

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

(Prerrequisito: Derivadas de funciones de una variable)

Introducción fórmula de Taylor para polinomios

Entre las funciones reales de una variable real, las más sencillas e importantes son las funciones polinómicas, con forma explícita resumida $y = P_n(x)$, donde el segundo miembro es un cierto polinomio de coeficientes reales (el subíndice indica el grado n del polinomio).

Si queremos que esa función polinómica $y = P_n(x)$ tenga una gráfica que pase por un determinado punto del plano (a, b) , podemos escribirla así:

$$y = b + A_1 \cdot (x - a) + A_2 \cdot (x - a)^2 + A_3 \cdot (x - a)^3 + \dots + A_n \cdot (x - a)^n \quad (1)$$

siendo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ciertos números reales (coeficientes que cambiarán de una función polinómica a otra), con $A_n \neq 0$ para que resulte de grado n . Obsérvese que así será siempre $y(a) = b$. Veremos a continuación cómo se determinan esos coeficientes A_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) para cada función polinómica concreta.

Hay infinitas funciones con la forma anterior si el grado es mayor que cero. Pero solamente habrá una si pedimos que el grado sea cero (función constante $y = b$, cuya gráfica es la recta horizontal que pasa por el punto (a, b) del plano). Si el grado es uno, ya habrá infinitas funciones de la forma $y = b + A_1 \cdot (x - a)$, cuyas gráficas son las infinitas rectas oblicuas que pasan por (a, b) , donde $A_1 \neq 0$ representa la pendiente de cada una. Si el grado es dos, habrá una doble infinidad de funciones de la forma $y = b + A_1 \cdot (x - a) + A_2 \cdot (x - a)^2$, cuyas gráficas son las infinitas parábolas verticales que pasan por el punto (a, b) , donde el coeficiente $A_2 \neq 0$ determinará si la parábola es cóncava hacia arriba (cuando sea A_2 positivo) o cóncava hacia abajo (cuando sea A_2 negativo). Y si el grado es mayor que dos, encontramos una múltiple infinidad (triple infinidad, cuádruple infinidad, etc...) de funciones polinómicas con gráficas cada vez más complicadas, pero todas pasando por el punto (a, b) .

Además, se tienen las siguientes propiedades de las funciones dadas en (1):

1) Las derivadas primeras de las infinitas funciones polinómicas mencionadas anteriormente serán polinómicas de grado $n - 1$ y tienen la forma:

$$y' = A_1 + 2A_2 \cdot (x - a) + 3A_3 \cdot (x - a)^2 + 4A_4 \cdot (x - a)^3 + \dots + n A_n \cdot (x - a)^{n-1}$$

cumpliéndose $y'(a) = A_1 = 1! \cdot A_1$.

2) Las derivadas segundas de las mismas funciones serán de grado $n - 2$ con la forma:

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 \cdot (x - a) + 12A_4 \cdot (x - a)^2 + \dots + n(n - 1)A_n \cdot (x - a)^{n-2}$$

cumpliéndose $y''(a) = 2A_2 = 2! \cdot A_2$.

3) Las derivadas terceras de las mismas funciones serán de grado $n - 3$ con la forma:

$$y''' = 6A_3 + 24A_4 \cdot (x - a) + \dots + n(n - 1)(n - 2)A_n \cdot (x - a)^{n-3}$$

cumpliéndose $y'''(a) = 6A_3 = 3! \cdot A_3$.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Etcétera...

Se entiende que, al seguir derivando la función polinómica inicial, resultarán nuevas derivadas polinómicas de grados cada vez más bajos (de unidad en unidad) hasta llegar a la derivada de orden n que será una función constante diferente de cero (polinómica de grado cero), teniéndose:

$$\boxed{y^{(4)}(a) = 4! \cdot A_4} ; \boxed{y^{(5)}(a) = 5! \cdot A_5} ; \boxed{y^{(6)}(a) = 6! \cdot A_6} ; \dots ; \boxed{y^{(n)}(a) = n! \cdot A_n}$$

Estos valores y los tres anteriores nos permiten obtener los coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n en función de los valores de las derivadas en $x = a$ de la función polinómica dada (supuestas conocidas esas derivadas). Con lo cual, la función polinómica inicial (1) se podrá siempre escribir así:

$$y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{y''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!} \cdot (x - a)^3 + \frac{y^{(4)}(a)}{4!} \cdot (x - a)^4 + \frac{y^{(5)}(a)}{5!} \cdot (x - a)^5 + \frac{y^{(6)}(a)}{6!} \cdot (x - a)^6 + \dots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

llamada “**fórmula de Taylor completa para polinomios, relativa a un punto $x = a$ cualquiera**” (al segundo miembro se le llama “**desarrollo completo de Taylor de la función polinómica dada, en el punto a** ”).

En resumen: Toda función polinómica de grado $n > 0$ puede escribirse en la forma señalada anteriormente, siendo a cualquier número real, con tal que se conozcan los valores de dicha función y sus derivadas sucesivas, hasta la de orden n inclusive, en el punto $x = a$.

Ejemplo: Sea la función polinómica $y = 2x^3 - 4x^2 + x - 8$ y sea el punto $a = -3$.

La expresión de esa función según la Fórmula de Taylor anterior, en $a = -3$, se obtiene hallando los valores $y(-3)$, $y'(-3)$, $y''(-3)$ e $y'''(-3)$. (Sólo se consideran estas tres derivadas pues el grado es tres).

Tenemos $y' = 6x^2 - 8x + 1$, $y'' = 12x - 8$ e $y''' = 12$, con lo cual $y(-3) = -101$, $y'(-3) = 79$, $y''(-3) = -44$ e $y'''(-3) = 12$.

Entonces la función dada se escribirá:

$$\boxed{y = -101 + \frac{79}{1!} \cdot (x + 3) - \frac{44}{2!} \cdot (x + 3)^2 + \frac{12}{3!} \cdot (x + 3)^3}$$

que simplificada nos da: $y = -101 + 79 \cdot (x + 3) - 22 \cdot (x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3)^3$.

(Podemos comprobar que esta expresión es correcta, desarrollando $(x + 3)^2$ y $(x + 3)^3$ y efectuando las demás operaciones, con lo cual aparece como resultado final, ordenando según potencias decrecientes de x , la misma expresión dada inicialmente para la función).

Fórmula de Taylor para otras funciones

Tenemos ahora una pregunta lógica: ¿Podrá escribirse cualquier función $f(x)$ de un modo análogo? En primer lugar, se podrán usar los valores de dicha función y de sus derivadas sucesivas en un punto $x = a$ solamente si los mismos existen, para lo cual $x = a$ tendrá que ser “punto interior” del dominio de la función y esta tendrá que ser “derivable sucesivas veces” en dicho punto (al menos, hasta la derivada de un cierto orden n).

Sabemos que las funciones polinómicas son derivables sucesivas veces en cualquier punto, llegando siempre a una derivada constante no nula y luego las demás derivadas sucesivas serán cero (la derivada constante no nula será siempre la n -sima, siendo n el grado del polinomio).

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Pero hay muchas otras funciones que tienen derivadas sucesivas en un punto $x = a$, sin llegar finalmente hasta una de mayor orden ni ser todas nulas a partir de una de ellas, con lo cual **podría quizás** establecerse una fórmula análoga a la del apartado anterior, usando la cantidad de derivadas sucesivas que queramos en el punto $x = a$.

Por ejemplo, son así todas las funciones básicas (tomando el punto $x = a$ en el interior de sus dominios respectivos), salvo la función identidad y las potenciales de exponente entero positivo (porque son polinómicas), salvo las funciones radicales de índice impar cuando a valga cero (porque no son derivables en dicho punto) y salvo la función valor absoluto (porque tampoco es derivable en $a = 0$ y porque en los demás puntos se comporta como x o como $-x$, que son polinómicas).

Pero también hay muchas otras funciones que tienen solamente un número finito n de derivadas sucesivas en algún punto $x = a$ interior de su dominio. Y para esas funciones podríamos obtener **quizás** desarrollos de Taylor análogos en ese punto, pero el orden de esos desarrollos sería siempre menor o igual que n .

Ahora bien, **si una función $f(x)$ no es polinómica, es imposible que coincida con un desarrollo similar el visto en la “fórmula de Taylor de un polinomio relativa a un punto $x = a$ ”** (por muchas derivadas sucesivas que posea la función en dicho punto), **ya que dicho desarrollo será siempre un polinomio de grado menor o igual que n** (siendo n el orden de la última derivada de $f(x)$ que hayamos incluido).

Consecuentemente, **una función $f(x)$ no polinómica** que tenga derivadas sucesivas hasta la de orden n en un punto $x = a$, **se podrá expresar a través de “su polinomio de Taylor de orden n en el punto $x = a$ ”** (análogo al desarrollo establecido para las funciones polinómicas, utilizando los valores $f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots, f^{(n)}(a)$, en vez de las derivadas del polinomio), **siempre que le sumemos a ese desarrollo análogo alguna otra función que será no polinómica** y a la cual podremos llamar “**término complementario de Taylor de orden n en el punto $x = a$ ”** o “**resto de Taylor de orden n en el punto $x = a$ ”**.

O sea, si llamamos $P_n(x - a)$ al “polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto $x = a$ ” y llamamos $R_n(x - a)$ al correspondiente “resto de Taylor de orden n de la función f en $x = a$ ”, tendremos en general:

$$\boxed{f(x) = P_n(x - a) + R_n(x - a)} \quad (2)$$

Y en el caso particular en que $f(x)$ sea polinómica de grado n , $P_n(x - a)$ será “el desarrollo completo de esa función polinómica en el punto a ” que dimos anteriormente en (1) y $R_n(x - a)$ **será en este caso la función cero**.

Pero si el orden m del “polinomio de Taylor” que queramos obtener es menor que el grado de la función polinómica $P_n(x)$, o sea cuando tengamos $m < n$, “el polinomio de Taylor de orden m ” ya no será “el desarrollo **completo** de esa función polinómica en el punto a ” y entonces “el resto de Taylor de orden m ” **no será la función cero** (será en este caso otra función polinómica, pues suma o resta de polinomios es siempre otro polinomio).

Obsérvese, finalmente, que si sustituimos al incremento $x - a$ por una nueva variable h , la expresión general (2) obtenida anteriormente pasa a ser

$$\boxed{f(a + h) = P_n(h) + R_n(h)} \quad (\text{donde } h \text{ es la nueva variable independiente}) \quad (\text{nueva } (2))$$

expresión cuyo segundo miembro queda escrito en forma más sencilla.

Por ejemplo, para $n = 3$ y $a = 5$, si el polinomio $P_3(x - 5)$ fuese $7 - 3(x - 5) - 2(x - 5)^2 + (x - 5)^3$, el polinomio $P_3(h)$ sería $7 - 3h - 2h^2 + h^3$ (de escritura más sencilla).

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Tenemos así el muy importante Teorema siguiente:

TEOREMA DE TAYLOR: Si $f(x)$ es una función que tiene derivadas sucesivas hasta la de orden n inclusive en un entorno de un punto $x = a$ interior de su dominio, siendo además $f^{(n)}(x)$ continua en $x = a$, se tiene:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (3)$$

donde la variable h representa un incremento cualquiera (positivo, negativo o cero) de la variable independiente x , con la única limitación de que $a+h$ pertenezca al dominio de $f(x)$. Y donde la función $o(h^n)$, es “el resto de Taylor de orden n de f en el punto a ”, que es un infinitésimo de orden superior a n cuando $h \rightarrow 0$. Es decir: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

En la expresión (3), el polinomio $P_n(h)$ que aparecía en la nueva (2) de la página anterior está formado por todos los términos del segundo miembro salvo el último y el resto $R_n(h)$ es la función $o(h^n)$ que aparece como último término.

A esta función se le llama “resto de Taylor de orden n de f en el punto a en forma infinitesimal”, porque este “resto de Taylor” admite otras formas (en el último apartado veremos una muy importante que se llama “forma de Lagrange” del resto).

Nota 1: Justamente, la notación $o(h^n)$ significa que este “resto de Taylor de orden n ” es un infinitésimo de orden superior a n cuando $h \rightarrow 0$, cumpliéndose entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$, como dice el Teorema. (Ver Sección 3.4 al respecto).

Nota 2: En muchas ocasiones la continuidad de la derivada n -sima en el punto $x = a$ es consecuencia de la existencia de la derivada siguiente en ese mismo punto. En particular, esto sucede siempre con las funciones que admiten infinitas derivadas sucesivas en el punto considerado, como todas las básicas en los puntos interiores de sus dominios, salvo las radicales de índice impar en $a = 0$ y la función valor absoluto también en $a = 0$ (porque no son derivables en dicho punto).

Nota 3: Brook Taylor fue un matemático inglés de la transición del siglo XVII al siglo XVIII.

Nomenclatura usual:

1) La expresión (3) dada en el Teorema anterior se llama “**fórmula de Taylor de orden n correspondiente a la función $f(x)$ en el punto $x = a$, con resto en forma infinitesimal**”. Y cuando aplicamos esta fórmula a una función concreta en un punto determinado, decimos que estamos obteniendo “el desarrollo de Taylor de orden n para dicha función en ese punto, con resto en forma infinitesimal”.

2) Si es $a = 0$, la anterior fórmula de Taylor se denomina “**fórmula de Maclaurin**”.

Y el polinomio $P_n(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n$ se llama “**polinomio de Maclaurin de orden n correspondiente a la función $f(x)$** ”.

Nota: Colin Maclaurin fue un matemático escocés que vivió entre el siglo XVII y el siglo XVIII (algo más joven que Brook Taylor).

Observaciones importantes:

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1) El grado del polinomio $P_n(h)$ será n solamente si $f^{(n)}(a) \neq 0$. En caso contrario, su grado será menor. Por eso no debe llamarse “polinomio de Taylor de grado n ” sino “polinomio de Taylor de orden n ” (se refiere al orden de la última derivada que interviene en su expresión).

2) El valor del polinomio $P_n(h)$ para $h = 0$ es $f(a)$, que coincide con el valor del primer miembro $f(a + h)$ para el mismo $h = 0$, con lo cual el resto valdrá cero para $h = 0$. Pero además, las derivadas sucesivas de ese polinomio para $h = 0$, hasta la de orden n inclusive, coinciden con las derivadas correspondientes de la función $f(a + h)$, también para $h = 0$.

En efecto, la derivada primera de $P_n(h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \dots$ es $\frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{1!} \cdot h + \frac{f'''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots$, que para $h = 0$ da $\boxed{f'(a)}$. Y la derivada segunda de $P_n(h)$ es $\frac{f''(a)}{1!} + \frac{f'''(a)}{1!} \cdot h + \dots$, que para $h = 0$ da $\boxed{f''(a)}$. Etc... Y las derivadas sucesivas de $f(a + h)$ respecto a la variable h , al ser función compuesta, se obtendrán derivando la función externa (f) y multiplicando siempre por la derivada de $a + h$ que es 1. Por tanto, esas derivadas sucesivas serán $f'(a + h)$, $f''(a + h)$, etc... , que para $h = 0$ nos dan $\boxed{f'(a)}$, $\boxed{f''(a)}$, etc...

3) Lo dicho en el apartado anterior hace que las funciones $f(a + h)$ y $P_n(h)$ sean casi iguales cuando tomamos valores de h muy cerca de cero (valores de h positivos o negativos pero con valores absolutos pequeños; cuanto más pequeños más parecidas), con lo cual las formas que tienen las gráficas de $f(a + h)$ y $P_n(h)$ serán casi coincidentes muy cerca del punto $h = 0$. Ese es el motivo de que el resto $o(h^n)$, que es la diferencia entre $f(a + h)$ y $P_n(h)$, sea una función que tiende a cero rápidamente cuando $h \rightarrow 0$ (y desde que $|h|$ sea menor que 1, tanto más rápidamente cuanto mayor sea n , porque h^n tiende a cero más rápidamente cuando n crece).

4) Por lo tanto, para valores pequeños de $|h|$ puede usarse la siguiente “aproximación de Taylor de orden n de $f(a + h)$ en el punto $x = a$ ”:

$$\boxed{f(a + h) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n} \quad (4)$$

donde el error cometido al usarla es el valor eliminado de $o(h^n)$, desconocido pero que será muy pequeño cuando $|h|$ lo sea (tanto más pequeño cuanto menor sea $|h|$ y, para valores de $|h|$ menores que 1, también tanto más pequeño cuanto mayor sea n).

5) Si $|h|$ es suficientemente pequeño, puede estimarse que dicho error cumple la acotación

$$\boxed{|error| = |o(h^n)| < |h^n| = |h|^n} \quad (5)$$

pues, al ser $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$, ocurrirá que el valor absoluto del numerador será menor que el valor absoluto del denominador, cuando $|h|$ sea suficientemente pequeño.

Pero no se sabe en cada caso particular a partir de qué valores de $|h|$ empieza a ocurrir lo dicho anteriormente (hay una evidente incertidumbre). Por ello se habla de que $|h|^n$ es una “posible” cota superior del error cometido en valor absoluto (la cota es tanto más segura cuanto menor sea el valor absoluto del h utilizado, y, para $|h| < 1$, la cota será más segura también cuanto mayor sea n).

Nota: Para $|h|$ suficientemente pequeño, tendremos $|error| < |h|^n$, con lo cual se cumplirá $-|h|^n < error < |h|^n$ (propiedad del valor absoluto). Y como el error cometido es la diferencia entre el valor exacto de la función, $f(a + h)$, y el valor aproximado obtenido, $P_n(h)$, se podrá escribir $-|h|^n < f(a + h) - P_n(h) < |h|^n$, y sumando $P_n(h)$ a los tres miembros de la doble desigualdad anterior, se tiene la doble acotación siguiente:

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

$$P_n(h) - |h|^n < f(a+h) < P_n(h) + |h|^n \quad (6)$$

O en palabras:

$$\boxed{\text{valor aproximado obtenido} - \text{cota} < \text{valor exacto} < \text{valor aproximado obtenido} + \text{cota}}$$

(lo cual ocurre cuando $|h|$ sea suficientemente pequeño para que la cota sea válida) y si la cota es muy pequeña, la doble acotación anterior nos permitirá tener una idea bastante aproximada de cuál es el valor exacto, pudiendo entonces escribirlo con algunas cifras decimales seguras o exactas. (Ver más adelante apartado e) del ejemplo 1 y apartado a) del ejemplo 2).

6) Las expresiones (3), (4) y (5) aparecen muchas veces en los textos con variable x y no con variable h . Se trata de aplicar a las tres fórmulas el cambio de variable $a+h=x$, con lo cual se tiene $h=x-a$.

Así la fórmula de Taylor (3) se verá escrita así:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o[(x-a)^n]}$$

y de modo similar se escribe la correspondiente fórmula de aproximación (4), que es como la anterior suprimiendo el resto y cambiando el signo $=$ por el signo \approx (aproximado).

Así mismo, la acotación (5) pasa a ser $|\text{error}| < |x-a|^n$, para valores de x suficientemente próximos al punto a ($|x-a|=|h|$, luego si x está cerca de a , será pequeño $|h|$).

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \ln x$. Tenemos $f'(x) = x^{-1}$; $f''(x) = -x^{-2}$; $f'''(x) = 2x^{-3}$; $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, etc... Por tanto, existen derivadas sucesivas de $f(x)$ en todo su dominio $(0, +\infty)$ hasta el orden que queramos, y cada una es continua por existir la siguiente. Por tanto, **podremos hallar el desarrollo de Taylor de cualquier orden para la función $\ln x$ en cualquier punto de su dominio $(0, +\infty)$, con resto en forma infinitesimal.**

Hallemos el desarrollo de orden 3 en el punto $a=1$. Un entorno de este punto, donde existen todas las derivadas de la función, podría ser el intervalo $(0, 2)$.

Tenemos $f(a) = \ln 1 = 0$; $f'(a) = 1^{-1} = 1$; $f''(a) = -1^{-2} = -1$, y $f'''(a) = 2 \cdot 1^{-3} = 2$. Por tanto, el desarrollo de Taylor (3) será:

$$\boxed{\ln(1+h) = 0 + \frac{1}{1!}h + \frac{-1}{2!}h^2 + \frac{2}{3!}h^3 + o(h^3)}$$

siendo el correspondiente polinomio de Taylor de orden 3: $P_3(h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3$. Por tanto, para valores de h suficientemente pequeños en valor absoluto, vale la aproximación (4) que es:

$$\boxed{\ln(1+h) \approx h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3}$$

de modo que una posible cota superior del valor absoluto del error cometido al aplicar la fórmula anterior será $|h|^3$, como nos indica la fórmula (5), para valores de h suficientemente pequeños en valor absoluto.

Calculemos algunos valores usando la aproximación de Taylor anterior:

a) Para obtener un valor aproximado de $\ln 1'3$ mediante la fórmula de aproximación anterior, habrá que tomar $h = 0'3$ y entonces $\ln 1'3 \approx 0'3 - \frac{1}{2}0'3^2 + \frac{1}{3}0'3^3 = 0'264$, cometiendo posiblemente un error en valor absoluto menor que $|0'3|^3 = 0'027$. (El valor exacto de $\ln 1'3$ dado por una calculadora es $0'262364\dots$, con lo cual el valor absoluto del verdadero error cometido es

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

0'0016... y vemos que **es bastante menor** que la posible cota 0'027, a pesar que $|h|$ no es muy pequeño).

b) Para obtener un valor aproximado de $\ln 0'8$ mediante la misma fórmula habrá que tomar $h = -0'2$ y será $\ln 0'8 \approx (-0'2) - \frac{1}{2}(-0'2)^2 + \frac{1}{3}(-0'2)^3 = -0'22266666...$, cometiendo posiblemente un error en valor absoluto menor que $|(-0'2)^3| = 0'008$. (El valor exacto de $\ln 0'8$ dado por una calculadora es $-0'22314355...$, con lo cual el valor absoluto del verdadero error cometido es 0'0004768... y vemos que es menor que la posible cota 0'008).

c) Para obtener un valor aproximado de $\ln 1'01$ se tendrá que usar un valor de h notablemente más pequeño que los anteriores ($h = 0'01$), con lo cual el error cometido será mucho menor que antes. En efecto, se tiene $\ln 1'01 \approx 0'01 - \frac{1}{2}0'01^2 + \frac{1}{3}0'01^3 = 0'0099503333...$, cometiendo posiblemente un error en valor absoluto menor que $0'01^3 = 0'000001$. (El valor exacto del logaritmo neperiano de 1'01 es 0'0099503308..., coincidente hasta la octava cifra decimal con el valor aproximado anterior, de donde concluimos que el valor absoluto del verdadero error cometido es inferior a la posible cota 0'000001).

d) Para obtener un valor aproximado de $\ln 3$ no debe usarse la fórmula de aproximación de Taylor anterior, pues habría que tomar un valor de h demasiado grande ($h = 2$), con lo cual el error cometido podría ser grande (en efecto, la fórmula (5) nos diría que en este caso $|error| < 2^3 = 8$). Y la fórmula (4) nos da: $\ln 3 \approx 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 = 2'66666...$, pero el valor exacto es $\ln 3 = 1'09861...$ (muy diferente). Sin embargo, se sigue cumpliendo la acotación del error cometido, ya que dicho error en valor absoluto vemos que es exactamente 1'5680..., que resulta **ser menor** que $|h|^3 = 8$. Pero esto es muy poco práctico, pues decir que “el valor absoluto del error cometido al calcular $\ln 3$ es menor que 8” nos estará indicando que $\ln 3$ será algún valor comprendido entre el número $2'666 - 8 = -5'334$ y el número $2'667 + 8 = 10'667$: ¡Gran incertidumbre!. (Ver doble acotación (6) dada en la página anterior).

e) En cambio, una buena aproximación de $\ln 3$ resultará usando alguna fórmula de aproximación de Taylor referida al punto $x = e$, ya que la diferencia entre 3 y e es pequeña: $h = 0'2817...$ (como es menor que 1, podríamos utilizar un polinomio de Taylor de orden mayor que 3 para mejorar dicha aproximación, o sea, para disminuir el error cometido). Por ejemplo, tomemos para aproximar $\ln 3$ el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $\ln x$ en el punto $x = e$, que es $P_5(h) = 1 + \frac{1}{e} \cdot h - \frac{1}{2e^2} \cdot h^2 + \frac{1}{3e^3} \cdot h^3 - \frac{1}{4e^4} \cdot h^4 + \frac{1}{5e^5} \cdot h^5$. Con lo cual:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{0'28}{e} - \frac{0'0784}{2e^2} + \frac{0'021952}{3e^3} - \frac{0'00614656}{4e^4} + \frac{0'0017210368}{5e^5}$$

donde hemos tomado $h \cong 0'28$ para facilitar los cálculos (lo cual empeora la aproximación). Y si el valor anterior lo obtenemos tomando la aproximación por defecto 2'71828 del número e (nuevo empeoramiento), se obtiene el valor aproximado 1'09803964..., muy cercano al valor exacto de $\ln 3$ dado por una calculadora que es 1'09861228..., cometándose así un error en valor absoluto de 0'0005726..., con lo cual comprobamos que el mismo **es bastante menor que la cota del error** que es $|h|^5 \approx 0'28^5 = 0'001721036...$

Y en caso de no conocerse el valor exacto de $\ln 3$, utilizaríamos la doble acotación de la pág. 6:

$$1'09803964 - 0'00172104 < \text{valor exacto} < 1'09803965 + 0'00172104$$

es decir,

$$1'0963186 < \text{valor exacto} < 1'09976069$$

con lo cual podemos escribir $\ln 3 \cong 1'09$ con todas las cifras exactas.

Ejemplo 2: Sea $f(x) = e^x$ y el punto $x = 0$ interior de su dominio. Tenemos derivadas sucesivas de esta función hasta el orden que queramos, siendo todas ellas iguales a la propia función. Todas son continuas, luego podremos hallar el desarrollo de Maclaurin de cualquier orden para esta función con resto en forma infinitesimal (es de Maclaurin por ser en $a = 0$).

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Halleamos, por ejemplo, el desarrollo de orden 3: Tenemos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. Por tanto, el desarrollo de Maclaurin será como el de Taylor (3) pero utiliza $a = 0$:

$$e^{0+h} = 1 + \frac{1}{1!}h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + o(h^3)$$

luego, para $|h|$ suficientemente pequeño, vale la aproximación de Maclaurin (4):

$$e^h \approx 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$$

Calculemos algunos valores aproximados usando la fórmula anterior:

a) Para $h = 0.2$ tenemos: $e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} = 1.22133333\dots$. El valor exacto de $e^{0.2}$ es $1.22140275\dots$, luego el valor absoluto del verdadero error cometido es $0.0000694\dots$, que resulta **mucho menor** que la posible cota $|h|^3 = 0.2^3 = 0.008$.

Pero si no conociésemos el valor exacto de $e^{0.2}$, dando por buena la posible cota 0.008 , utilizaríamos la doble acotación (6) de la pág. 6 que nos dice:

$$1.22133333 - 0.008 < e^{0.2} < 1.22133334 + 0.008$$

es decir, $1.21333333 < e^{0.2} < 1.22933334$, de donde podemos escribir $e^{0.2} \cong 1.2$ con todas las cifras exactas.

b) Para $h = -0.3$ tenemos: $e^{-0.3} \approx 1 - 0.3 + \frac{0.09}{2} - \frac{0.027}{6} = 0.7405$. El valor exacto de $e^{-0.3}$ es $0.74081822\dots$, luego el valor absoluto del verdadero error cometido es $0.00031822\dots$, que resulta **mucho menor** que la posible cota $|h|^3 = 0.3^3 = 0.027$.

c) En cambio, para $h = 2$ (muy grande) se tiene el valor de la función $e^2 = 7.38905609\dots$, y se tiene el valor aproximado $1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} = 6.33333333\dots$ (como vemos, se parecen muy poco). Sin embargo, se sigue cumpliendo la acotación del error cometido, ya que el verdadero error en valor absoluto es $1.0557227\dots$ que **resulta menor** que $|h|^3 = 8$.

Pero en este caso, si no tuviésemos el valor exacto dado por la calculadora, no podríamos saber el verdadero error cometido en valor absoluto. Y, aún dando por válida la acotación del mismo por el valor 8, tendríamos que $6.3333 - 8 < \text{valor exacto} < 6.3334 + 8$, o sea que tendríamos la doble acotación $0 < \text{valor exacto} < 14.3334$ (pues sabemos que el valor buscado es positivo), la cual en la práctica no sirve para nada. (Ver doble acotación (6) dada en la pág. 6).

Desarrollos de Maclaurin de algunas funciones importantes

Terminamos dando los desarrollos de Maclaurin ($a = 0$) de algunas funciones importantes, con restos en forma infinitesimal. Estos desarrollos se usan con mucha frecuencia y pondremos en todos ellos h sustituido por x , pues $h = x - a$ y aquí es $a = 0$.

Desarrollo de orden n de la función $y = e^x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Desarrollo de orden $2n + 1$ de la función $y = \text{sen } x$:

$$\text{sen } x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Desarrollo de orden $2n$ de la función $y = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Desarrollo de orden n de la función $y = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Desarrollo de orden n de la función $y = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$:

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

Siendo los llamados “números combinatorios”: $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!}$, $\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!}$, ..., $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$.

Desarrollo de orden $2n+1$ de la función $y = \arcsen x$:

$$\arcsen x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Desarrollo de orden $2n+1$ de la función $y = \arccos x$:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{15}{336}x^7 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Desarrollo de orden $2n+1$ de la función $y = \arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Observaciones:

- 1) Los desarrollos de $y = \sen x$, $y = \arcsen x$ e $y = \arctan x$ incluyen solamente potencias impares de x (porque se trata de funciones impares).
- 2) El desarrollo de $y = \cos x$ incluye solamente potencias pares de x (porque la función es par).
- 3) Los demás desarrollos incluyen potencias pares e impares de x (porque no son funciones pares ni impares). El de $y = \arccos x$ incluye la constante $\pi/2$ (corresponde a la potencia x^0 de exponente par) y el resto de términos incluyen potencias impares, luego no es par ni impar). Además, se ve claramente la identidad $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$.
- 4) Las expresiones $(-1)^n$ o $(-1)^{n+1}$ corresponden al signo que lleva el último término que aparece en algunos desarrollos.

Resto de Taylor en la forma de Lagrange

En los casos en que la función $f(x)$ admita hasta la derivada de orden $n+1$ en un cierto entorno del punto $x = a$, se demuestra que “el desarrollo de Taylor de orden n correspondiente a dicha función en el punto $x = a$ ” (3) puede escribirse en la siguiente forma:

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \quad (6)$$

donde el último término es una nueva expresión del “resto de Taylor de orden n de la función $f(x)$ en el punto a ”, llamada “forma de Lagrange del resto”, en la cual θ es algún valor desconocido entre 0 y 1.

Nota 1: El punto $a+h$ deberá estar en el entorno de $x=a$ donde se supone existente la derivada de orden $n+1$ de la función $f(x)$, pues el punto $a+\theta \cdot h$ (donde se utiliza) es siempre algún punto intermedio entre a y $a+h$ (si es $h > 0$) o entre $a+h$ y a (si es $h < 0$).

En efecto, al ser $0 < \theta < 1$, se tiene $0 < \theta \cdot h < h$ si es h positivo, luego tenemos

$$a < a + \theta \cdot h < a + h \quad (\text{para } h > 0)$$

con lo cual vemos que el punto $a + \theta \cdot h$ es algún punto intermedio entre a y $a+h$.

Y si es h negativo tendremos $0 > \theta \cdot h > h$, o sea, será $h < \theta \cdot h < 0$, luego se tiene

$$a + h < a + \theta \cdot h < a \quad (\text{para } h < 0)$$

que demuestra que el punto $a + \theta \cdot h$ sigue siendo alguno intermedio entre $a+h$ y a .

Nota 2: El punto desconocido $a + \theta \cdot h$ muchas veces se representa con la letra c . Entonces, si h es positivo se cumplirá $a < c < a+h$ y si h es negativo se cumplirá $a+h < c < a$, quedando sustituida la derivada de orden $n+1$ en dicho punto c , con lo cual “el resto de Taylor de orden n en la forma de Lagrange” quedará así:

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \quad \text{con variable } h$$

(siendo c algún punto intermedio entre a y $a+h$ o bien entre $a+h$ y a)

o bien,

$$R_n(x-a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad \text{con variable } x$$

(siendo c algún punto intermedio entre a y x o bien entre x y a)

donde la última expresión se obtiene sustituyendo h por $x-a$, en cuyo caso será $a < c < x$ para los x mayores que a , o bien $x < c < a$ para los x menores que a .

Nota 3: La forma de Lagrange para el resto es aplicable obviamente a los desarrollos de Maclaurin (donde es $a=0$, si se cumple la existencia de derivadas hasta el orden $n+1$ inclusive en un entorno de dicho punto). Y, desde luego, puede aplicarse a las funciones que tienen derivadas sucesivas de cualquier orden en el punto $x=a$ (pues la existencia de $f^{(n+2)}(a)$ implica que $f^{(n+1)}(x)$ tenga que estar definida en un cierto entorno de $x=a$, que es lo que se exige para utilizar la forma de Lagrange).

Nota 4: La ventaja de usar esta nueva forma del resto de Taylor (o del resto de Maclaurin) es que podemos acotar mejor el error cometido cuando tomamos el valor del polinomio de Taylor (o de Maclaurin) de orden n como aproximación del valor de la función $f(a+h)$, siendo $|h|$ suficientemente pequeño (en general se obtienen cotas seguras y más pequeñas). (Ver ejemplo detallado a continuación).

Y, en un gran número de ocasiones, esta nueva forma del resto permite asegurar su signo, con lo cual sabremos si la aproximación obtenida es “aproximación por defecto” (cuando el signo del resto sea positivo) o es “aproximación por exceso” (cuando el signo del resto sea negativo). (En el ejemplo que sigue se ve el signo negativo del resto).

Nota 5: Joseph Louis Lagrange fue un matemático italiano muy importante, que vivió en Francia mucho tiempo entre el siglo XVIII y el siglo XIX.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Ejemplo: Veamos de nuevo el ejemplo dado en la pág. 7 (apartado b):

Habíamos calculado allí una aproximación de $\ln 0'8$, usando el desarrollo de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \ln x$ en el punto $a = 1$, con el resto en forma infinitesimal, para lo cual sustituimos la variable h por $-0'2$. Y así obtuvimos la aproximación $\ln 0'8 \approx -0'22266666\dots$, siendo $0'008$ una posible cota para el valor absoluto del error cometido. Además, usando el valor exacto de $\ln 0'8$ dado por una calculadora y restándole el valor aproximado obtenido, llegamos a la conclusión de que el verdadero error cometido (en valor absoluto) había sido $0'0004768\dots$, con lo cual pudimos ver que la posible cota obtenida era correcta ($0'0004\dots < 0'008$).

Pero si no hubiésemos sabido el valor exacto de $\ln 0'8$ (al no disponer de una calculadora con valores de la función logarítmica), nos habría quedado la duda sobre la validez de la cota estimada (porque no es segura, sino es una estimación).

Sin embargo, suponiendo válida la cota $0'008$, podríamos haber aplicado la doble acotación (6) de la pág. 6, con lo cual $-0'22266667 - 0'008 < \text{valor exacto} < -0'22266666 + 0'008$, o sea, $-0'23066667 < \text{valor exacto} < -0'21466666$, llegando a la conclusión de que puede estimarse $\ln 0'8 \cong -0'2$.

Veamos ahora el cambio que se produce al utilizar el mismo desarrollo de Taylor para obtener la misma aproximación, pero con el resto en la forma de Lagrange: Al usar el mismo polinomio de Taylor, la aproximación obtenida será la misma.

Pero la acotación del error cometido resulta diferente: Se tiene $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, con lo cual podemos escribir el resto de orden 3 en su forma de Lagrange para un h cualquiera así:

$$R_3(h) = \frac{-6 \cdot c^{-4}}{4!} \cdot h^4 \quad (\text{siendo } \boxed{1+h < c < 1} \text{ si } h < 0 \text{ y siendo } \boxed{1 < c < 1+h} \text{ si } h > 0)$$

Ahora ya sabemos cómo es el resto (que a su vez es el error cometido) a falta de conocer el valor de c . En cambio, con la forma infinitesimal del resto solamente sabíamos que su valor absoluto posiblemente fuese menor que $0'008$ (mucho más incertidumbre).

Así, el verdadero error cometido en este caso será el valor del resto anterior para $h = -0'2$:

$$\text{error} = \frac{-6 \cdot c^{-4} \cdot (-0'2)^4}{4!} = -\frac{0'2^4}{4 \cdot c^4} \quad (\text{con } 0'8 < c < 1)$$

Entonces vemos que el error es negativo y la acotación del valor absoluto del mismo se podrá hacer ahora así:

$$|\text{error}| = \frac{0'2^4}{4 \cdot c^4} < \frac{0'2^4}{4 \cdot 0'8^4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{0'2}{0'8}\right)^4 = \frac{1}{4^5}$$

donde hemos sustituido c por $0'8$ (que es menor), con lo cual el factor c^4 del denominador habrá disminuido y, en consecuencia, el cociente habrá aumentado.

En conclusión, nos ha quedado $|\text{error}| < 1/4^5 = 0'0009765\dots$, o sea, hemos obtenido una nueva cota mucho menor que $0'008$, lo cual es beneficioso porque así sabemos que el verdadero error cometido en valor absoluto es menor de lo que habíamos estimado inicialmente. Pero además esta nueva cota es segura, porque se ha obtenido haciendo cálculos correctos a partir de la forma que tiene el resto. (Y efectivamente, el verdadero error cometido en valor absoluto, que habíamos obtenido en la pág. 7 como $0'0004768\dots$, **cumple ser menor** que $0'0009765\dots$).

Así, al saber ahora que con seguridad el error cometido en el cálculo aproximado es menor que una milésima, podemos dar por ciertas las cifras que obtuvimos en la aproximación hasta las cen-

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

tésimas inclusive (ya que la cifra de las milésimas puede estar afectada de una unidad más o una unidad menos). Entonces, como la aproximación que obtuvimos fue $-0.2226666\dots$, podemos estar seguros de que $\ln 0.8 \cong -0.22$ con todas sus cifras exactas. (Y, efectivamente, la calculadora nos dice que el valor exacto es $-0.22314355\dots$ donde observamos que la cifra de las milésimas, que era 2 en la aproximación, es 3 en el valor exacto).

Nótese, por otro lado, que la doble acotación (6) de la pág. 6 nos dice en este caso:

$$-0.2226667 - 0.0009765 < \text{valor exacto} < -0.2226666 + 0.0009765$$

o sea, $-0.2236432 < \text{valor exacto} < -0.2216901$, lo cual confirma lo dicho anteriormente.

En cambio, la cota de error 0.008 que habíamos obtenido usando la forma infinitesimal del resto para este caso, al ser menor que 0.01 , solamente nos permitía estimar la parte entera y la cifra de las décimas de la aproximación obtenida, o sea que la conclusión podría ser $\ln 0.8 \cong -0.2$ (como ya vimos al comienzo de la página anterior).

Pero hay algo más: Como el resto de Taylor es negativo, el valor exacto de la función es igual al valor aproximado (dado por el polinomio de Taylor) más algo negativo (el valor del resto), luego la aproximación obtenida es “por exceso” (mayor que el valor exacto). Por tanto, sabemos que el valor exacto tendrá que ser menor que $-0.2226666\dots$ (Y en efecto, sabemos que el valor exacto es $-0.223143551\dots$).

En cambio, cuando usábamos la forma infinitesimal del resto no podíamos saber el signo del error, con lo cual no podíamos saber si la aproximación obtenida era “por defecto” o “por exceso”.

En general, tenemos: $\boxed{\text{Valor exacto} = \text{valor aproximado} + \text{error cometido}}$ (es lo que dice la fórmula de Taylor, donde el valor aproximado es el del polinomio utilizado y el error cometido es el valor del resto correspondiente). Con lo cual, al poder saber el signo del resto, se sabrá si el valor exacto es mayor o menor que el valor aproximado: Si el resto es positivo tendremos el valor exacto **mayor** que el valor aproximado, luego este es “por defecto” y si el resto es negativo tendremos el valor exacto **menor** que el valor aproximado, luego este es “por exceso”.

En general, si $|\text{error}| < K$ sin saberse el signo del error, se tendrá:

$$\boxed{\text{aproximación obtenida} - K < \text{valor exacto} < \text{aproximación obtenida} + K}$$

(que es la misma doble acotación (6) de la pág. 6).

Pero si $|\text{error}| < K$ y sabemos que $\boxed{\text{error} > 0}$, de $0 < \text{error} < K$ se deduce:

$$\boxed{\text{aproximación obtenida} < \text{valor exacto} < \text{aproximación obtenida} + K}$$

Y si $|\text{error}| < K$, pero sabemos que $\boxed{\text{error} < 0}$, de $-K < \text{error} < 0$ se deduce:

$$\boxed{\text{aproximación obtenida} - K < \text{valor exacto} < \text{aproximación obtenida}}$$

EN CONCLUSIÓN: “La forma de Lagrange” permite conocer en muchos casos el signo del resto de Taylor (o de Maclaurin), con lo cual sabremos si la correspondiente aproximación obtenida es “por defecto” o “por exceso”. Y, muy importante, siempre permite hallar una cota segura del valor absoluto del error cometido, que suele ser menor que la estimada con la forma infinitesimal del resto.

En cambio, al usar “la forma infinitesimal del resto” no tenemos que hallar la derivada de orden $n + 1$ de la función ni determinar la acotación del valor absoluto del resto (no siempre fácil), pero no sabremos el signo del resto y la cota que tendremos no será totalmente segura (y normalmente resultará más grande).

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Sin embargo, en la práctica se usa mucho la forma infinitesimal del resto por su sencillez, pero se supone que trabajaremos siempre con valores muy pequeños de $|h|$ y también valores suficientemente grandes del orden n de la fórmula.

NOTA FINAL: Es importante saber que los valores dados por las calculadoras científicas para las funciones básicas se obtienen utilizando apropiados polinomios de Taylor o de Maclaurin de las mismas (con n suficientemente grande y con valores de h suficientemente pequeños en valor absoluto). Y en todos los casos, las aproximaciones obtenidas tienen exactas todas las cifras que aparecen en la pantalla, pues los errores cometidos son muy pequeños y no les afectan.

Al respecto, recordamos que precisamente las funciones básicas, tienen desarrollos de Taylor en cualquier punto interior de sus dominios, pudiendo utilizar dichos desarrollos con órdenes tan grandes como se quiera, salvo los casos de $y = x^n$ con n entero positivo (donde el orden máximo de los desarrollos es n), los casos de $y = \sqrt[n]{x}$ con n entero impar mayor que 1 (donde se exceptúa el punto $a = 0$, por no ser derivable la función) y el caso de $y = |x|$ (la cual no es derivable en $a = 0$ y en el resto de puntos funciona como x o como $-x$).
