln x \geq 0 \\ -\ln x, & \text{si } \ln x < 0 \end{cases}$$

y como la inequación $\ln x \geq 0$ se cumple cuando x está en el intervalo $[1, +\infty)$, siendo el “dominio” de $\ln x$ el intervalo $(0, +\infty)$, la inequación $\ln x < 0$ se cumplirá cuando x esté en el intervalo $(0, 1)$. Por tanto, tenemos finalmente:

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln x, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Otro ejemplo: Escribir a trozos (sin valor absoluto) la función elemental $y = \left| \frac{x^3-1}{x^2+x-6} \right|$.

Ya dijimos en la pág. 18 que “la inequación racional” $\frac{x^3-1}{x^2+x-6} \geq 0$ tiene como “conjunto solución” $(-3, 1] \cup (2, +\infty)$. Por otro lado, el “dominio” de la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x-6}$ es $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$, luego la inequación $\frac{x^3-1}{x^2+x-6} < 0$ se cumplirá en $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$. En conclusión: La definición a trozos será la siguiente:

$$y = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2+x-6}, & \text{si } x \in (-3, 1] \text{ o si } x \in (2, +\infty) \\ \frac{1-x^3}{x^2+x-6}, & \text{si } x \in (-\infty, -3) \text{ o si } x \in (1, 2) \end{cases}$$

que podría escribirse también en cuatro apartados como indicamos a continuación:

$$y = \begin{cases} \frac{1-x^3}{x^2+x-6}, & \text{si } x < -3 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-6}, & \text{si } -3 < x \leq 1 \\ \frac{1-x^3}{x^2+x-6}, & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-6}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Nota: Como $x = 1$ es el único valor de la variable independiente que hace cero la función, es indiferente que este valor aparezca en la segunda línea, como hicimos anteriormente, o que aparezca en la tercera línea poniendo allí el intervalo $[1, 2)$ en vez del intervalo $(1, 2)$, cambiando a su

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

vez el intervalo de la segunda línea por el $(-3, 1)$ o, incluso, dejándolo como estaba (porque las dos expresiones utilizadas dan el valor cero para $x = 1$).

Gráficas de funciones que tienen una relación importante entre sí

Terminamos esta Sección dando informaciones de utilidad práctica, sobre las gráficas de algunas funciones que están “relacionadas de forma importante” con una función $y = f(x)$ que supongamos conocida.

Las funciones que consideramos “relacionadas de forma importante” con $y = f(x)$ son las siguientes:

- 1) $y = f(x - a)$ (traslación horizontal de f)
- 2) $y = f(x) + b$ (traslación vertical de f)
- 3) $y = f(x - a) + b$ (traslación de f según un vector de componentes a horizontal y b vertical)
- 4) $y = -f(x)$ (simétrica de f respecto a OX)
- 5) $y = f(-x)$ (simétrica de f respecto a OY)
- 6) $y = |f(x)|$ (valor absoluto de f)
- 7) $y = f^{-1}(x)$ (inversa de f)

Ya hemos dicho en la propiedad 1 del valor absoluto de una función, en la pág. 25, la relación que hay entre la gráfica de $y = |f(x)|$ y la gráfica de $y = f(x)$.

También hemos dicho en la pág. 7 la relación que hay entre la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ y la gráfica de $y = f(x)$.

Y para las cinco restantes “funciones relacionadas” con $y = f(x)$ podemos decir lo siguiente:

- 1) La gráfica de $y = f(x - a)$ resulta de hacer “una traslación horizontal” de longitud el valor absoluto de a a la gráfica de $y = f(x)$, en sentido positivo (hacia la derecha) si es $a > 0$ y en sentido negativo (hacia la izquierda) si es $a < 0$. En efecto, si la imagen por $y = f(x)$ de un punto $x = m$ (del “dominio” de f) es $y = n$, la imagen por la función $y = f(x - a)$ del punto $x = m + a$ volverá a ser $y = n$. Luego el punto (m, n) de la gráfica de $y = f(x)$ se habrá convertido en el punto de coordenadas $(m + a, n)$ de la gráfica de $y = f(x - a)$, resultado de desplazar hacia la derecha el anterior (si $a > 0$) y resultado de desplazar hacia la izquierda el anterior (si $a < 0$). Por lo tanto, “el dominio” de la función $y = f(x - a)$ será “el dominio” de $y = f(x)$ desplazado hacia la derecha (si $a > 0$) o desplazado hacia la izquierda (si $a < 0$).

Ejemplos: Al ser “el dominio” de $y = \arcsen x$ el intervalo $[-1, 1]$, se tendrá que “el dominio” de $y = \arcsen(x - 5)$ será $[4, 6]$ (desplazamiento hacia la derecha de 5 unidades). De forma que la gráfica de esta última será el resultado de “una traslación horizontal” de 5 unidades hacia la derecha (pues es $a = 5$, positivo) aplicada a la gráfica de $y = \arcsen x$ (que podemos ver en la Sección 2.2). (Se recomienda hacer un dibujo aproximado de ambas gráficas obteniendo algunos puntos intermedios y compararlas).

Pero, en cambio, “el dominio” de $y = \arcsen(x + 5)$ es $[-6, -4]$ (desplazamiento hacia la izquierda de 5 unidades del dominio original $[-1, 1]$, porque $x + 5 = x - (-5)$ y ahora

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

es $a = -5$, negativo). De modo que la gráfica de esta última función será el resultado de “una traslación horizontal” de 5 unidades hacia la izquierda de la gráfica de $y = \arcsen x$.

- 2) La gráfica de $y = f(x) + b$ resulta de hacer “una traslación vertical” de longitud el valor absoluto de b a la gráfica de $y = f(x)$, en sentido positivo (hacia arriba) si es $b > 0$ y en sentido negativo (hacia abajo) si es $b < 0$. En efecto, las ordenadas de los nuevos puntos serán el resultado de sumar el número b a las ordenadas de los puntos anteriores, con lo cual todas las ordenadas aumentarán si $b > 0$ y todas disminuirán si $b < 0$. Los “dominios” de ambas funciones son el mismo.

Ejemplos: Las gráficas de las funciones $y = x^2 + 3$ e $y = x^2 - 2$ son parábolas verticales que resultan de aplicar a la parábola que es gráfica de $y = x^2$ “una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba” (para la primera) y “una traslación vertical de 2 unidades hacia abajo” (para la segunda), de modo que el vértice de la primera parábola es el punto $(0, 3)$ y el vértice de la segunda es $(0, -2)$, teniendo la parábola $y = x^2$ su vértice en el origen (como sabemos bien). Obsérvese que la parábola $y = x^2$ corta al eje OX solamente en el origen, mientras que la parábola $y = x^2 + 3$ ya no corta a ese eje y la parábola $y = x^2 - 2$ lo corta en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$. (Dibujar las tres parábolas para ver esto).

- 3) La gráfica de $y = f(x - a) + b$ resulta de hacer “una traslación de vector (a, b) ” a la gráfica de $y = f(x)$. En efecto, esa “traslación” es el resultado de aplicar un “desplazamiento horizontal” definido por el número a (como explicamos en el apartado 1), junto a un “desplazamiento vertical” definido por el número b (como explicamos en el apartado anterior). “El dominio” de $y = f(x - a) + b$ será “el dominio” de $y = f(x)$ desplazado hacia la derecha (si $a > 0$) o desplazado hacia la izquierda (si $a < 0$).

Ejemplo: La gráfica de $y = (x - 3)^2 - 4$ es la parábola vertical resultante de aplicarle a la gráfica de $y = x^2$ un desplazamiento hacia la derecha de 3 unidades y también un desplazamiento hacia abajo de 4 unidades (con lo cual le hemos aplicado “una traslación de vector $(3, -4)$ ” a la gráfica de $y = x^2$). Entonces el vértice de la nueva gráfica estará en el punto de coordenadas $(3, -4)$ y sus cortes con OX estarán en $(1, 0)$ y en $(5, 0)$. (Comprobarlo haciendo los dibujos de las dos parábolas). En cuanto a “los dominios”, las dos funciones tienen el mismo ($\mathbb{R}$) por ser polinómicas, con lo cual en este caso no se nota el desplazamiento hacia la derecha de 3 unidades del dominio de la primera respecto al dominio de la segunda.

- 4) La gráfica de $y = -f(x)$, que es “la función opuesta” de $y = f(x)$, resulta de aplicar “una simetría respecto al eje OX” a la gráfica de $y = f(x)$. Pues los puntos de la gráfica de $y = -f(x)$ tendrán coordenadas $(a, -b)$, siendo (a, b) los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. (Si $b \neq 0$, dichos puntos estarán en una misma recta vertical ($x = a$), a distinto lado del eje OX, pero a igual distancia, y coincidirán cuando sea $b = 0$). Obviamente, “los dominios” de ambas funciones son el mismo.

Ejemplo: La gráfica de la función $y = 4 - (x - 3)^2$, que como vemos es “la función opuesta” de $y = (x - 3)^2 - 4$ (tratada en el ejemplo anterior), será “simétrica respecto a OX” de la parábola correspondiente a esta última función (que era vertical, abría hacia arriba, con vértice en $(3, -4)$, cortes con OX en los puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$ y corte con OY en el punto

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

$(0, 5)$). Por tanto, la gráfica de la función $y = 4 - (x - 3)^2$ será también parábola vertical, abrirá hacia abajo, con vértice en $(3, 4)$, cortes con OX en los mismos puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$, y corte con OY en el punto $(0, -5)$. (Comprobarlo haciendo los dibujos de las dos parábolas).

- 5) La gráfica de $y = f(-x)$ resulta de aplicar “una simetría respecto al eje OY” a la gráfica de $y = f(x)$. Pues los puntos de la gráfica de $y = f(-x)$ tendrán coordenadas $(-a, b)$, siendo (a, b) los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. (Si es $a \neq 0$, dichos puntos estarán en una misma recta horizontal ($y = b$) a distinto lado del eje OY, pero a igual distancia, y coincidirán cuando sea $a = 0$). Así “el dominio” de $y = f(-x)$ será simétrico respecto al origen de “el dominio” de $y = f(x)$: Por ejemplo, si este es $[a, b]$ siendo a y b positivos, el de la función $y = f(-x)$ será $[-b, -a]$.

Ejemplo 1: “El dominio” de la función $y = \ln(-x)$ será $(-\infty, 0)$ (simétrico respecto al origen de “el dominio” de $y = \ln x$ que es $(0, +\infty)$). De modo que su gráfica será el resultado de aplicar a la gráfica de $y = \ln x$ “una simetría respecto al eje OY” (es como doblar el papel por el eje OY: lo que está a su derecha pasa a estar a su izquierda y viceversa, manteniendo las distancias al eje OY). Por tanto, si el corte con OX de la gráfica de $y = \ln x$ es el punto $(1, 0)$, el corte con OX de la gráfica de $y = \ln(-x)$ será el punto $(-1, 0)$ y si la gráfica de $y = \ln x$ se aproxima por la derecha (y hacia abajo) a su asíntota vertical que es el eje OY, la gráfica de $y = \ln(-x)$ se aproxima por su izquierda (y también hacia abajo) a la misma asíntota vertical.

Ejemplo 2: “El dominio” de la función $y = 2^{-x}$ es todo $\mathbb{R}$ (simétrico respecto al origen de “el dominio” de 2^x que es el mismo). En efecto, el intervalo $(-\infty, +\infty)$ es simétrico de sí mismo respecto a O, ya que simétricos de los positivos serán los negativos, simétricos de los negativos serán los positivos y simétrico de 0 será 0. Y la gráfica de $y = 2^{-x}$ es “simétrica respecto al eje OY” de la gráfica de $y = 2^x$: Ambas cortan al eje OY en el mismo punto $(0, 1)$; ambas se mantienen por encima del eje OX; la gráfica de $y = 2^{-x}$ se aproxima a su asíntota horizontal, que es el eje OX, cuando avanzamos cada vez más hacia la derecha sobre dicho eje, mientras que la gráfica de $y = 2^x$ se aproxima a la misma asíntota horizontal cuando avanzamos cada vez más hacia la izquierda sobre el eje OX. (Ver en la Sección 2.2 las gráficas de las exponenciales $y = a^x$, con $a > 1$ y con $0 < a < 1$; en este ejemplo, usamos $a = 2$ en $y = 2^x$ y usamos $a = 1/2$ en $y = 2^{-x}$).
