

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

(Prerrequisitos: Funciones básicas. Límites y continuidad de funciones de una variable)

Las “funciones básicas” son las más sencillas: Funciones constantes ($y = k$, con k cualquier número real); función identidad ($y = x$); funciones potenciales más sencillas ($y = x^n$, con n entero mayor que 1); funciones radicales ($y = \sqrt[n]{x}$, con n entero mayor que 1); funciones exponenciales más sencillas ($y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$); funciones logarítmicas ($y = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$); funciones seno, coseno y tangente (donde la variable independiente representa un ángulo en radianes); funciones inversas de las anteriores ($y = \text{arc sen } x$, $y = \text{arc cos } x$ e $y = \text{arc tan } x$, donde la variable dependiente representa un ángulo en radianes), y la función valor absoluto ($y = |x|$). (Ver Sección 2.2).

Límites en puntos del dominio

Todas las “funciones básicas” **son continuas** en sus respectivos dominios. Por tanto, si $f(x)$ es una cualquiera de ellas y a es un punto cualquiera del dominio de f , se tendrá:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}$$

Nota: Cuando f posea un dominio que sea un intervalo y a sea un extremo perteneciente a dicho intervalo, el “límite ordinario” de $f(x)$ en dicho punto se reducirá al único “límite lateral” que tenga sentido, siendo $f(a)$ el valor de dicho límite.

Hay tres casos de la anterior situación entre las funciones básicas:

Caso 1: Es el de las **funciones radicales de índice par**, cuyo dominio común es $[0, +\infty)$. Pues bien, el “límite ordinario” de cualquiera de esas funciones en el punto $x = 0$ se reduce al “límite por la derecha” de la misma función en ese punto, que será $\sqrt[n]{0} = 0$.

Casos 2 y 3: Son los de las **funciones arco seno y arco coseno**, cuyo dominio común es $[-1, 1]$, de forma que el “límite ordinario” en $x = -1$ para ambas funciones se reducirá al “límite por la derecha” correspondiente a cada una (resultando sus valores respectivos en ese punto que son $\text{arc sen}(-1) = -\pi/2$ y $\text{arc cos}(-1) = \pi$), y el “límite ordinario” en $x = 1$ para ambas funciones se reducirá al “límite por la izquierda” correspondiente a cada una (resultando sus valores respectivos en ese punto que son $\text{arc sen } 1 = \pi/2$ y $\text{arc cos } 1 = 0$).

Límites en puntos que son extremos no pertenecientes de intervalos del dominio

Aquí hay sólo dos casos entre las “funciones básicas”:

Caso 1: Es el de las **funciones logarítmicas**, cuyo dominio común es $(0, +\infty)$. Aquí tenemos el punto $x = 0$ que no pertenece al dominio, pero cualquier intervalo de la forma $(0, \delta)$ queda contenido en el mismo. Por tanto, tiene sentido el “límite lateral por la derecha” de $x = 0$ y se tiene:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty}, \text{ si } a > 1 \qquad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty}, \text{ si } 0 < a < 1$$

Por tanto, la recta $x = 0$ (el eje OY) es siempre asíntota vertical de estas funciones. (Ver Sección 2.2).

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

Caso 2: Es el de la función tangente, cuyo dominio es todo \mathbb{R} menos los infinitos múltiplos impares de $\pi/2$. Así, los puntos $a = (2k + 1) \cdot (\pi/2)$, con k entero, son los que no pertenecen al dominio, pero son extremos no pertenecientes de los intervalos que lo forman. Entonces, cualquiera de esos puntos tiene infinitos puntos del dominio tan cerca como queramos, tanto por su derecha como por su izquierda, luego tienen sentido ambos “límites laterales” en cada uno de esos puntos a indicados. Y se tiene:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \pm\infty}, \text{ siendo } \boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} \tan x = +\infty} \text{ y } \boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} \tan x = -\infty}$$

Por tanto, las infinitas rectas de ecuaciones $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, etc... así como las de ecuaciones $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{5\pi}{2}$, etc... son asíntotas verticales. (Ver Sección 2.2).

Límites en el infinito

Tenemos los siguientes casos correspondientes a todas las “funciones básicas”:

1) Función constante $y = k$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$ (para cualquier k real)

2) Función identidad ($y = x$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

3) Funciones “potenciales pares” ($y = x^n$, con n entero positivo **par**):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

4) Funciones “potenciales impares” ($y = x^n$, con n entero positivo **impar** mayor o igual que 1):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

5) Funciones “radicales de índice par” ($y = \sqrt[n]{x}$, con n entero **par** mayor o igual que 2):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} \text{ no tiene sentido, pues el dominio de la función es } [0, +\infty)$$

6) Funciones “radicales de índice impar” ($y = \sqrt[n]{x}$, con n entero **impar** mayor o igual que 3):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

7) Funciones “exponenciales crecientes” ($y = a^x$, con $a > 1$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

Por lo tanto, estas funciones tienen la asíntota horizontal $y = 0$, que es el eje OX. (Ver Sección 2.2).

LÍMITES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS

8) Funciones “exponenciales decrecientes” ($y = a^x$, con $0 < a < 1$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

Por lo tanto, estas funciones tienen la asíntota horizontal $y = 0$, que es el eje OX. (Ver Sección 2.2).

9) Funciones “logarítmicas crecientes” ($y = \log_a x$, con $a > 1$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x \text{ no tiene sentido, pues el dominio de la función es } (0, +\infty)$$

10) Funciones “logarítmicas decrecientes” (base $0 < a < 1$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x \text{ no tiene sentido, pues el dominio de la función es } (0, +\infty)$$

11) Función seno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ tiene sentido pero no existe (la función oscila entre -1 y 1)
y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ tiene sentido pero no existe (mismo motivo)

12) Función coseno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ tiene sentido pero no existe (la función oscila entre -1 y 1)
y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ tiene sentido pero no existe (mismo motivo)

13) Función tangente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x$ tiene sentido pero no existe (la función oscila entre $-\infty$ y $+\infty$)
y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x$ tiene sentido pero no existe (mismo motivo)

14) Función arco seno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin x$ no tiene sentido y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin x$ no tiene sentido
(pues el dominio de la función es $[-1, 1]$)

15) Función arco coseno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos x$ no tiene sentido y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos x$ no tiene sentido
(pues el dominio de la función es $[-1, 1]$)

16) Función arco tangente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi/2$

Por tanto, esta función tiene dos asíntotas horizontales que son $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$. (Ver Sección 2.2).

17) Función valor absoluto ($y = |x|$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$