LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisitos: Funciones reales de una variable real. Potencias, raíces y logaritmos en $\mathbb{R}$)

Tipos de límites y notaciones

En lo que sigue consideraremos solamente funciones reales de una variable real que tengan como dominio un intervalo o una unión de intervalos sin puntos comunes, que son las de uso más frecuente. Además, si utilizamos "funciones definidas a trozos", usaremos solamente aquellas cuyas definiciones incluyan a "funciones elementales" restringidas a intervalos o uniones de intervalos sin puntos comunes. (Ver Sección 2.1).

Los límites de las funciones pueden ser de los siguientes tipos:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x **tiende por la derecha** al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a, pero siendo solamente $x > a$; nunca $x = a$)

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x **tiende por la izquierda** al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a, pero siendo solamente $x < a$; nunca $x = a$)

(Los dos anteriores se llaman "límites laterales" de la función en el punto a).

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x **tiende** al valor a (se elige x en el dominio de f cada vez más cerca de a, incluyendo las posibilidades $x > a$ y $x < a$ si lo permite el dominio; se excluye $x = a$)

(Este último se llama "límite ordinario" de la función en el punto a).

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ (se elige x positivo en el dominio de f y cada vez más grande en valor absoluto)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$: Límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ (se elige x negativo en el dominio de f y cada vez más grande en valor absoluto)

(Los dos últimos se llaman "límites en el infinito" de la función).

Requisitos mínimos del dominio de la función

Para que **tengan sentido** los límites de los tipos anteriores (**todos los cuales podrán dar un resultado o no existir**), el dominio de la función f debe cumplir distintos requisitos, según del tipo de límite de que se trate.

Así, para que tenga sentido $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ **deberá existir algún intervalo de la forma $(a\,, a+\delta)$ contenido en el dominio de f**, con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto a, pero siendo mayores que a), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x. En caso contrario, no podríamos tratar este tipo de límite.

Para que tenga sentido $\lim_{x \to a^-} f(x)$ **deberá existir algún intervalo de la forma $(a - \delta , a)$ contenido en el dominio de f**, con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto a, pero siendo menores que a), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x. En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Para que tenga sentido $\lim_{x \to a} f(x)$ **deberá, al menos, tener sentido uno de los "límites laterales" en el punto a**. Así podremos tomar valores de x en el dominio de f, eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto $x = a$, por su derecha (si existe un intervalo de la forma $(a , a + \delta)$ contenido en dicho dominio) o por su izquierda (si existe un intervalo de la forma $(a - \delta , a)$ contenido en dicho dominio) o podremos tomar valores de x en el dominio de f, eligiéndolos todo lo cerca que queramos del punto $x = a$, tanto por su derecha como por su izquierda (si existe un intervalo de la forma $(a - \delta , a + \delta)$ contenido en el dominio de f, con la salvedad del punto $x = a$ que podrá pertenecer o no pertenecer a dicho dominio), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para todos esos valores de x. En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Para que tenga sentido $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **deberá haber algún intervalo de la forma $(b , +\infty)$ contenido en el dominio de f**, con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos positivos y con valores absolutos todo lo grandes que queramos), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función f para esos valores de x. En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Y para que tenga sentido $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **deberá haber algún intervalo de la forma $(-\infty , b)$ contenido en el dominio de f**, con lo cual podremos tomar valores de x en ese intervalo (eligiéndolos negativos y con valores absolutos todo lo grandes que queramos), de modo que estén garantizadas las imágenes de la función para esos valores de x. En caso contrario, no podríamos hablar de este tipo de límite.

Posibles resultados de un límite

El resultado de cada límite, en uno cualquiera de los tipos mencionados, **depende de cómo se comporten los valores de la función f al variar x en la forma señalada para el tipo de que se trate**.

Cualquiera de ellos (siempre que tenga sentido) dará solamente uno de los resultados siguientes:

a) un número real L (único)   b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $\pm\infty$ e) "no existe"

En el primer caso se habla de límite finito, en cualquiera de los tres siguientes casos se habla de límites infinitos y en el último caso se habla de inexistencia de límite.

Se describen a continuación estos cinco casos posibles, dando ejemplos:

Caso a): **Ocurrirá que los valores de la función f tienden a estabilizarse alrededor del único número real fijo L, llegando a estar tan cerca de L como queramos** (incluida la posibilidad de coincidir con L). Se escribe en este caso: $\boxed{\lim_{x \to ?} f(x) = L}$ (dejamos sin especificar a qué tiende x para cubrir todos los tipos; o sea, puede ser $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to a$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$).

NOTA IMPORTANTE: **Si este límite ocurre cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$, la gráfica de la función $f(x)$ tiene una "asíntota horizontal" que es la recta $y = L$** (entonces una misma función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, una cuando $x \to +\infty$ y la otra cuando $x \to -\infty$, como le ocurre a la función arco tangente). En cualquiera de los dos casos, la gráfica se aproximará a la asíntota cada vez más, pudiendo alcanzarla, cuando x crezca en valor absoluto.

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 3}(2x^2 - 4x) = 6$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 3, sin que coincidan con 3, **tanto por su derecha como por su izquierda** (pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$), los valores de $f(x) = 2x^2 - 4x$ llegarán a estar arbitrariamente cerca del único número real 6.

Analicemos algunos valores: Si $x = 2'8$ es $f(x) = 4'48$; si $x = 2'9$ es $f(x) = 5'22$; si $x = 2'99$ es $f(x) = 5'9202$; si $x = 2'997$ es $f(x) = 5'976018$ (**tendencia de los valores de la función hacia el número 6, cuando nos acercamos a 3 por su izquierda**). Por el otro lado, si $x = 3'15$ es $f(x) = 7'245$; si $x = 3'1$ es $f(x) = 6'82$; si $x = 3'05$ es $f(x) = 6'405$; si $x = 3'001$ es $f(x) = 6'008002$ (**tendencia de los valores de la función hacia el número 6, cuando nos acercamos a 3 por su derecha**).

Ejemplo 2: $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$, pues al tomar valores de x negativos con valores absolutos cada vez mayores, los valores de $f(x) = 2^x$ llegarán a estar arbitrariamente cerca del único número real 0. En este caso la gráfica de la función $y = 2^x$ tiene como "asíntota horizontal" la recta $y = 0$, que es el eje OX. (Ver la gráfica de la función en la Sección 2.2 de esta página web).

Analicemos algunos valores: Si $x = -2$ es $f(x) = 0'25$; si $x = -10$ es $f(x) = 0'000976\ldots$; si $x = -20$ es $f(x) = 0'000000953\ldots$ (**tendencia de los valores de la función hacia 0, cuando tomamos valores de x negativos y cada vez mayores en valor absoluto**).

Caso b): **Ocurrirá que los valores de f llegan a superar a cualquier número positivo por grande que este sea**. Se escribe en este caso: $\boxed{\lim_{x \to ?} f(x) = +\infty}$

NOTA IMPORTANTE: **Si este límite se da cuando $x \to a$, $x \to a^+$ o $x \to a^-$, la gráfica de la función $f(x)$ tiene una "asíntota vertical" que es la recta $x = a$**.

Ejemplo: $\lim_{x \to 5} \left[\frac{7}{(x-5)^2}\right] = +\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 5, sin coincidir con 5, **tanto por su derecha como por su izquierda**, los valores de esa función llegarán a ser mayores que cualquier número positivo, por grande que éste sea (cuanto menor sea el denominador, mayor será el cociente). En este caso la gráfica de $f(x)$ tiene como "asíntota vertical" la recta $x = 5$.

Analicemos algunos valores: Si $x = 4'8$ es $f(x) = 175$; si $x = 4'9$ es $f(x) = 700$; si $x = 4'995$ es $f(x) = 280000$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su izquierda**). Por el otro lado, si $x = 5'15$ se tiene $f(x) = 311'11111\ldots$; si $x = 5'01$ se tiene $f(x) = 70000$; si $x = 5'0008$ se tiene $f(x) = 10937500$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su derecha**).

Caso c): **Ocurrirá que los valores de f llegan a ser menores que cualquier número negativo por grande que sea su valor absoluto**. Se escribe en este caso: $\boxed{\lim_{x\to ?} f(x) = -\infty}$

NOTA IMPORTANTE: **Si este límite se da cuando $x \to a$, $x \to a^+$ o $x \to a^-$, la gráfica de $f(x)$ tiene una "asíntota vertical" que es la recta $x = a$**.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0^+} ln\, x = -\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 0 por la derecha, sin coincidir con 0, los valores de $f(x) = ln\, x$ llegarán a ser menores que cualquier número negativo, por grande que sea su valor absoluto. En este caso la gráfica de la función $ln\, x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$, que es el eje OY. (Ver la gráfica de la función en la Sección 2.2 de esta página web).

Analicemos algunos valores: Si $x = 0'3$ tenemos $f(x) = -1'20397\ldots$; si $x = 0'005$ tenemos $f(x) = -5'29831\ldots$; si $x = 0'00000003$ tenemos $f(x) = -17'32206\ldots$; si $x = 10^{-20}$ tenemos $f(x) = -46'05170\ldots$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto, siendo negativos, cuando nos acercamos a 0 por su derecha**).

Caso d): **Ocurre que los valores de f resultan cada vez más grandes en valor absoluto, pero hay siempre entre ellos positivos y negativos**. Se escribe en este caso: $\boxed{\lim_{x\to ?} f(x) = \pm\infty}$

NOTA IMPORTANTE: **Si este límite ocurre cuando $x \to a$, $x \to a^+$ o $x \to a^-$, la gráfica de $f(x)$ tiene una "asíntota vertical" que es la recta $x = a$**.

Ejemplo: $\lim_{x\to 5} \left(\frac{2}{x-5}\right) = \pm\infty$, pues al tomar valores de x suficientemente próximos a 5, sin coincidir con 5, **tanto por su derecha como por su izquierda**, los valores de dicha función llegarán a ser, en valor absoluto, mayores que cualquier número positivo, por grande que éste sea, pero dichos valores no serán todos positivos ni serán todos negativos (serán positivos cuando tomemos $x > 5$ y serán negativos cuando tomemos $x < 5$). En este caso la gráfica de $f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta vertical $x = 5$.

Analicemos algunos valores: Si $x = 4'8$ es $f(x) = -10$; si $x = 4'9$ se tiene $f(x) = -20$; si $x = 4'9995$ es $f(x) = -4000$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo negativos, cuando nos acercamos a 5 por su izquierda**, como si el límite fuese $-\infty$). Y si $x = 5'25$ es $f(x) = 8$; si $x = 5'03$ se tiene $f(x) = 66'6666\ldots$; si $x = 5'0007$ es

$f(x) = 2857'142...$ (**tendencia de los valores de la función a crecer sin parar en valor absoluto siendo positivos, cuando nos acercamos a 5 por su derecha**, como si el límite fuese $+\infty$). Aquí el límite por la derecha es $+\infty$ y el límite por la izquierda es $-\infty$, cosa muy frecuente (así o a la inversa). Pero hay funciones más complicadas donde la mezcla de signos aparece a cada lado del punto a al cual tiende x. También las hay con esa mezcla de signos cuando x tiende a $+\infty$ o cuando x tiende a $-\infty$.

Caso e): **Ocurre cualquier otra situación, diferente de las anteriores**.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$. **Este límite no existe porque**, al ser periódica, la función repite una y otra vez sus valores en el mismo orden mientras x crece, con lo cual **la función no presenta ninguna tendencia como las de los casos anteriores** (es decir, sus valores no se aproximan cada vez más a un número real fijo L, pues no paran de oscilar entre -1 y 1; ni sus valores absolutos llegan a ser mayores que cualquier número positivo, pues no superan al valor 1, con lo cual el límite no puede ser $+\infty$, $-\infty$ ni $\pm\infty$).

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to0} \frac{|x|}{x}$. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, luego tienen sentido los dos "límites laterales". Para x positivo es $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, con lo cual la función toma únicamente el valor 1 cuando nos acercamos a cero por la derecha, y para x negativo es $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, con lo cual la función toma únicamente el valor -1 cuando nos acercamos a cero por la izquierda. Pero el límite ordinario cuando $x \to 0$ tendría que ser **un único valor real L** al cual se acerquen **todos** los valores de la función, cuando se tomen suficientemente cerca de cero, tanto por su derecha como por su izquierda). **Y vemos que esto no ocurre, luego este límite no existe**.

En este ejemplo el límite por la derecha en $x = 0$ existe y vale 1, Y el límite por la izquierda en el mismo punto también existe y vale -1. **El que no existe es el límite ordinario en $x = 0$, pues hay contradicción entre las tendencias por un lado y por el otro**.

Propiedades de los límites

1) El propio concepto de límite finito implica **la unicidad del límite** (es decir, si existe límite finito para una función, su valor L es único).

2) Si es $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ y es H un número cualquiera **menor** que L, existirá un cierto intervalo $(a\ ,\ a+\delta)$ contenido en el dominio de f de modo que se cumple $\boxed{f(x) > H}$ para todo x de dicho intervalo. Y de modo análogo, si es $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ y es $H < L$, existirá un intervalo $(a-\delta\ ,a)$ contenido en el dominio de f de modo que $\boxed{f(x) > H}$ para todo x de dicho intervalo.

O sea, **los valores que toma la función en puntos del dominio que estén suficientemente cerca de a, sin coincidir con este valor, llegan a superar a cualquier número menor que su límite**.

En particular: Si L es positivo, habrá un intervalo de los mencionados donde todos los valores de la función serán positivos. En efecto, podemos tomar $H = 0$ y aplicar la propiedad anterior.

Nota: Cuando se trate de un límite con $x \to +\infty$ o con $x \to -\infty$, los intervalos que se nombran en esta propiedad, deberán cambiarse por $(b\,, +\infty)$ si $x \to +\infty$ y por $(-\infty\,, b)$ si $x \to -\infty$. El resto sigue igual.

3) Si es $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ y es K un número cualquiera **mayor** que L, existirá un cierto intervalo $(a\,, a + \delta)$ de modo que se cumple $\boxed{f(x) < K}$ para todo x de dicho intervalo. Y, análogamente, si es $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y es $K > L$, existirá un intervalo $(a - \delta\,, a)$ contenido en el dominio de f de modo que $\boxed{f(x) < K}$ para todo x de dicho intervalo.

O sea, **los valores que toma la función en puntos del dominio que estén suficientemente cerca de a, sin coincidir con este valor, llegan a ser inferiores a cualquier número mayor que su límite**.

En particular: Si L es negativo, habrá un intervalo de los mencionados donde todos los valores de la función serán negativos. En efecto, podemos tomar $K = 0$ y aplicar la propiedad anterior.

Nota: Vale la misma observación hecha en la nota de la propiedad anterior cuando sea $x \to +\infty$ o bien sea $x \to -\infty$: Los intervalos respectivos serán $(b\,, +\infty)$ y $(-\infty\,, b)$.

4) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = L_2$ y es $\boxed{L_1 < L_2}$, existirá algún intervalo $(a\,, a + \delta)$ donde se cumple $\boxed{f(x) < g(x)}$ para todo x de dicho intervalo que esté en los dominios de las dos funciones f y g. O sea, **al límite mayor le corresponde la función con valores mayores y al límite menor le corresponde la función con valores menores** (cumpliéndose esto suficientemente cerca del punto a, pero no en dicho punto; los valores $f(a)$ y $g(a)$ podrían incluso no existir).

Nota: Esta propiedad sigue cumpliéndose cuando, en vez de $x \to a^+$ en ambos límites, sea en ambos $x \to a^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Bastará entonces cambiar el intervalo donde varíe x y adaptarlo a cada caso (cuando sea $x \to a^-$, el intervalo será de la forma $(a - \delta\,, a)$; cuando sea $x \to +\infty$, el intervalo será de la forma $(b\,, +\infty)$, y cuando sea $x \to -\infty$, el intervalo será de la forma $(-\infty\,, b)$).

5) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = L_2$ y se cumple $\boxed{f(x) < g(x)}$ en un cierto $(a\,, a + \delta)$, entonces será $\boxed{L_1 \le L_2}$. O sea, **a la función con menores valores cerca de a, le corresponderá el límite que sea menor o bien el límite será igual** (no necesariamente menor estricto). Análogamente, para $x \to a^-$ en ambos límites, siendo el intervalo $(a - \delta\,, a)$; también para $x \to +\infty$ en ambos límites, siendo el intervalo $(b\,, +\infty)$, y también para $x \to -\infty$ en ambos límites, siendo el intervalo $(-\infty\,, b)$.

Ejemplos de esta propiedad 5) donde los límites L_1 y L_2 resultan ser iguales:

Ejemplo 1: Sean $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+x}$ y $g(x) = \frac{2x-4}{x^2}$. Para x positivo, es $f(x) < g(x)$, porque se tiene $x^2 + x > x^2$ y los numeradores son iguales. Por tanto, será $f(x) < g(x)$ en los intervalos de las formas $(2-\delta, 2)$ y $(2, 2+\delta)$ cuando tomemos por ejemplo $\delta = 2$ (porque esos intervalos serán $(0, 2)$ y $(2, 4)$ y entonces los valores de x serán todos positivos). Sin embargo, el límite de $f(x)$ cuando $x \to 2$ **no es menor** que el límite de $g(x)$ cuando $x \to 2$ (**ambos límites son cero**, ya que ambos numeradores tienden a cero, mientras que el primer denominador tiende a 6 y el segundo tiende a 4, con lo cual ambos cocientes tienden a cero). (Estamos anticipando el uso de la conocida propiedad, que veremos más adelante, de que el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, si ambos son finitos y la función del denominador no tiene límite cero).

Ejemplo 2: Para $x > 1$ será x positivo, luego se cumplirá $x^2 > x$ (resultado de multiplicar por x los dos miembros de la desigualdad $x > 1$). Entonces será $\frac{3}{x^2} < \frac{3}{x}$ cuando sea $x > 1$. Pues bien, consideremos ahora las funciones $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2} = 2 + \frac{3}{x^2}$ y $g(x) = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$, para las cuales se cumple $f(x) < g(x)$ cuando tomemos x en el intervalo $(1, +\infty)$. Así podría pensarse que los límites de ambas funciones cuando $x \to +\infty$ estarán en la misma relación que las dos funciones (o sea, que será $L_1 < L_2$), pero no es así: **Ambos límites tienen valor 2**, pues $3/x^2$ y $3/x$ tienen límite cero. O sea, que de la relación $L_1 \le L_2$ que menciona esta última propiedad 5, se cumple en este caso $L_1 = L_2$. (Aquí estamos anticipando también la conocida propiedad, que veremos más adelante, de que el límite de un cociente de dos funciones es cero si la función del numerador tiende a un número L y la función del denominador tiende a infinito).

Otras propiedades importantes (relaciones entre distintos tipos de límites)

1) Si coinciden los "límites laterales" en un punto, el "límite ordinario" en ese punto existe y coincidirá con ambos. Hay 4 variantes de esto:

1.1) $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$ (ver ejemplo 1 dado para el caso a) en la pág. 3)

1.2) $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$ (ver ejemplo dado para el caso b) en la la pág. 3)

1.3) $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$ (por ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{7}{x^2}\right) = -\infty$)

1.4) $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$ (hay ejemplos, pero no los trataremos pues requieren funciones que estén "definidas a trozos" de un modo complicado)

2) Inversamente, si existe el "límite ordinario" en un punto $x = a$, siendo dicho límite un número real, siendo $+\infty$ o siendo $-\infty$ **y si tienen sentido ambos "límites laterales" en dicho punto**, estos últimos existirán y coincidirán con el "límite ordinario". Además, si solamente tuviese sentido uno de los "límites laterales", el mismo existirá y coincidirá con el "límite ordinario".

3) Si uno de los "límites laterales" en un punto es $+\infty$ y el otro "límite lateral" es $-\infty$, el "límite ordinario" en ese mismo punto es $\pm\infty$. (Es el caso de límite $\pm\infty$ que trataremos únicamente). (Ejemplo del caso d) en la pág. 4).

4) Si los "límites laterales" en un punto existen pero son diferentes, salvo que uno sea $+\infty$ y el otro sea $-\infty$, el "límite ordinario" en dicho punto no existe. (Ver ejemplo 2 del caso e) en la pág. 5, donde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe porque el "límite por la derecha" es 1 y el "límite por la izquierda" es -1).

5) Si en un punto no tiene sentido hablar de **ambos** "límites laterales" de una función, sino solamente de uno de ellos (porque solamente hay puntos del dominio de la función por ese lado), el "límite ordinario" en dicho punto coincidirá con el "límite lateral" que tenga sentido si el mismo existe. (Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}(arc\cos x) = 0$, donde no tiene sentido el límite por la derecha en 1 puesto que el dominio de la función es $[-1\ ,\ 1]$, pero sí tiene sentido el límite por la izquierda en 1 y vale cero).

MUY IMPORTANTE: Nunca debe confundirse un límite ("lateral" u "ordinario") en un punto a, con el valor $f(a)$ de la función en dicho punto. Pues ambos valores coinciden en muchas ocasiones, pero en otras muchas ocasiones no coinciden. Es más, puede existir el límite y no haber el valor $f(a)$, o puede haber el valor $f(a)$ y no existir el límite.

Límites de las funciones básicas

Recordamos que las "funciones básicas" son las más sencillas (constantes, identidad, potenciales de exponente entero positivo, radicales, exponenciales de base positiva diferente de 1, logarítmicas, seno, coseno, tangente, arco seno, arco coseno, arco tangente y valor absoluto).

TEOREMA: Si $f(x)$ es una "función básica" cualquiera y si $x = a$ es uno cualquiera de los puntos de su dominio, se tiene siempre $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Nota importante: Entonces, como consecuencia de la propiedad 2 (en esta página), para todos los puntos $x = a$ que **sean interiores** de los intervalos que formen el dominio de la función f, existirán ambos "límites laterales" y tendrán el mismo valor $f(a)$ (porque, al ser $x = a$ punto interior de uno de los intervalos que forman el dominio de f, tendrá que haber siempre algún intervalo $(a - \delta\ , a + \delta)$ totalmente contenido en dicho dominio, con lo cual también estarán contenidos en el dominio los dos intervalos $(a-\delta\,,a)\ y\ (a\,,a+\delta)$) y tendrán sentido ambos "límites laterales". Sin embargo, en los puntos $x=a$ que sean **extremos pertenecientes** de los intervalos que formen el dominio de f, solamente existirá uno de los "límites laterales" y tendrá el valor $f(a)$.

Límites de las "funciones básicas" en puntos que son **extremos no pertenecientes** de sus dominios.

Hay sólo dos casos:

Caso 1: Es el de las funciones logarítmicas, cuyo dominio común es $(0\,,+\infty)$. El punto $x=0$ no pertenece al dominio, pero cualquier intervalo de la forma $(0\,,\delta)$ queda contenido en el mismo. Por tanto, tiene sentido el límite lateral por la derecha de $x=0$ y se tiene:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} log_a\, x=-\infty}\ ,\ \text{si}\ \ a>1 \qquad\qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} log_a\, x=+\infty}\ ,\ \text{si}\ \ 0<a<1$$

Por tanto, la recta $x=0$ (el eje OY) es siempre **asíntota vertical** de estas funciones.

Caso 2: Es la función tangente, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los infinitos múltiplos impares de $\pi/2$. Así, los puntos $a=(2k+1)\cdot(\pi/2)$, con k entero, son los que no pertenecen al dominio. Pero cualquiera de los mismos tiene infinitos puntos del dominio tan cerca como queramos, tanto por su derecha como por su izquierda, luego tienen sentido ambos límites laterales en cada uno de dichos puntos y se tiene:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} tan\, x=+\infty}\ \text{ y }\ \boxed{\lim_{x\to a^+} tan\, x=-\infty}\ \text{, luego }\ \boxed{\lim_{x\to a} tan\, x=\pm\infty}$$

para todo a que sea múltiplo impar de $\pi/2$.

Por tanto, las infinitas rectas de ecuaciones $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{2}$, etc… así como las de ecuaciones $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{5\pi}{2}$, etc… son **infinitas asíntotas verticales**.

Límites en el infinito de las "funciones básicas":

1) Funciones constantes: $\lim\limits_{x\to+\infty} k=k$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} k=k$ (para cualquier k real)

2) Función identidad: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

3) Funciones potenciales pares: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ (n entero positivo par)

4) Funciones potenciales impares: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ (n entero positivo impar)

5) Funciones radicales de índice par: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}$ no tiene sentido (n par)

6) Funciones radicales de índice impar: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}=-\infty$ (n impar)

7) Funciones exponenciales crecientes (base $a>1$): $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

Por lo tanto, estas últimas funciones tienen la **asíntota horizontal** $y = 0$, que es el eje OX.

8) Funciones exponenciales decrecientes (base $0 < a < 1$): $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Por lo tanto, estas últimas funciones tienen la **asíntota horizontal** $y = 0$, que es el eje OX.

9) Funciones logarítmicas crecientes (base $a > 1$): $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \log_a x$ no tiene sentido

10) Funciones logarítmicas decrecientes (base $0 < a < 1$): $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \log_a x$ no tiene sentido

11) Función seno: $\lim_{x \to +\infty} sen\, x$ no existe y $\lim_{x \to -\infty} sen\, x$ no existe

12) Función coseno: $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ no existe y $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ no existe

13) Función tangente: $\lim_{x \to +\infty} \tan x$ no existe y $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ no existe

14) Función arco seno: $\lim_{x \to +\infty} arc\, sen\, x$ no tiene sentido y $\lim_{x \to -\infty} arc\, sen\, x$ no tiene sentido

15) Función arco coseno: $\lim_{x \to +\infty} arc\cos x$ no tiene sentido y $\lim_{x \to -\infty} arc\cos x$ no tiene sentido

16) Función arco tangente: $\lim_{x \to +\infty} arc\, tg\, x = \pi/2$ y $\lim_{x \to -\infty} arc\, tg\, x = -\pi/2$

Por tanto, esta última función tiene **dos asíntotas horizontales**: $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$.

17) Función valor absoluto: $\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$

Notas:

1) Los límites cuando $x \to -\infty$ de las funciones radicales de índice par no tienen sentido, porque no hay valores negativos en el dominio de esas funciones, ya que el dominio de todas es $[0 , +\infty)$.
2) Los límites cuando $x \to -\infty$ de las funciones logarítmicas no tienen sentido, porque no hay valores negativos en el dominio de esas funciones, ya que el dominio de todas es el intervalo $(0 , +\infty)$.
3) Los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las tres funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) no existen aunque tienen sentido, porque los valores de las tres se repiten en forma periódica (el seno y el coseno oscilan entre -1 y $+1$, con periodo 2π; la tangente oscila entre $-\infty$ y $+\infty$, con periodo π).
4) Los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las funciones arco seno y arco coseno no tienen sentido, porque no hay valores del dominio de ambas funciones superiores a 1 ni inferiores a -1. En ambos casos el dominio es $[-1 , 1]$.

Álgebra de límites

Veamos ahora cómo son los límites de sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones, suponiendo conocidos los límites de las funciones con las que operamos en cada caso. Estas propiedades, que resumimos en tres teoremas, se suelen agrupar en los textos como "Álgebra de límites".

Supondremos que las dos funciones que nombraremos en los tres teoremas tienen dominios con intersección no vacía (para que puedan existir las funciones suma, diferencias, producto y cocientes de ambas). Y como en los tres teoremas consideraremos límites con $x \to a$, supondremos también que dicha intersección de dominios contenga algún intervalo $(a-\delta_1\,,a)$ o bien otro intervalo $(a\,,a+\delta_2)$, no anulándose en ese intervalo la función del denominador que aparezca en los casos de cocientes. Esto es para que, en los tres teoremas, tenga sentido al menos uno de los "límites laterales" en el punto a y por tanto tenga sentido el "límite ordinario" con x tendiendo al valor a, para las funciones f, g , $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g y g/f.

En un primer teorema **supondremos que las dos funciones tienen límites finitos cuando $x \to a$** y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y cociente de ambas. Pero el teorema es perfectamente válido si en su enunciado pusiésemos siempre $x \to a^+$ o $x \to a^-$ en lugar de $x \to a$ (cuando la intersección de dominios cumpla los requisitos para que tengan sentido esos "límite laterales").

TEOREMA 1: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ (siendo A y B números reales), se tiene:

a) $\lim\limits_{x\to a}\,[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ b) $\lim\limits_{x\to a}\,[f(x)\cdot g(x)] = A\cdot B$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{A}{B}\,, & si\ B \neq 0 \\ \infty\,, & si\ A \neq 0\ \ y\ \ B = 0 \\ INDETERMINADO\,, & si\ A = 0\ y\ B = 0 \end{cases}$ (signo de ∞ por regla de signos)

El límite indeterminado anterior se conoce como "indeterminación $0/0$". En todos los casos de indeterminación se dan efectos contrarios. Aquí, al decrecer el numerador, el cociente tenderá a decrecer, y al decrecer el denominador, el cociente tenderá a crecer. ¿Qué ocurrirá? Pues depende de cuáles sean las funciones f y g que intervengan.

En un segundo teorema **supondremos que una función tiene límite finito y la otra función tiene límite infinito (ambas cuando $x \to a$)** y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y los dos cocientes de ambas (también vale si ponemos siempre en el enunciado $x \to a^+$ o $x \to a^-$ en vez de $x \to a$, si se cumplen los requisitos para que tengan sentido):

TEOREMA 2: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (número real) y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (no especificamos si es $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$), se tiene:

a) $\lim\limits_{x\to a}\,[f(x) \pm g(x)] = \infty$ (signo de este límite, por regla de signos)

b) $\lim\limits_{x\to a}\,[f(x)\cdot g(x)] = \begin{cases} \infty\,, & si\ A \neq 0 \\ INDETERMINADO, & si\ A = 0 \end{cases}$ (signo de ∞, por regla de signos)

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ (signo de este límite, por regla de signos)

El límite indeterminado del Teorema anterior se conoce como "indeterminación $0\cdot\infty$". Como en el caso de la anterior indeterminación $0/0$, hay otra vez efectos contrarios: Al decrecer el primer factor, el producto tenderá a decrecer, y al crecer el segundo factor, el producto tenderá a crecer. ¿Qué ocurrirá? Otra vez depende de cuáles sean las funciones f y g que intervengan.

Y en un tercer teorema **supondremos que las dos funciones tienen límites infinitos cuando $\boldsymbol{x \to a}$** y se establecen los límites de las funciones suma, diferencia, producto y cociente de ambas (pudiendo poner en su enunciado siempre $x \to a^+$ o $x \to a^-$ en lugar de $x \to a$):

TEOREMA 3: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (no especificamos signos), se tiene:

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = INDETERMINADO$ ("indeterminación $\infty \pm \infty$")

b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$ (signo de este límite, por regla de signos)

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = INDETERMINADO$ ("indeterminación ∞/∞")

La indeterminación $\infty \pm \infty$ lo es al no haberse especificado en las hipótesis del teorema los signos de los límites infinitos de las dos funciones. Pero si especificamos los signos, hay casos en que la indeterminación no existe y otros casos en que esta es segura. Es segura en los casos que podemos representar por $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$ y $(-\infty)-(-\infty)$, ya que en todos ellos se dan efectos contrarios. En cambio, no existe indeterminación en los casos que representamos por $(+\infty)+(+\infty)$, $(-\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(-\infty)$ y $(-\infty)-(+\infty)$, pues en estos no hay efectos contrarios sino efectos del mismo sentido. Estos últimos casos dan, respectivamente, los resultados $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$ y $-\infty$.

Y en el caso del límite indeterminado ∞/∞ también hay efectos contrarios, pues al crecer el numerador, el cociente tenderá a crecer, y al crecer también el denominador, el cociente tenderá a decrecer. Otra vez lo que ocurra dependerá de cuáles sean las dos funciones que intervengan.

Notas importantes:

1) Los tres teoremas anteriores también se cumplen poniendo en todos los límites $x \to +\infty$ o bien $x \to -\infty$ (en vez de $x \to a$), para lo cual basta suponer que la intersección de los dominios de f y g contenga un intervalo de la forma $(b\,,+\infty)$ donde no se anulen f ni g (cuando x tienda a $+\infty$), o contenga un intervalo de la forma $(-\infty\,,b)$ donde no se anulen f ni g (cuando x tienda a $-\infty$).

2) Cuando ponemos un resultado como INDETERMINADO, queremos indicar que dicho resultado es **impredecible** sin conocer las funciones que intervienen (o sea, que dicho resultado, según sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, podrá ser un número L, podrá ser $+\infty$, $-\infty$, $\pm\infty$ o bien podrá no existir). Pero en la práctica, cuando tengamos que calcular un límite de estos tipos, se conocerán las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que intervienen, con lo cual se llegará a saber lo que ocurre

realmente. Y el límite no estará totalmente resuelto hasta que lleguemos a la conclusión final (decir "indeterminado" no es dar su resultado; al contrario, hay que seguir trabajando para resolverlo).

Pues bien, el proceso para averiguar dicho resultado final consiste normalmente en transformar por operatoria el límite dado en otro **límite equivalente** (que tendrá el mismo resultado con seguridad, porque la nueva función obtenida posea los mismos valores cuando nos acerquemos al punto a, si es el caso, o cuando tomemos x suficientemente grande en valor absoluto, siendo positivo o siendo negativo según el caso de límite en el infinito). De modo que en ese límite equivalente podamos aplicar ya alguno de los teoremas anteriores sin caer de nuevo en un caso de indeterminación, con lo cual podremos finalmente averiguar cuál es el límite dado (es lo que comúnmente se denomina "resolver la indeterminación"). A veces este proceso es largo y conduce a otras indeterminaciones intermedias, cada vez más sencillas de resolver, hasta que se llega a la conclusión final para el límite dado inicialmente.

Por lo general, las indeterminaciones más fáciles de resolver son las que tienen forma de cociente ($0/0$ e ∞/∞), por lo cual en la práctica se intenta convertir las otras indeterminaciones en estas. Al respecto, se pueden usar ciertas identidades, aunque a veces la transformación del límite indeterminado consiste en multiplicar y dividir por una expresión llamada "conjugada" o solamente efectuar operaciones y simplificar. Las identidades son:

$u \pm v \equiv \frac{\frac{1}{v} \pm \frac{1}{u}}{\frac{1}{u \cdot v}}$ (transforma la indeterminación $\infty \pm \infty$ en la $0/0$, pues serán $u \neq 0$ y $v \neq 0$)

$u \cdot v \equiv \frac{u}{1/v}$ (transforma la indeterminación $0 \cdot \infty$ en la $0/0$, pues será $v \neq 0$ al tender a ∞)

$u \cdot v \equiv \frac{v}{1/u}$ (transforma la indeterminación $\infty \cdot 0$ en la $0/0$, pues será $u \neq 0$ al tender a ∞)

A veces, conviene usar alguna de estas dos últimas identidades para transformar una indeterminación en forma de producto en la indeterminación ∞/∞. Por ejemplo, si u tiene límite ∞ y v tiene límite 0 (como hemos supuesto en el tercer caso), podría ponerse $u \cdot v \equiv \frac{u}{1/v}$, quedando así la indeterminación ∞/∞, pero se podrá hacer esto solo si v se mantiene diferente de cero.

A su vez, las indeterminaciones en forma de cociente pueden resolverse por simplificaciones (principalmente, factorizar numerador y denominador para luego simplificar la fracción, así como dividir numerador y denominador por una cierta potencia de la variable independiente, cuando la misma tiende a ∞). Más adelante se verán dos procedimientos muy importantes para resolver indeterminaciones en forma de cociente: La Regla de L'Hôpital (Sección 3.3) y la sustitución de "infinitésimos equivalentes" (Sección 3.4).

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^3-27} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x^2+3x+9)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+1}{x^2+3x+9} = \frac{4}{27}$

Aquí se resolvió la indeterminación $0/0$ factorizando el numerador, factorizando el denominador, y simplificando el factor $(x-3)$ que es diferente de cero (pues al ser $x \to 3$, será $x \neq 3$). Finalmente, aplicamos los apartados a), b) y c) del Teorema 1.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2+2x-15)\cdot\frac{2}{x-3}\right]=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cdot(x^2+2x-1\ )}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2\cdot(x+5)\cdot(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}[2\cdot(x+5)]=16$$

Inicialmente, el límite de $2/(x-3)$ es ∞ por el apartado c) del Teorema 1. Luego, al operar, pasamos de la indeterminación $0\cdot\infty$ a la indeterminación $0/0$. A continuación, factorizamos el polinomio $x^2+2x-15$ y simplificamos el factor $(x-3)$ que es diferente de cero. Finalmente, aplicamos los apartados a) y b) del Teorema 1.

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5x)-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{5}{2}$$

Aquí se pasó de la indeterminación $\infty-\infty$ a la indeterminación ∞/∞ multiplicando y dividiendo por la “expresión conjugada” y luego simplificando. Después, para resolver la indeterminación ∞/∞, se dividió numerador y denominador por x^1 (porque el grado del numerador es 1; si dicho grado fuese 2, dividiríamos numerador y denominador por x^2, y de modo análogo en otros casos) y después se efectuaron operaciones. Finalmente, se aplicó varias veces el apartado c) del Teorema 2, el apartado a) del Teorema 1 y por último el apartado c) del Teorema 1. También intervienen en el proceso estos cálculos: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}=\lim_{t\to 1}\sqrt{t}=1\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}=\lim_{t\to 1}\sqrt{t}=1$$

Donde hemos aplicado, en cada uno de estos límites, un **cambio de variable** apropiado y nos hemos apoyando además en que $y=\sqrt{x}$ es una función básica, con lo cual $\lim\limits_{t\to 1}\sqrt{t}=\sqrt{1}=1$; pero además $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$ porque si tomamos t es suficientemente grande, el valor de $\sqrt{t}$ llegará a superar a cualquier número positivo dado, por grande que sea.

Nota importante: Si el límite anterior fuese con $x\to-\infty$, al entrar x dividiendo en las dos raíces cuadradas del denominador (que entraría dividiendo como x^2), tendríamos que cambiar el signo de ambas raíces, con lo cual el resultado final sería $-5/2$. Esto ocurre porque x sería negativo, con lo cual $\boxed{x=-\sqrt{x^2}}$ (y no $x=\sqrt{x^2}=+\sqrt{x^2}$, como ocurre cuando x es positivo).

Es decir, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x+2}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+5x}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\frac{5}{-\sqrt{1}-\sqrt{1}}=-\frac{5}{2}$

donde hemos abreviado el cálculo final, poniendo directamente $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{x}=5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x}{x^2}=1$ y también $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x^2}=1$, porque ya los habíamos utilizado anteriormente (cuando x tendía a $+\infty$) y ahora es igual.

Nota adicional: "Expresiones conjugadas" de sumas o diferencias de raíces de igual índice son las apropiadas para convertir esas sumas o diferencias en otras expresiones algebraicas que no lleven raíces (cuando multiplicamos la que tenemos por su correspondiente "conjugada"). Lo cual conviene en algunos casos para resolver una indeterminación en forma de cociente, como la anterior, en cuyo caso se multiplica y se divide para no alterar valores (así lo hemos hecho).

Así, llamando para abreviar A y B a los radicandos, tenemos las siguientes "conjugadas" que podemos comprobar fácilmente efectuando los productos y simplificándolos:

"Expresión conjugada" de $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ es $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ y viceversa, resultando su producto $A-B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ es $\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$ (todos los signos $+$), resultando su producto $A-B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ es $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$ (signos alternados $+,-,+$), resultando su producto $A+B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}$ es $\sqrt[4]{A^3}+\sqrt[4]{A^2B}+\sqrt[4]{AB^2}+\sqrt[4]{B^3}$ (todos signos $+$), con producto $A-B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}$ es $\sqrt[4]{A^3}-\sqrt[4]{A^2B}+\sqrt[4]{AB^2}-\sqrt[4]{B^3}$ (signos alternados), con producto $A-B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[5]{A}-\sqrt[5]{B}$ es $\sqrt[5]{A^4}+\sqrt[5]{A^3B}+\sqrt[5]{A^2B^2}+\sqrt[5]{AB^3}+\sqrt[5]{B^4}$ (todos signos $+$), con producto $A-B$.

"Expresión conjugada" de $\sqrt[5]{A}+\sqrt[5]{B}$ es $\sqrt[5]{A^4}-\sqrt[5]{A^3B}+\sqrt[5]{A^2B^2}-\sqrt[5]{AB^3}+\sqrt[5]{B^4}$ (signos alternados), con producto $A+B$.

Etcétera….

Ejemplo 4: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{5x-6}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(3x+2)^3}}{\sqrt[6]{(5x-6)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(3x+2)^3}{(5x-6)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{27x^3+\cdots}{25\;\;{}^2-\cdots}}=+\infty$

Inicialmente hemos reducido el cociente de raíces a una sola raíz de un cociente, donde el numerador final (dentro de la raíz sexta) representa el desarrollo de la potencia $(3x+2)^3$, ordenada de mayores a menores exponentes, y el denominador final (dentro de la misma raíz sexta) representa el desarrollo de la potencia $(5x-6)^2$, también ordenada de mayores a menores exponentes. Finalmente, como en esa última fracción el polinomio del numerador es de mayor grado que el polinomio del denominador, ese numerador crecerá más rápidamente que ese denominador (siendo el límite de ambos $+\infty$), con lo cual los cocientes de ambos serán cada vez más grandes, y su límite resultará $+\infty$. Entonces, el último límite puede considerarse $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt[6]{t}=+\infty$ (si el radicando crece sin parar, la raíz sexta crecerá también sin parar, de modo que si t se toma suficientemente grande, $\sqrt[6]{t}$ llegará a superar a cualquier número positivo que queramos dar).

Límites en el infinito de las funciones racionales

Recordemos que "función racional" de una variable es cualquiera que sea de la siguiente forma (o pueda llevarse a la misma):

$\boxed{f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}}$, donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de coeficientes reales

(los subíndices m y n representan los grados respectivos de ambos polinomios). La función anterior será normalmente una "función fraccionaria"; pero si la división del numerador entre el denominador fuese división exacta, la función $f(x)$ será simplemente el cociente obtenido, resultando ser una "función polinómica". (Recordar lo dicho en la Sección 2.3).

Damos a continuación un conocido teorema sobre los posibles límites de una función del tipo anterior cuando $x \to +\infty$:

TEOREMA: Si el coeficiente de x^m en $P_m(x)$ es el número a y el coeficiente de x^n en $Q_n(x)$ es el número b, tenemos los siguientes resultados:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a}{b}$, si $m = n$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$, si $m > n$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$, si $m < n$

Nota 1: El Teorema anterior también es válido si es $x \to -\infty$ en sus tres apartados.

Nota 2: El resultado del apartado 2) del Teorema será $+\infty$ o bien $-\infty$ según los casos. Habrá que aplicar la regla de signos, teniendo en cuenta los de ax^m y bx^n, según que $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. En efecto, para valores absolutos de x suficientemente grandes, el signo del polinomio $P_m(x)$ lo determina el signo de ax^m e igualmente el signo de $Q_n(x)$ lo determina el signo de bx^n.

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-8x+5}{-2x^3+3} = -\frac{3}{2}$ 2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-8}{5x^2+9} = 0$ 3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+5x-1}{3x+12} = +\infty$

(en el último ejemplo, además de que es $m > n$, el signo que corresponde a $-2x^2$ es negativo y el signo que corresponde a $3x$ también es negativo, pues los valores de x son negativos; por eso el límite es $+\infty$).

Funciones que son potencias

Las funciones de la forma $y = [f(x)]^k$, con k real fijo diferente de cero y diferente de 1, se llaman "funciones potenciales".

Las más sencillas "funciones potenciales" son las "básicas" $\boxed{y = x^n}$ (n entero positivo mayor que 1). Pero también son "funciones potenciales" $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ (n entero positivo), así como $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ o $y = x^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ (n entero positivo mayor que 1). Desde luego, también son "funciones potenciales" $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ e $y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ (m y n enteros mayores que 1) así como $y = x^{\alpha}$, con α número irracional, positivo o negativo.

Las funciones de la forma $y = k^{f(x)}$ (k real fijo **positivo**, mayor que 1 o menor que 1) se llaman "funciones exponenciales". Las más sencillas son las "básicas" $\boxed{y = a^x}$ (con $a > 1$ o bien con $0 < a < 1$).

Pero también hay funciones que son potencias del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$, donde ni la base ni el exponentes son constantes, las cuales se llaman "funciones potenciales-exponenciales". La más sencilla es $y = x^x$, que no es "básica" (pero sí es "elemental", porque $x^x \equiv e^{x \cdot ln\, x}$ $(x > 0)$, con lo cual tenemos una compuesta del producto $x \cdot ln\, x$ con la función exponencial e^x).

Límites de funciones que son potencias

1) El límite de una "función potencial" $[f(x)]^k$ (k fijo diferente de cero y diferente de 1) se reduce normalmente a estudiar el límite de la función que aparezca en su base. Luego se usa el cambio de variable $f(x) = t$ y se calcula el límite de la potencial t^k cuando t tienda al límite de $f(x)$ (si este existe como número real, como $+\infty$ o como $-\infty$).

   En la Sección 2.5 se considerarán estos límites de x^k con k entero mayor que 1 y con k de la forma $1/n$ siendo también n entero mayor que 1 (límites de funciones radicales), que son sencillos. Si fuese $k = m/n$, con m y n enteros mayores que 1, se tiene $x^k = \sqrt[n]{x^m}$ que es una compuesta, pudiendo usar un cambio de variable para hallar su límite. Y si k fuese negativo, tendremos el límite de un cociente y aplicamos entonces el Álgebra de límites. Finalmente, si k es irracional podemos utilizar la identidad $x^k = e^{k \cdot ln\, x}$ (que es otra compuesta), estando en la Sección 2.5 los límites de $y = ln\, x$ y de $y = e^x$.

   Pero si el límite de $f(x)$ no existiese, el límite de la potencial tampoco existirá en general.

   Y en caso de que el límite de $f(x)$ fuese $\pm\infty$, habrá que ver separadamente el límite de t^k cuando t tienda a $+\infty$ y el límite de t^k cuando t tienda a $-\infty$. Si ambos coinciden, la potencial $[f(x)]^k$ tendrá el mismo límite. Por ejemplo, si es $k = 4$ (u otro entero positivo **par**) ambos límites coincidirán en $+\infty$, luego ese será el límite de la función dada. Y si $k = 7$ (u otro entero positivo **impar**) el primer límite será $+\infty$ y el segundo límite será $-\infty$, con lo cual el límite de la "función potencial" también será $\pm\infty$.

   Pero si fuese $k = 1/2$ (u otra fracción del tipo $1/n$ con n entero **par**) siendo $\pm\infty$ el límite de $f(x)$, tendremos que el límite de t^k cuando $t \to +\infty$ sería $+\infty$ y el límite de t^k cuando $t \to -\infty$ **no existirá** (pues los valores de la potencia serán imaginarios), con lo cual la "función potencial" $y = [f(x)]^{1/2}$ podría tener un dominio demasiado complicado. Pero muchas veces, cuando queramos calcular el "límite ordinario" de la "función potencial" $y = [f(x)]^{1/2}$ con $x \to a$, puede ocurrir que los valores positivos de $f(x)$ estén solamente en uno de los lados del punto $x = a$ y los valores negativos de $f(x)$ estén solamente al otro lado del mismo punto, con lo cual dicha "función potencial" tendrá su dominio solamente en el lado donde $f(x)$ sea positiva y desaparece el problema (pues la "función potencial" tendrá solamente el "límite lateral" correspondiente a ese lado, el cual será $+\infty$, no teniendo sentido el otro "límite lateral" y así el "límite ordinario" existirá y será $+\infty$.

---

2) El límite de una función exponencial $k^{f(x)}$ (k **positivo** diferente de 1) se reduce normalmente a estudiar el límite de la función que aparece en su exponente. Luego se usa el cambio de variable $f(x) = t$ y se calcula el límite de la exponencial k^t cuando t tienda al límite de $f(x)$ (si es un número real, es $+\infty$ o es $-\infty$). Ver más abajo estos límites, que están también en la Sección 2.5.

   Ahora bien, si el límite de $f(x)$ no existiese, el de la exponencial tampoco existirá.

   Y si el límite de $f(x)$ fuese $\pm\infty$, tampoco existirá el límite de la exponencial, pues el comportamiento de k^t es radicalmente diferente según t tienda a $+\infty$ o t tienda a $-\infty$: En efecto, si fuese $k > 1$, la exponencial k^t tenderá a $+\infty$ en el primer caso y tenderá a cero en el segundo caso, y si fuese $0 < k < 1$, la exponencial k^t tenderá a cero en el primer caso y tenderá a $+\infty$ en el segundo caso.

---

3) Finalmente, para calcular límites de funciones que sean potenciales-exponenciales, se usa la identidad:

$$[f(x)]^{g(x)} \equiv e^{\,g(x)\cdot ln[f(x)]} \text{ , siendo } f(x) > 0 \qquad (*)$$

   con lo cual basta saber el límite de "la exponencial" de base e del lado derecho de la identidad. Pero entonces, como dijimos anteriormente, el cálculo se reduce a determinar el límite del exponente del número e (como número real, como $+\infty$ o como $-\infty$).

   Por tanto, las posibilidades finales se reducen a los tres casos siguientes:

   a) Si el límite de $g(x) \cdot ln[f(x)]$ es un número L, el límite de la potencial-exponencial será e^L.

   b) Si el límite de $g(x) \cdot ln[f(x)]$ es $+\infty$, el límite de la potencial-exponencial será $+\infty$.

   c) Si el límite de $g(x) \cdot ln[f(x)]$ es $-\infty$, el límite de la potencial-exponencial será 0 .

Nota: Si el límite de $g(x) \cdot ln[f(x)]$ fuese $\pm\infty$, el resultado para el límite de $[f(x)]^{g(x)}$ será "no existe", como dijimos en la página anterior para las "funciones exponenciales". Y si el límite de $g(x) \cdot ln[f(x)]$ no existiese, tampoco existirá el límite de la potencial-exponencial dada.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{4x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\,2x\cdot ln\left(\frac{x+2}{4x}\right)} = e^{\,2\cdot ln\left(\frac{3}{4}\right)} = e^{\,ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ (este caso es muy simple y podía verse directamente, porque la base dada tiende a $3/4$ y el exponente dado tiende a 2).

Ejemplo 2: Pero menos simple es $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\,x\cdot ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)}$, donde hemos aplicado la identidad $(*)$ de la página anterior, lo cual puede hacerse porque la base dada es positiva (desde que tomemos $x > 1/3$). Además, vemos que esa base tiende a cero (lo cual resulta del Teorema de la pág. 16, teniendo en cuenta que el numerador tiene menor grado que el denominador).

Por tanto, tenemos: $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} ln\, t = -\infty$ (usando cambio de variable), con lo cual $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot ln\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)\right] = -\infty$ (por apartado b) del Teorema 3 del Álgebra de límites).

En conclusión, el resultado final del límite de la potencial-exponencial es cero (posibilidad c) anterior): O sea, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x^2+5}\right)^x = 0$.

Indeterminaciones en forma de potencia

Trabajando del modo explicado anteriormente, se llega a la conclusión de que hay tres tipos de “límites indeterminados” en forma de potencia, que son en forma simbólica:

a) 1^∞ , b) $(+\infty)^0$ y c) 0^0

los cuales corresponden a las tres situaciones siguientes:

a) La base es función que tiende a 1 y el exponente es función que tiende a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$.
b) La base es función que tiende a $+\infty$ y el exponente es función que tiende a 0 (siendo positiva o negativa).
c) La base es función que tiende a 0 (siendo positiva) y el exponente es función que tiende también a 0 (siendo positiva o negativa).

Estos “límites indeterminados” se resuelven aplicando la identidad $(*)$ mencionada en la página anterior (en todos los casos la base terminará siendo positiva al acercarse a su límite) y luego calculando el límite de $g(x)\cdot ln[f(x)]$ (que también será “indeterminado” del tipo $0\cdot\infty$ o bien del tipo $\infty\cdot 0$). Y para ello, después de convertir este “producto indeterminado” en “cociente indeterminado” como dijimos en la Pág. 13, se suele terminar aplicando la Regla de L’Hôpital (Sección 3.3) o la “sustitución de infinitésimos equivalentes” (Sección 3.4). Sin embargo, hay algunos casos sencillos que podremos ver a continuación.

Ejemplos sencillos de límites indeterminados en forma de potencia:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{\frac{3}{ln\,x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}(e)^{\frac{3}{ln\,x}\cdot ln\,x} = e^3$ (caso del tipo $(+\infty)^0$, donde se ha utilizado la identidad $(*)$ y luego se simplifica el exponente).

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{-2}{ln\,x+5}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(e)^{\frac{-2}{ln\,x+5}\cdot ln\,x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(e)^{\frac{-2\,ln\,x}{ln\,x+5}} = \lim\limits_{t\to-\infty}(e)^{\frac{-2t}{t+5}} = e^{-2}$ (caso del tipo 0^0, donde se ha utilizado la identidad $(*)$, luego se hizo el cambio de variable $ln\,x = t$ y se aplicó finalmente, en el exponente de e, el Teorema sobre límites de funciones racionales de la pág. 16).

NOTA IMPORTANTE: En los límites indeterminados del tipo 1^∞ (y solamente en ellos), cuando vayamos a calcular el límite de $g(x)\cdot ln[f(x)]$, resultado de usar la identidad $(*)$, puede hacerse la sustitución de $ln[f(x)]$ por $[f(x)-1]$ (se explica en la Sección 3.4 que esto no altera dicho límite, pues estas dos últimas funciones son "infinitésimos equivalentes" cuando $f(x)$ tiende a 1).

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x+1}{10-x}\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\,(e)^{\frac{1}{x-3}\cdot ln\left(\frac{2x+1}{10-x}\right)} = \lim_{x\to 3}\,(e)^{\frac{1}{x-3}\cdot\left(\frac{2x+1}{10-x}-1\right)} = \lim_{x\to 3}\,(e)^{\left(\frac{1}{x-3}\cdot\frac{3x-9}{10-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\,(e)^{\frac{3\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(10-x)}} = \lim_{x\to 3}\,(e)^{\frac{3}{10-x}} = e^{\frac{3}{7}}$$

caso del tipo 1^∞, donde se aplicó la sustitución de $ln\left(\frac{2x+1}{10-x}\right)$ que tiende a cero (infinitésimo) por $\left(\frac{2x+1}{10-x}-1\right)$ que también tiende a cero (otro infinitésimo), que por lo dicho antes es equivalente al anterior; finalmente se simplificó el factor $(x-3)$ que aparece en numerador y denominador del exponente, por ser distinto de cero.

Continuidad

La función $f(x)$ se llama "continua en el punto $x=a$", cuando se cumpla la condición:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Nota 1: De la definición anterior se deduce que si $f(x)$ es continua en $x=a$, el punto a pertenecerá al dominio de f, ya que se habla del valor $f(a)$.

Nota 2: Si $x=a$ fuese un punto del dominio de la función f que no tenga otros puntos de dicho dominio arbitrariamente cerca por su derecha ni por su izquierda, no tendrá sentido el límite ordinario de la función cuando x tiende al punto a. En ese caso el punto $x=a$ se llama "punto aislado del dominio" y la función se considera continua en dicho punto, sin más requisitos. (Habíamos supuesto inicialmente en esta Sección que las funciones que manejaríamos estarían siempre definidas en intervalos o uniones de intervalos sin puntos comunes; pero uno de esos intervalos podría ser $[a\,,a]=\{a\}$ y los otros intervalos podrían quedar separados de este, con lo cual el punto $x=a$ sería un "punto aislado" de ese dominio).

Ejemplo: La función $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ tiene como dominio el conjunto solución de la inecuación racional $\frac{x^2}{x-1}\geq 0$, que es $\{0\}\cup(1\,,+\infty)$. (Ver Sección 1.3). Vemos que en este caso el dominio tiene un "punto aislado" que es cero, luego esta función es automáticamente continua en dicho punto.

Se dice que una función f es "continua en un conjunto A de números reales" cuando lo sea en cada punto de dicho conjunto. Así, "continua en el dominio de f" significa continua en cada punto de dicho dominio.

La función $f(x)$ se llama "continua por la derecha en el punto $x=a$", cuando se cumpla la condición $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$. Análogamente, $f(x)$ se llama "continua por la izquierda en el punto $x=a$", cuando se cumpla $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}$.

NOTA IMPORTANTE: Si un punto $x=a$ está en el dominio de una función, siendo "punto interior" de alguno de los intervalos que lo forman, la "continuidad de la función en $x=a$" equivale a la "continuidad por la derecha" y también la "continuidad por la izquierda" de la función en ese punto. En cambio, si el punto $x=a$ está en el dominio pero es "extremo izquierdo" de uno de los intervalos que lo forman (intervalo que no se reduzca a un solo punto), la "continuidad en el punto $x=a$" equivale solamente a la "continuidad por la derecha en dicho punto" (porque el "límite ordinario" en este caso se reduce al "límite lateral" por la derecha). Y si el punto $x=a$ está en el dominio de la función pero es "extremo derecho" de uno de los intervalos que lo forman (que no se reduzca a un solo punto), la "continuidad en el punto $x=a$" equivale solamente a la "continuidad por la izquierda en dicho punto" (porque el "límite ordinario" en este caso se reduce al "límite lateral" por la izquierda).

Ejemplo: La función $f(x) = arc\ sen\, x$ tiene dominio $[-1\,,1]$ y, por ser "función básica", su "límite ordinario" en $x=-1$ será el valor $arc\ sen\,(-1) = -\pi/2$ (ver Teorema dado en la pág. 8), pero ese "límite ordinario" se reduce al "límite lateral" por la derecha en $x=-1$ (ya que a su izquierda no hay dominio de la función). Y de modo análogo, esta misma función tiene "límite ordinario" en $x=1$, que será el valor $arc\ sen\,(1) = \pi/2$, reduciéndose ese "límite ordinario" al "límite lateral" por la izquierda en el mismo punto (pues no hay dominio de la función a su derecha).

Continuidad en intervalos: Tiene ciertas especificidades, no aplicándose exactamente lo dicho al final de la página anterior.

1) Se dice que "$f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a\,,b]$" si f es "continua" en todos los "puntos interiores" de ese intervalo y además es "continua por la derecha en $x=a$" y es "continua por la izquierda en $x=b$" (no importando qué ocurra a la izquierda de a ni lo que ocurra a la derecha de b, con lo cual podría suceder que f no sea "continua" en uno de esos puntos o en ambos).

   Ejemplo: La función "definida a trozos" como

   $$f(x) = e^x \text{ si } x \in (-\infty\,,0)\ \ ;\ \ f(x) = x^2 \text{ si } x \in [0\,,1]\ \ ;\ \ f(x) = -2 \text{ si } x \in (1\,,3)$$

   tiene dominio $(-\infty\,,3)$ y es "continua en el intervalo $[0\,,1]$", pero no es continua en $x=0$ ni es continua en $x=1$. En efecto:

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^0 = 1\ \ ;\ \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^2 = 0\ \ ;\ \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 = 1\ ;\ \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$$

   con lo cual vemos que los "límites laterales" en $x=0$ son diferentes (luego no existe el "límite ordinario" en ese punto y entonces f no es continua en el mismo), pero el "límite por la derecha" en $x=0$ coincide con $f(0)$ (luego f es "continua por la derecha" en ese punto). Y también vemos que los "límites laterales" en el punto $x=1$ son diferentes (con lo cual no existe el "límite ordinario" en ese punto y entonces f no es continua en el mismo), pero el "límite por la izquierda" en $x = 1$ coincide con $f(1)$ (con lo cual f es "continua por la izquierda" en ese punto). Además, f es continua en todos los puntos interiores del intervalo $[0\,,1]$ (porque la "función básica" x^2 es continua en todo $\mathbb{R}$, con lo cual lo será en todos esos puntos). En conclusión, podemos decir "f es continua en el intervalo $[0\,,1]$".

---

2) De manera análoga, se dice que "$f(x)$ es continua en un intervalo $[a\,,b)$ o en un intervalo $[a\,,+\infty)$" si f es "continua" en todos los "puntos interiores" de esos intervalos y además es "continua por la derecha en $x = a$". De igual modo, "continua en un intervalo $(a\,,b]$ o en un intervalo $(-\infty\,,b]$" significa que la función es "continua" en todos los "puntos interiores" de esos intervalos y además es "continua por la izquierda en $x = b$".

3) Finalmente, "continua en un intervalo $(a\,,b)$, en un intervalo $(a\,,+\infty)$, en un intervalo $(-\infty\,,b)$ o en el intervalo $(-\infty\,,+\infty)$" significa que la función es "continua" en todos los puntos del intervalo correspondiente.

Otro ejemplo: La función "definida a trozos" así: $f(x) = 2^x$ si $x < 0$; $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, es continua en el intervalo $[0\,,+\infty)$, pues es continua en todos sus puntos interiores y además es "continua por la derecha" en el extremo $x = 0$ (continuidad de la "función básica" $\sqrt{x}$). Sin embargo, esta función no es continua en el punto $x = 0$ pues los "límites laterales" en ese punto son diferentes (el de la izquierda es $2^0 = 1$ y el de la derecha es $\sqrt{0} = 0$).

Tres teoremas importantes sobre continuidad

TEOREMA 1: Todas las "funciones básicas" son continuas en sus respectivos dominios.

(Esto es otro modo de decir lo establecido en el Teorema de la pág. 8).

TEOREMA 2 (Álgebra de funciones continuas): Si f y g son continuas en un mismo punto a, las funciones $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$ también serán continuas en ese punto. Además, la función f/g será continua en a, si se cumple $g(a) \neq 0$. Y la función g/f será continua en a, si se cumple $f(a) \neq 0$.

(Es una consecuencia de las operaciones entre funciones y del Teorema 1 de la pág. 11).

TEOREMA 3: Si $f(x)$ es continua en el punto a y $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$, la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ es continua en el punto a .

Ejemplo: La función $f(x) = arc\ sen\ x$ es continua en $x = 1/2$ (por ser "función básica" de dominio el intervalo $[-1\,,1]$) y además tenemos $f(1/2) = arc\ sen\ (1/2) = \pi/6$. Por otro lado, la función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ es continua en $x = \pi/6$ (por ser también "función básica" de dominio el intervalo $[0\,,+\infty)$). Por lo tanto, la función compuesta

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(arc\ sen\ x) = \sqrt[4]{arc\ sen\ x}$$

será continua en el punto $x = 1/2$.

Uno de los teoremas más útiles sobre continuidad, que generaliza lo establecido en el Teorema 1 anterior, es el siguiente:

TEOREMA 4: Todas las "funciones elementales" son continuas en sus respectivos dominios.

Recordamos que las "funciones elementales" (las más usadas) se caracterizan por estar definidas explícitamente por una sola ecuación, la cual resulta de operar con "funciones básicas" (las más sencillas de todas). Las operaciones entre funciones a que nos referimos son todas las posibles: sumar, restar, multiplicar, dividir y componer. Por tanto, este Teorema 4 es una consecuencia de los Teoremas 1, 2 y 3 anteriores.

El Teorema 4 tiene enorme importancia práctica: Basta que sepamos obtener el dominio de una "función elemental" para que conozcamos, sin necesidad de calcularlos, todos los límites de dicha función cuando $x \to a$, siendo a cualquier punto de dicho dominio (salvo que sea un "punto aislado", en cuyo caso el límite en dicho punto no tendrá sentido).

Ejemplo: El dominio de la "función elemental" $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x+2)\cdot(x-3)}}$ es el "conjunto solución" de la "inecuación racional" $\frac{(x-1)^2}{(x+2)\cdot(x-3)} \geq 0$, que es $(-\infty\,,-2) \cup \{1\} \cup (3\,,+\infty)$. Vemos que no tiene sentido $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pues $x = 1$ es "punto aislado" del dominio, pero la función f es "continua" en dicho punto, sin más requisitos (recuérdese lo dicho en la Nota 2 de la pág. 20). En cambio, tiene perfecto sentido el "límite ordinario" de esta función cuando $x \to a$, siendo a cualquier punto del intervalo $(-\infty\,,-2)$ o cualquier punto del intervalo $(3\,,+\infty)$. Y el valor de dicho límite será siempre el valor $f(a)$ de la función en el punto a que consideremos, por ser f "continua en a" (en virtud del Teorema 4). Por ejemplo, el límite de f en el punto $x = -3$ será $f(-3) = \sqrt{\frac{(-4)^2}{(-1)\cdot(-6)}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (no hace falta calcular este límite sino obtener el valor de la función en -3), y el límite de f en el punto $x = 5$ será $f(5) = \sqrt{\frac{4^2}{7\cdot 2}} = \sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$ (tampoco hace falta calcular este límite sino obtener el valor de la función en 5).

Otros ejemplos:

1) La función $y = 3x^3 - 5x + \pi$ (polinomio de grado 3) es "elemental", cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Por tanto, puede decirse inmediatamente que $\boxed{\lim\limits_{x\to a}(3x^3 - 5x + \pi) = 3a^3 - 5a + \pi}$, siendo a cualquier número real.

2) La función $y = \sqrt{\ln x}$ es "elemental", cuyo dominio es $[1, +\infty)$. Por tanto, puede decirse inmediatamente que $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln a}}$, para cualquier número real a mayor o igual que 1 (en el caso del número 1 el "límite ordinario" se reduce al "límite lateral" por la derecha).

Consecuencia de lo anterior es que si las funciones que intervienen como base y como exponente de una potencial-exponencial $f(x)^{g(x)}$ son "elementales", podemos decir que esta función es continua para **todos** los x donde exista $g(x)$ y a la vez se cumpla $f(x) > 0$.

En efecto, para dichos valores de x podemos aplicar la identidad $(*)$ de la pág 18:

$$[f(x)]^{g(x)} \equiv e^{\,g(x)\cdot ln[f(x)]}$$

con lo cual la función resulta de hacer operaciones con "funciones elementales" (compuesta de $f(x)$ con $ln\,x$, que nos da $ln[f(x)]$; luego producto de ésta por $g(x)$, y otra vez compuesta de dicho producto con e^x, que nos da el segundo miembro de la identidad). Y operaciones con "funciones elementales" dan siempre nuevas "funciones elementales" (salvo que resulten vacíos los dominios de los resultados de algunas de esas las operaciones, con lo cual estas no existirán).

Por tanto, la función $[f(x)]^{g(x)}$ será siempre "función elemental" si lo son su base y su exponente, de modo que **será continua en todo su dominio** (por el Teorema 4), el cual estará formado en general por los puntos donde exista g (dominio de esta función) y a la vez donde f exista y tenga valores positivos, para que exista su logaritmo neperiano. El dominio de $g(x)$ tendrá intersección no vacía con el dominio de $ln[f(x)]$, porque suponemos $f(x)$ positiva en los mismos puntos, con lo cual existirá el producto del exponente; además la compuesta de dicho producto con e^x siempre existirá porque el dominio de e^x es todo $\mathbb{R}$. Por tanto, si representamos por D_g al dominio de g y representamos por D_f^+ a la parte del dominio de f donde esta función tenga valores positivos, el dominio de la "potencial-exponencial" $f(x)^{g(x)}$ podrá representarse por $\boxed{D_g \cap D_f^+}$ (supuesto no vacío).

En cambio, si la función fuese solamente "potencial" o solamente "exponencial" no hay que usar la identidad $(*)$, pues el cálculo del dominio se hace directamente (ver las dos Notas que siguen).

Nota 1: En el caso de una "función potencial" $[f(x)]^k$ (con k real cualquiera distinto de 1 y de 0), siendo f "elemental", la misma será continua en todo su dominio, **el cual debe calcularse directamente sin usar la identidad $(*)$**. En efecto, hay casos particulares en que el dominio de $[f(x)]^k$ es todo el dominio de la función f, **porque la potencia existe aunque la base sea negativa o cero**. Así esto último ocurre si k es un número entero positivo o si es un número fraccionario positivo de denominador impar (en su fracción irreducible). En cambio, si k es irracional o es fraccionario con denominador par en su fracción irreducible, se tiene que exigir que los valores de f sean positivos para la existencia de la potencia como número real. (Ver pág. 17).

Ejemplos: 1) La función $[ln\,x]^3$ tiene dominio $(0\,,+\infty)$, que es todo el dominio del logaritmo, en vez de ser $(1\,,+\infty)$ que es la parte donde el logaritmo es positivo, luego será continua en $(0\,,+\infty)$. 2) La función $(2x-3)^{\frac{1}{3}}$ tiene dominio todo $\mathbb{R}$ y no el intervalo $(3/2\,,+\infty)$ donde la base es positiva, luego será continua en todo $\mathbb{R}$. 3) Pero la función $(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ no tiene dominio $\mathbb{R}$ (que es el dominio de x^2-1), sino tiene como dominio la unión $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,+\infty)$, donde se cumple la inecuación $x^2-1>0$, o sea donde $f(x)$ es positiva), luego será continua en esa unión de intervalos.

Nota 2: En el caso de una "función exponencial" $k^{\,g(x)}$ (con k positivo diferente de 1), siendo g "elemental", la misma será continua en todo su dominio, el cual coincidirá con el dominio de g

(tampoco se utiliza en este caso la identidad $(*)$, ya que la función f de la base es la función constante positiva k de dominio $\mathbb{R}$ y entonces ese es el conjunto D_f^+, con lo cual la intersección mencionada en la página anterior será $D_g \cap \mathbb{R} = D_g$).

Teoremas importantes sobre funciones continuas en intervalos

Para terminar esta Sección, daremos **tres teoremas muy famosos** sobre funciones continuas en intervalos, de gran importancia teórica y práctica:

TEOREMA DE BOLZANO: Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a\,,b]$ y además toma valores de signos contrarios en los extremos de dicho intervalo, existe al menos un punto $x = c$ en el intervalo $(a\,,b)$ donde la función f se anula, o sea $\boxed{f(c) = 0}$.

Puede ser $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ o bien $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Además, puede haber varios puntos intermedios del intervalo $[a\,,b]$ donde la función valga cero, pero el Teorema asegura que habrá **al menos uno**, con seguridad.

Nota 1: Este Teorema es muy útil en la búsqueda de alguna de las posibles soluciones de una ecuación de la forma $\boxed{f(x) = 0}$. Pues si $f(x)$ es continua en un cierto intervalo cerrado donde se cumpla el cambio de signo en sus extremos, sabemos que existe al menos una solución de esa ecuación en el interior de dicho intervalo. Además, por subdivisiones sucesivas de ese intervalo se obtienen "aproximaciones por defecto" y "aproximaciones por exceso", cada vez mejores, de esa solución. (Ver al respecto el Método de Bisección en la Sección 4.4).

Nota 2: Bernard Bolzano fue un matemático checo que vivió entre los siglos XVIII y XIX.

Ejemplo: La ecuación $\boxed{\cos x = x}$ es equivalente a $\boxed{x - \cos x = 0}$, que es de la forma $\boxed{f(x) = 0}$, siendo la función $f(x) = x - \cos x$, continua en todo $\mathbb{R}$ (por ser "elemental" de dominio $\mathbb{R}$). Además, observamos que en el intervalo $[0\,,\ \pi/2]$, donde la función es continua, se tiene $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ y se tiene $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2 > 0$. Por tanto, el Teorema de Bolzano nos asegura que la ecuación dada inicialmente tiene al menos una solución c comprendida entre 0 y $\pi/2$. Para hallar algún valor numérico aproximado de esa solución c, habría que aplicar el mencionado Método de Bisección a este caso (con dicho método se pueden lograr tantas cifras decimales exactas de la solución c como queramos).

Si dibujamos las gráficas de las funciones básicas $y = \cos x$ e $y = x$, vemos que se cortan **una sola vez** en un punto P del plano cuya abscisa es el valor c intermedio entre 0 y $\pi/2$ mencionado anteriormente, con lo cual vemos gráficamente que **esa será la única solución** de la ecuación $\cos x = x$ dada. (En efecto, los posibles puntos de corte de dos gráficas se obtienen analíticamente resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas definido por las ecuaciones de dichas gráficas, que en este caso son $y = \cos x$ e $y = x$; lo cual conduce en este caso, por el método de igualación, a resolver la ecuación $\cos x = x$ dada inicialmente, que nos dará los valores de x de esos puntos de corte).

Observación importante sobre el Teorema de Bolzano: Las condiciones de continuidad en $[a\ ,b]$ y de signos diferentes en los extremos del intervalo **no son necesarias** para la existencia de algún punto c en $(a\ ,b)$ donde la función se anule, pues hay ejemplos donde falla una de esas condiciones o incluso ambas y sin embargo existen uno o varios puntos interiores del intervalo donde la función vale cero. Por tanto, **ambas condiciones de la hipótesis del teorema solamente son "condiciones suficientes"** (las cuales **nos garantizan** el cumplimiento con seguridad de la tesis del mismo). (Ver al respecto la Sección 10.2).

Ejemplo 1: La función $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 3)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, luego lo será en el intervalo $[0\ ,4]$, pero no cambia de signo en sus extremos pues $f(0) = 3$ y $f(4) = 3$. Y sin embargo, la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ tiene dos soluciones interiores al intervalo $[0\ ,4]$: $\boxed{c_1 = 1}$ y $\boxed{c_2 = 3}$.

Ejemplo 2: Sea la función "definida a trozos" en todo $\mathbb{R}$ así: $f(x) = x^2$, si $x \in (-\infty\ ,-\pi/2)$; $f(x) = sen\, x$, si $x \in [-\pi/2, 3\pi/2]$; $f(x) = x$, si $x \in (3\pi/2\ ,+\infty)$. Pues bien, esta función no es continua en el intervalo $[-2\ ,5]$, pues en dicho intervalo están los puntos $-\pi/2 \cong -1'57$ y $3\pi/2 \cong 4'71$ donde la función dada no es continua al tener "límites laterales" diferentes (ver Nota a continuación), y sin embargo la función se anula en dos puntos interiores del intervalo $[-2\ ,5]$: $\boxed{c_1 = 0}$, pues $f(0) = sen\ 0 = 0$, y también $\boxed{c_2 = \pi}$, pues $f(\pi) = sen\, \pi = 0$.

Nota: En el punto $-\pi/2$ se tiene

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^-} x^2 = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}\ ;\ \lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} sen\, x = sen(-\pi/2) = \boxed{-1}$$

luego $f(x)$ no tiene "límite ordinario" en el punto $x = -\pi/2$.

Y en el punto $3\pi/2$ se tiene

$$\lim_{x\to(3\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(3\pi/2)^-} sen\, x = sen\ (3\pi/2) = \boxed{-1}\ ;\ \lim_{x\to(3\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x\to(3\pi/2)^+} x = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

luego $f(x)$ no tiene "límite ordinario" en el punto $x = 3\pi/2$.

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS: Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a\ ,b]$, dicha función alcanza en ese intervalo todos los valores reales intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$, supuestos diferentes. Es decir, que si m es un valor real cualquiera que cumpla $f(a) < m < f(b)$ o bien $f(b) < m < f(a)$, existe al menos un punto $x = c$ en el interior del intervalo $[a\ ,b]$ que cumple $\boxed{f(c) = m}$.

Es una consecuencia del Teorema de Bolzano.

Este otro Teorema también suele expresarse para un intervalo cualquiera *I* (no necesariamente cerrado ni acotado) diciendo que "si una función es continua en *I*, entre dos cualesquiera de sus valores alcanza todos los intermedios" (resultado más general que el anterior pero basado en el mismo). Pues si dos de sus valores diferentes en *I* son $f(a)$ y $f(b)$, considerando la restricción de f al intervalo $[a\ ,b]$ (si es $a < b$) o al intervalo $[b\ ,a]$ (si es $b < a$) y aplicándole a esa restricción el Teorema anterior, resultará que f alcanzará en ese intervalo $[a\,,b]$ o $[b\,,a]$ (contenido en I) todos los valores intermedios entre los dos dados.

Y lo anterior implica otro resultado muy importante: "La imagen de un intervalo *I*, producida por una función continua en dicho intervalo, es siempre **otro intervalo**", pues los intervalos son los únicos conjuntos de números reales que incluyen todos los valores intermedios entre dos cualesquiera de ellos.

Nota: Lo anterior incluye todo tipo de intervalos. Así, para la función $y = x^2$ continua en $\mathbb{R}$, la imagen del intervalo $[-3\,,1]$ es el intervalo $[0\,,9]$, también la imagen de $(-\infty\,,+\infty)$ es $[0\,,+\infty)$ y también la imagen de $(-4\,,-2]$ es $[4\,,16)$. De igual modo, para la función $y = 2^x$ continua en $\mathbb{R}$, la imagen de $(-\infty\,,0]$ es $(0\,,1]$ y también la imagen de $[0\,,3)$ es $[1\,,8)$. Y para la función $y = tag\ x$ continua en $(-\pi/2\,,\pi/2)$, la imagen de ese intervalo es $(-\infty\,,+\infty)$ y también la imagen del intervalo $[\pi/6\,,\pi/3]$ es $\left[1/\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\right]$. (Ver lo dicho anteriormente sobre las gráficas de las "funciones básicas" $y = x^2$, $y = 2^x$ e $y = tan\,x$ que aparecen en la Sección 2.2).

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a\,,b]$, hay algún punto x_1 del intervalo donde la función tomará su valor más pequeño m y hay algún punto x_2 del intervalo donde la función tomará su valor más grande M.

O sea, existen x_1 y x_2 en $[a\,,b]$ (no necesariamente únicos) que cumplen la relación

$$\boxed{m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M}$$

para todo x del intervalo $[a\,,b]$.

Nota 1: Habíamos dicho anteriormente que "la imagen de un intervalo I producida por una función continua en dicho intervalo, es siempre otro intervalo". Pues bien, de este último Teorema se deduce que "si I es un intervalo cerrado y acotado, $f(I)$ también será un intervalo cerrado y acotado", pues siendo $I = [a\,,b]$ se tendrá $f(I) = [m\,,M]$. Así, en los ejemplos de la nota anterior, la imagen por $y = x^2$ de $[-3\,,1]$ es $[0\,,9]$ y la imagen por $y = tan\,x$ de $[\pi/6\,,\pi/3]$ es $\left[1/\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\right]$.

Nota 2: Pero pudiese ocurrir que no siendo I cerrado o no siendo acotado y siendo $f(x)$ continua en I, sin embargo $f(I)$ sea cerrado y acotado. Por ejemplo, la función $f(x) = sen\ x$ es continua en el intervalo $I = \left(\frac{\pi}{6}\,,+\infty\right)$ que no es cerrado ni es acotado y la imagen por f de dicho intervalo es el intervalo $[-1\,,1]$ que es cerrado y acotado (en este caso, los valores $m = -1$ y $M = 1$ se alcanzan en infinitos puntos de I, por la periodicidad de la función seno; o sea, hay infinitos x_1 donde se alcanza el valor m e infinitos x_2 donde se alcanza el valor M).

Nota 3: En el caso de que la función $f(x)$ sea constante sobre el intervalo $[a\,,b]$, los valores m y M coincidirán (con lo cual, tanto x_1 como x_2 serán cualquier punto del intervalo).

Nota 4: Karl Weierstrass fue un famoso matemático alemán del siglo XIX.

La definición ε, δ del concepto de límite finito

(Este apartado ha sido agregado solamente para los que lo necesiten).

La definición matemática rigurosa de que "el número real L es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende al punto a" (escrito como sabemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$), es la siguiente:

"Para todo real positivo ε dado, existe algún número real positivo δ, de forma que si x es un valor perteneciente al dominio de f que cumpla $0 < |x - a| < \delta$, se cumplirá $|f(x) - L| < \varepsilon$".

O en versión formalizada:

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists \delta > 0 : (x \in \text{Dom}\,(f) \text{ y } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

la cual se ve con frecuencia en los textos de Matemáticas, sin distinguir si el lector es estudiante de un Grado en Matemáticas o es un estudiante de otro grado universitario que requiera solamente cierta formación matemática como base para sus estudios.

Como el autor de los contenidos de esta página web explicó en sus objetivos iniciales, los mismos están orientados a este último grupo de alumnos universitarios (los que requieren solamente cierta formación matemática básica). Por tanto, ha desechado en esta Sección utilizar desde un comienzo las definiciones matemáticas formales de los distintos tipos de límites (ahora hemos dado solamente una, correspondiente al "límite finito en un punto", pero hay también definiciones rigurosas para todos los demás tipos de límites), estando seguro de que todo lo tratado se puede entender más fácilmente de este modo, a pesar de la dificultad intrínseca del tema.

Nota: La condición $0 < |x - a| < \delta$ implica que sea $x \neq a$ (desigualdad del lado izquierdo), pero a la vez que $-\delta < x - a < \delta$, o sea, $a - \delta < x < a + \delta$ (desigualdad del lado derecho), lo cual significa que x esté en el intervalo $(a - \delta \,, a + \delta)$. Por tanto, **para que pueda aplicarse esta definición es esencial que existan puntos del dominio de f tan cerca de $x = a$ como se quiera sin coincidir con ese valor** (porque δ puede resultar arbitrariamente pequeño al depender de ε, puesto que este valor podrá tomarse tan pequeño como se desee).

Ejemplo: Comprobar que $\lim_{x \to 2} (x^2 - 9) = -5$, utilizando la definición $\varepsilon \,, \delta$.

Dado un ε positivo cualquiera, habrá que llegar a

$$|f(x) - L| = |(x^2 - 9) - (-5)| = |x^2 - 4| < \varepsilon$$

cuando tomemos $|x - 2|$ menor que un cierto δ positivo (dependiente de ε) sin que sea $x = 2$ (en este caso el dominio de la función $f(x) = x^2 - 9$ es todo $\mathbb{R}$, luego podemos despreocuparnos del mismo).

Pero $|x^2 - 4| = |(x - 2) \cdot (x + 2)| = |x + 2| \cdot |x - 2|$ y si tomamos inicialmente $\delta = 1$, deberá ser x mayor que 1 y menor que 3, pues el intervalo $(2 - \delta \,, 2 + \delta)$ será el $(1 \,, 3)$. Por tanto, $x + 2$ será mayor que 3 y menor que 5 (suponemos $x \neq 2$), con lo cual tendrá que ser el valor absoluto de $x + 2$ menor que 5. O sea, ya hemos logrado

$$|x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2| < 5 \cdot |x - 2|$$

Basta finalmente tomar $0 < |x - 2| < \varepsilon/5$ para que resulte $|x^2 - 4| < 5 \cdot |x - 2| < \varepsilon$, como queríamos (lo de $0 < |x - 2|$ es solamente para que sea $x \neq 2$). Es decir, debemos tomar un δ positivo menor o igual a $\varepsilon/5$, además de tomarlo menor o igual a 1 (para que se cumpla también la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$). Por tanto, δ tendrá que ser menor o igual que el mínimo de 1 y $\varepsilon/5$ (obsérvese que si ε se elije muy pequeño ese mínimo será $\varepsilon/5$ y entonces δ tendrá que ser menor todavía que ese ε, con lo cual el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ podrá ser de longitud muy pequeña, viéndose que cuanto menor tomemos ε, menor será esta longitud; por ello **se requiere que haya puntos del dominio de f arbitrariamente cerca de $x = a$ sin coincidir con este valor**, como habíamos dicho en los requisitos del dominio para que tenga sentido este límite (lo cual se cumple en este caso porque el dominio de f es $\mathbb{R}$).

En la definición rigurosa, para que haya puntos x que cumplan todo lo dicho anteriormente, se pone antes de la implicación la condición $x \in \text{Dom}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$.

Conclusión: Para todo ε positivo dado (por pequeño que sea), existe algún δ positivo (basta tomar δ menor que el menor de los dos valores 1 y $\varepsilon/5$), de modo que si es $0 < |x - 2| < \delta$ se cumplirá $|(x^2 - 9) - (-5)| < \varepsilon$.

Luego queda demostrado que $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 9) = -5$.
