

SERIES NUMÉRICAS

(Prerrequisitos: Sucesiones numéricas. Integrales impropias de una variable)

Introducción

En la introducción de la Sección 3.8 (“Sucesiones numéricas”) indicábamos que las palabras “sucesión” y “serie” se usan en el lenguaje común como sinónimos (se habla por ejemplo de una cola como una sucesión de personas o como una serie de personas, indistintamente). Pero allí explicábamos que, matemáticamente, “sucesión” y “serie” son conceptos diferentes.

En dicha Sección 3.8 vimos que una “sucesión de números reales” es cualquier función real de variable real f cuyo dominio sea el conjunto \mathbb{N} de los números naturales y cuyo recorrido esté contenido en el conjunto \mathbb{R} de los números reales: O sea, en esa función a cada natural n le corresponde como imagen un número real $f(n)$, representado como sabemos por una letra minúscula con subíndice n (por ejemplo a_n), de modo que para $n = 1, n = 2, n = 3, \text{etc.}$, esas imágenes son el “primer término” a_1 , el “segundo término” a_2 , el “tercer término” a_3 , etc... de dicha “sucesión”, los cuales suelen escribirse en forma ordenada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad \text{o bien, con una notación abreviada como } \{a_n\}$$

donde en ambas notaciones a_n representa a cualquiera de los términos y se llama “término general de la sucesión”.

Y decíamos también en esa introducción de la Sección 3.8 que en cambio, en Matemáticas, una “serie numérica” es la suma indicada de los infinitos términos de una cierta “sucesión numérica”. Así, de “la sucesión” anterior se obtiene “la serie” $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, representada abreviadamente por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (donde los “términos de la sucesión” pasan a ser los “términos de la serie”).

Lo dicho anteriormente puede extenderse a “sucesiones de números complejos” y a “series de números complejos”, pero en todo lo que sigue cuando digamos “serie numérica” nos estaremos refiriendo a las “series de números reales” solamente.

Lo que principalmente interesa de una “sucesión numérica” es su límite cuando la variable independiente n tienda a $+\infty$ (escribiremos $n \rightarrow \infty$). Y dicho límite puede ser un número real (caso de las “sucesiones convergentes”) o bien puede ser $+\infty, -\infty$ o $\pm\infty$ (caso de las “sucesiones divergentes”). Y cuando **el límite no exista** la sucesión se llama “oscilante”.

¿Y qué interesa de una “serie”? El valor de la suma indicada en su propia expresión, si es que este valor existe (el cual no puede obtenerse de un modo directo, pues no acabaríamos nunca de sumar). La idea entonces es obtener la suma de un número finito, cada vez mayor, de términos sucesivos de la serie dada, y ver si los valores de dichas “sumas parciales” se aproximan a algún valor real único a medida que vamos agregando nuevos sumandos. Si es así, la “serie” se llamará “convergente” y “su valor” será ese número real único al que tienden sus “sumas parciales” sucesivas (o sea, que **el valor de una “serie” es el número real límite de la “sucesión” formada por sus “sumas parciales” sucesivas**). Pero, puede suceder que esas “sumas parciales” no se aproximen a un valor real, sino que sus valores absolutos crezcan llegando a superar a cualquier número positivo dado, con lo cual la “serie” se llamará “divergente” y no tendrá valor numérico, o bien puede suceder que las “sumas parciales” tengan un comportamiento diferente a los dos anteriores, con lo cual la “serie” no será “convergente” ni “divergente” y en ese caso diremos que es una “serie oscilante” (también sin valor numérico).

Finalmente, como en esta Sección se van a usar mucho las relaciones que hay entre “los órdenes” de varias “sucesiones divergentes” notables, estudiadas en la Sección 3.8, recordaremos aquí el resumen correspondiente que allí aparece, donde el símbolo \ll significa “de menor orden que”

SERIES NUMÉRICAS

(o sea que la sucesión que aparece a la izquierda de este símbolo “**tiene menor orden**” que la sucesión que aparece a su derecha): $\log_a n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$ (donde $a > 1$ y $p > 0$)

En todos los casos, recuérdese que el cociente del término general de **una sucesión divergente de menor orden** entre el término general de otra **de mayor orden** tendrá siempre **límite cero**, y el cociente de **una divergente de mayor orden** entre una de **menor orden** tendrá **límite infinito**. Y recuérdese también que cuando el cociente de los términos generales de dos **sucesiones divergentes** tenga **límite finito diferente de cero**, las sucesiones se llaman “**del mismo orden**”. Y en particular, se llaman “**equivalentes**” a dos sucesiones cuyo cociente de términos generales tenga **límite 1**, con lo cual ambas tendrán el mismo límite (finito o infinito) o ambas serán “oscilantes”, en todos los casos con términos cada vez más parecidos entre sí a medida que n crece.

Notaciones básicas

Como hemos dicho, dada una “sucesión” de números reales $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, podemos considerar la “serie” de números reales que tiene esos mismos términos, como la expresión

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (\text{o en forma resumida: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

a_1 es “el primer término de la serie”, a_2 es “el segundo término de la serie” y así sucesivamente, siendo a_n “el término general de la serie” porque los representa a todos, donde a_n es la imagen del número natural n en una cierta función, la cual puede definirse “de forma explícita” con una sola expresión o con varias expresiones, o bien puede definirse “de forma recurrente” como ya veremos en algunos ejemplos.

A su vez, para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consideraremos “**la sucesión de sumas parciales asociada**” $\{S_n\}$, definida “de forma recurrente” así: $S_n = S_{n-1} + a_n$, siendo $S_1 = a_1$. O sea, que tendremos $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, etc... De manera que el término general será entonces en “forma explícita”: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Pues bien, “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (es decir, su condición de “convergente”, “divergente” u “oscilante”) viene dado por “el carácter” de su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$. Y en caso de ser esta “convergente”, llamamos “**valor de la serie**” al límite de S_n cuando $n \rightarrow \infty$. O sea, que si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, podemos escribir $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

También, si el límite de S_n fuese infinito ($+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$), la serie se llamará “divergente”, y si ese límite de S_n no existiese como número real ni como infinito, la serie se llamará “oscilante”. Y en ambos casos, **la serie no tendrá valor**.

Ejemplo 1: Sea la serie cuyos términos son todos iguales $k + k + k + \dots$. Aquí es $a_n = k$ para todo n (“definición explícita” con una sola expresión del “término general”).

Si es $k = 0$, la serie es “convergente” de **valor cero**, pues en este caso es $S_n = 0$ para todo n . Si es $k > 0$, la serie es “divergente” a $+\infty$, pues es $S_n = n \cdot k$, con lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Y si es $k < 0$, la serie es “divergente” a $-\infty$, pues sigue siendo $S_n = n \cdot k$, pero ahora $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, por ser k negativo.

Ejemplo 2: Sea la llamada “**serie geométrica**”

$$\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a^{n-1} = b + b \cdot a + b \cdot a^2 + \dots + b \cdot a^{n-1} + \dots$$

SERIES NUMÉRICAS

así llamada porque sus términos están en “progresión geométrica” de razón a . Aquí el término general es $\boxed{a_n = b \cdot a^{n-1}}$ para todo n (“definición explícita” con una sola expresión), pero podría haberse definido a_n “de forma recurrente” como $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot a}$, para todo $n > 1$, y $\boxed{a_1 = b}$.

Se demuestra fácilmente que la suma de los n primeros términos de una “progresión geométrica” es igual al último término multiplicado por la razón, menos el primero, dividido el resultado entre la razón menos 1 (suponemos la razón diferente de 1, porque en caso contrario la serie tendría todos sus términos iguales, como el ejemplo anterior, y supondremos también $b \neq 0$ porque de lo contrario la serie sería $0 + 0 + 0 + \dots$ ya vista anteriormente). Por tanto, en este caso

$$S_n = b + b \cdot a + b \cdot a^2 + \dots + b \cdot a^{n-1} = \frac{(b \cdot a^{n-1}) \cdot a - b}{a-1} = \frac{b \cdot a^n - b}{a-1} \quad (b \neq 0 ; a \neq 1)$$

Veamos el límite de S_n (término general de la “sucesión de sumas parciales”):

- a) Si $-1 < a < 1$, el límite de a^n será cero, con lo cual el límite de S_n será $\boxed{b/(1-a)}$ (serie “convergente” de valor el número anterior).
- b) Si $a > 1$, el límite de a^n será $+\infty$ y el límite de S_n será $+\infty$ (si $b > 0$) o será $-\infty$ (si $b < 0$) (serie “divergente” a $+\infty$ o a $-\infty$).
- c) Si $a < -1$, el límite de a^n será $\pm\infty$ y el límite de S_n también será $\pm\infty$ (serie “divergente” a $\pm\infty$).
- d) Y si $a = -1$, la serie será $b - b + b - b + \dots$ cuyas “sumas parciales” sucesivas son $b, 0, b, 0, b, \dots$ (entonces, como hemos supuesto $b \neq 0$, tenemos una “sucesión de sumas parciales oscilante”, luego la serie será “oscilante”).

Ejemplo 3: Una serie podría ser $a_1 + a_2 + \dots + a_p + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$. O sea, que tenga todos sus términos iguales a cero desde uno en adelante ($a_n = 0$, para todo $n > p$). Y en este caso la serie es “convergente” y equivale a la suma de sus términos no nulos (suma de un número finito de sumandos). En efecto, sus “sumas parciales” a partir de S_p son todas iguales, luego la sucesión $\{S_n\}$ será “convergente” de límite S_p y entonces la serie será “convergente” de valor S_p .

Ejemplo 4: Una serie puede ser $1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 0 + 4 + \dots + a_n + \dots$, siendo $\boxed{a_n = \frac{n+1}{2}}$, si n es impar y $\boxed{a_n = 0}$, si n es par (definición explícita “a trozos”, con dos expresiones, del término general). Obsérvese que si n es impar, $n + 1$ será par y entonces el cociente $(n + 1)/2$ será un entero, que coincide con el valor que aparece en la serie, como puede comprobarse fácilmente (así $a_1 = \frac{1+1}{2} = 1$; $a_3 = \frac{3+1}{2} = 2$; $a_5 = \frac{5+1}{2} = 3$, etc...). Para esta serie se tiene $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 3$, $S_4 = 3$, $S_5 = 6$, $S_6 = 6$, $S_7 = 10$, $S_8 = 10$, etc... Vemos que las “sumas parciales” crecen como las sumas de números naturales consecutivos, luego serán cada vez mayores, llegando a superar a cualquier número positivo K que queramos dar. Luego esta serie es “divergente” a $+\infty$.

TEOREMA FUNDAMENTAL: Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es “convergente”, se cumple necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (es decir, “condición necesaria” para que una serie sea “convergente” es que “su término general” tenga límite cero cuando $n \rightarrow \infty$).

Pues al ser la serie “convergente”, se tendrá $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$, con lo cual también tendrá que ser $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L$. Pero entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = L - L = 0$.

SERIES NUMÉRICAS

NOTA IMPORTANTE: “La condición necesaria” dada en el Teorema anterior “no es suficiente” para la “convergencia” de la serie. O sea, puede ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y no ser “convergente” la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Un ejemplo notable es la llamada “serie armónica” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es “divergente” a pesar de que el límite de su “término general” sea cero. En efecto, su “suma parcial” S_n es $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ y en la Sección 3.8 vimos que la suma anterior es una “sucesión equivalente” a la sucesión de término general $\log_e n$ (logaritmo neperiano de n), lo cual implica que tienen el mismo límite. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_e n = +\infty$.

Veremos más adelante otros casos similares a éste, donde la serie “no es convergente” a pesar de que el límite de “su término general” sea cero.

Propiedades generales de las series numéricas

Se demuestra que las series numéricas tienen las siguientes propiedades generales:

- 1) Si se añaden o suprimen un número finito de términos a una serie (términos consecutivos o no consecutivos), la misma no cambia “su carácter” y, en caso de ser “convergente”, su valor se verá modificado en la suma de los términos añadidos o suprimidos.
- 2) Si se multiplican todos los términos de una serie por un mismo número real $k \neq 0$, resulta otra serie con el mismo “carácter”: En caso de “convergencia”, su valor será el de la serie inicial multiplicado por k , y en caso de “divergencia” de la primera a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, la nueva serie será “divergente” respectivamente a $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$, si $k > 0$, y será “divergente” respectivamente a $-\infty$, $+\infty$ o $\pm\infty$, si $k < 0$.
- 3) En una serie que sea “convergente” o “divergente”, se puede sustituir por su suma efectuada cualquier grupo finito de términos consecutivos, repitiendo esta operación todas las veces que se quiera, sin que la nueva serie cambie de “carácter” (ni cambie de valor en caso de “convergencia”).

Nota: Pero si en una serie “oscilante” se hace lo dicho anteriormente, la nueva serie puede haber cambiado de “carácter” (por ejemplo, si en la serie “oscilante” $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ sumamos cada dos términos consecutivos todas las veces, resulta la serie $0 + 0 + 0 + \dots$ que es “convergente”).

- 4) Si se suman (o restan) todos los términos que ocupan igual lugar de dos series “convergentes”, la nueva serie formada con dichas sumas (o restas) será “convergente” y su valor será la suma (o resta) de los valores de las dos series dadas.

O sea, si se tiene $A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ y se tiene $B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$, se tendrá $A + B = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots$ y se tendrá $A - B = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots$

Si una de las series sumadas (o restadas) es “divergente” y la otra es “convergente”, la suma (o resta) de ambas será “divergente”.

Y si las dos series sumadas (o restadas) son “divergentes”, la nueva serie puede tener cualquier “carácter”, con algunas excepciones importantes: Si las dos series dadas “divergen a $+\infty$ ” la resultante de sumarlas “divergerá a $+\infty$ ”; si las dos series dadas “divergen a $-\infty$ ” la resultante de sumarlas “divergerá a $-\infty$ ”, y si una de las dos series dadas “diverge a $+\infty$ ” y la otra “diverge a $-\infty$ ”, la diferencia de ambas será “divergente a $+\infty$ ” o “divergente a $-\infty$ ”, según el orden en que las restemos: (Esto último lo podemos expresar simbólicamente como $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, así como $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$).

SERIES NUMÉRICAS

Series de términos positivos

Son un tipo muy importante de series, pues el estudio de otros tipos se reduce muchas veces a estas, como veremos más adelante. No se estudian las series de términos negativos porque una de este tipo puede considerarse el producto de la constante -1 por una serie de términos positivos, luego “el carácter” de esta determinará “el carácter” de aquella, según establece la propiedad 2 anterior.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE ESTE TIPO DE SERIES: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada $\{S_n\}$ será “estrictamente creciente”. Hay entonces **dos únicas posibilidades para “su carácter”**: O bien, dicha sucesión está acotada superiormente y entonces será “convergente” (por el Teorema Fundamental de las Sucesiones Monótonas, visto en la Sección 3.8), con lo cual la serie también lo será, **o bien $\{S_n\}$ no está acotada superiormente y entonces será “divergente a $+\infty$ ”, con lo cual la serie también lo será.**

Por tanto, **una “serie de términos positivos” será siempre “convergente” (con un valor positivo) o será “divergente a $+\infty$ ”.**

Ejemplo 1: La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ es de términos positivos “convergente”, por ser una “serie geométrica” de razón $a = 1/2$, cumpliéndose $-1 < a < 1$ (ver ejemplo 2 de la pág. 2). Como es $b = 1$, su valor es $\frac{1}{1-(1/2)} = 2$. Aquí el límite del “término general” de la serie es cero, como es obligatorio en cualquier serie “convergente”.

Ejemplo 2: La serie $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ es de términos positivos claramente “divergente a $+\infty$ ”, pues $S_n = n$ (aquí el límite del “término general” de la serie es 1, luego no cumple “la condición necesaria de convergencia” y entonces sólo puede ser “divergente”).

Ejemplo 3: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$ es de términos positivos “divergente a $+\infty$ ”, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ (diferente de cero). (Al no cumplir “la condición necesaria de convergencia”, tiene que ser “divergente”).

Ejemplo 4: La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot (\pi/4)^n$ es “convergente”, pues es “geométrica” de razón $a = \pi/4$, cumpliéndose $-1 < \frac{\pi}{4} < 1$. En este caso es $b = 3$ y por tanto el valor de la serie es $\frac{3}{1-\frac{\pi}{4}}$. Obsérvese que el límite del término general $3 \cdot (\pi/4)^n$ es cero, porque $\frac{\pi}{4} < 1$.

Ejemplo 5: La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ es “divergente a $+\infty$ ”, pues no cumple “la condición necesaria de convergencia”, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1 \neq 0$.

IMPORTANTE: Como las series de términos positivos que cumplen “la condición necesaria de convergencia” pueden ser “convergentes” o “divergentes” (ya que dicha “condición necesaria” no es “condición suficiente”), hace falta algún criterio que determine su carácter.

Hay varios criterios al respecto y, según sea el término general de la serie, se aplicarán unos u otros. Además, si alguno no se puede aplicar porque falta algún requisito, o bien conduce a un caso de duda, usaremos otro criterio. A continuación damos los criterios más importantes, con muchos ejemplos de la utilización de cada uno.

En primer lugar, se demuestra matemáticamente el siguiente Criterio General de Comparación, de gran importancia teórica y práctica:

SERIES NUMÉRICAS

CRITERIO GENERAL DE COMPARACIÓN: Si dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cumplen la condición $a_n \leq b_n$ para todo n , la primera se llama “minorante” de la segunda y la segunda se llama “mayorante” de la primera. Pues bien, si “la mayorante” es “convergente”, “la minorante” también lo será. Y si “la minorante” es “divergente”, “la mayorante” también lo será.

Nota: Este Criterio General también es válido si la condición $a_n \leq b_n$ se cumple solamente desde un cierto $n > 1$ en adelante (pues si suprimimos de las dos series los términos iniciales que no cumplan la condición $a_n \leq b_n$, las nuevas series obtenidas tendrán el mismo “carácter” que las iniciales, como dijimos en la propiedad 1 de la pág. 4).

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ se llama “**serie armónica general**”. Pues bien, la llamada “**serie armónica**” es el caso particular que corresponde a $p = 1$ y sabemos que es “divergente” (ver pág. 4). Entonces, si tomamos un $p < 1$, será $n^p < n$ para todo $n > 1$, luego se tendrá $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, también para todo n mayor que 1 (para $n = 1$ los valores coinciden). Con lo cual, “la serie armónica general” para un $p < 1$ será “mayorante” de la “serie armónica”. Y como esta última es “divergente”, la general también lo será por el Criterio General anterior. Por tanto, hay infinitas “series armónicas” que son “divergentes” y en todas ellas ocurre que el límite de “su término general” es cero (corresponden a los infinitos valores de p menores que 1). En cambio, para $p > 1$ “la serie armónica general” es “minorante” de la “serie armónica” (pues $n^p > n$ si $n > 1$, luego $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n}$ desde el segundo término en adelante), pero al ser esta última “divergente” no podemos concluir nada a través del anterior Criterio General. Veremos en la pág. 10, con otro criterio, que “la serie armónica general” es “convergente” para todo $p > 1$.

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es “minorante” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, pues se sabe que la sucesión divergente n^n es “de mayor orden” que la sucesión $n!$ (ver pág. 2). Pues bien, en el ejemplo 1 del Criterio de D’Alembert (dado más adelante) veremos que la última serie nombrada es “convergente”, luego la primera también será “convergente” por el Criterio General de Comparación dado.

Ejemplo 3: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_e(n+e)}{n}$ es de términos positivos pues $\log_e(n+e) > \log_e e = 1$ para todo n , y además es “mayorante” de la “serie armónica” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es “divergente”, luego también será “divergente a $+\infty$ ” por el anterior Criterio General.

Se demuestra matemáticamente el siguiente **otro criterio** para saber si una serie de términos positivos “converge” o “diverge a $+\infty$ ”:

CRITERIO DE D’ALEMBERT o del cociente: Si en una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ el límite del cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ es un número real L , se tiene que dicha serie es “convergente” cuando sea $L < 1$; dicha serie es “divergente” cuando sea $L > 1$, y no puede asegurarse “su carácter” si $L = 1$ (caso de duda). Además, si el límite de a_n/a_{n-1} es $+\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es “divergente”.

Nota: Jean le Rond D’Alembert fue un matemático francés del siglo XVIII.

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ cumple “la condición necesaria de convergencia” ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$), pero además el cociente $a_n/a_{n-1} = (n-1)!/n! = 1/n$ tiene límite cero (menor que 1), luego la serie es “convergente” por el anterior Criterio de D’Alembert. (Lo habíamos dicho antes).

SERIES NUMÉRICAS

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ no cumple “la condición necesaria de convergencia”, luego es “divergente” por ese motivo. Y, como es lógico, el Criterio del Cociente nos dice lo mismo, ya que $a_n/a_{n-1} = 3$, luego el límite de dicho cociente es 3 (mayor que 1).

Ejemplo 3: La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sabemos que es “divergente”. Pero el Criterio del Cociente no nos dice nada en este caso, ya que $a_n/a_{n-1} = (n-1)/n$, luego su límite es 1 (caso de duda).

Ejemplo 4: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-2}}$ cumple “la condición necesaria de convergencia” y el cociente $a_n/a_{n-1} = (3^{n-1} - 2)/(3^n - 2) = (3^{-1} - 2 \cdot 3^{-n})/(1 - 2 \cdot 3^{-n})$ tiene límite 3^{-1} (menor que 1), luego la serie dada es “convergente”. (Obsérvese que si el denominador del término general fuese 3^n solamente, la serie dada sería “geométrica” de razón $1/3$, pero tal como está no es serie geométrica). (Nótese que el límite de $3^{-n} = 1/3^n$ es cero, cuando $n \rightarrow \infty$).

Ejemplo 5: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ cumple “la condición necesaria de convergencia”, porque $n!$ es divergente “de mayor orden” que n^p para cualquier p positivo, por grande que este sea (ver pág. 2), con lo cual a_n tiende a cero. Y si p es cero o negativo, n^p vale 1 o tiende a cero, luego también a_n tendrá límite a cero. Le aplicamos el Criterio de D’Alembert: El cociente a_n/a_{n-1} es

$$\frac{n^p \cdot (n-1)!}{(n-1)^p \cdot n!} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^p \cdot \frac{1}{n}$$

que tiene límite $1^p \cdot 0 = 0$ (menor que 1), luego la serie es “convergente”.

Otro criterio para saber “el carácter” de una “serie de términos positivos”, demostrable matemáticamente, es el siguiente:

CRITERIO DE CAUCHY o de la raíz: Si en una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ es un número real L , se tiene que dicha serie es “convergente” cuando sea $L < 1$; dicha serie es “divergente” cuando sea $L > 1$, y no puede asegurarse “su carácter” si $L = 1$ (caso de duda). Además, si el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ es $+\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es “divergente”.

Nota 1: Augustin Louis Cauchy fue un gran matemático francés del siglo XIX. Uno de los más importantes de ese siglo.

Nota 2: En la Sección 3.8 (“Sucesiones numéricas”) se vio que para una sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos, al existir el límite de a_n/a_{n-1} también existirá el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ y ambos coinciden. Por ello, si para una serie de términos positivos funciona el Criterio de D’Alembert (pues existe el límite de a_n/a_{n-1}) es inútil aplicar el Criterio de Cauchy (ya que dirá lo mismo). Sin embargo, puede ocurrir en algunos casos que funcione el Criterio de la Raíz y no funcione el Criterio de la Razón o sea muy incómodo de aplicar.

En general, es más fácil calcular el límite de la razón a_n/a_{n-1} que el límite de la raíz $\sqrt[n]{a_n}$, luego debemos aplicar el Criterio de la Raíz solamente cuando veamos que sea difícil de obtener el límite de la razón. Únicamente es aconsejable aplicar el Criterio de Cauchy antes que el Criterio de D’Alembert cuando “el término general” de la serie sea una potencia de exponente n (ya que la raíz n -sima eliminará dicha potencia).

Ejemplo 1: Vimos anteriormente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es “convergente” porque es “minorante” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (cuya “convergencia” se comprobó por el Criterio de la Razón). Pero el Criterio de Cauchy nos dice directamente que la primera serie es “convergente”, ya que $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}$ tiene límite cero (menor que 1).

SERIES NUMÉRICAS

Obsérvese que en el caso anterior la aplicación directa el Criterio de la Razón es más incómoda, pues conduce al límite de $\frac{1/n^n}{1/(n-1)^{n-1}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, el cual es menos sencillo. Pero vemos que resulta $0 \cdot e^{-1} = 0$ (ver explicación en la Sección 3.8 o comprobarlo por cálculo).

Ejemplo 2: A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$ le debemos aplicar inicialmente el Criterio de Cauchy, pues el término general es una potencia de exponente n de otra potencia de exponente n . Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ que tiene límite e^2 (explicado también en la Sección 3.8). Como ese límite es mayor que 1, la serie dada es “divergente a $+\infty$ ”.

Ejemplo 3: Determinar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log_e n)^n}$. Al ser el término general una potencia de exponente n , aplicamos el Criterio de Cauchy. Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log_e n}$ que tiene límite cero (menor que 1), luego la serie es “convergente”.

Ejemplo 4: Determinar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$. Al ser $n!$ infinito “de mayor orden” que 10^n (ver pág. 2), el límite del término general será $+\infty$, con lo cual no se cumple “la condición necesaria de convergencia” y la serie será “divergente a $+\infty$ ”. Y el Criterio de Cauchy nos da el mismo resultado, ya que $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{10}$ tiene límite $+\infty$, porque $\sqrt[n]{n!}$ es “equivalente” a n/e , que tiene límite $+\infty$ (ver la Sección 3.8 donde se demuestra dicha equivalencia).

Ejemplo 5: Determinar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a > 0$). Se cumple “la condición necesaria de convergencia”: Pues si es $a < 1$, el numerador del término general tiende a cero mientras el denominador tiende a $+\infty$; si es $a = 1$, el numerador será siempre 1 y el denominador tiende a $+\infty$, y si es $a > 1$, tenemos un límite indeterminado ∞/∞ pero la sucesión divergente del numerador es “de menor orden” que la del denominador (ver pág. 2), luego el límite será cero. Aplicamos ahora el Criterio de Cauchy: Se tiene $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}}$ que tiene límite cero, porque dijimos en el ejemplo anterior que $\sqrt[n]{n!}$ tiende a $+\infty$. Y al ser el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ menor que 1, la serie es “convergente”.

Obsérvese que si el límite del cociente a_n/a_{n-1} es 1, el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ también será 1 y no saldremos del “caso de duda”. Por eso hace falta otro criterio para resolver estas dudas, como el Criterio de Raabe, que se demuestra matemáticamente como todos:

CRITERIO DE RAABE (se aplica para salir del caso de duda del Criterio de D’Alembert): Si el límite de $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ es igual a uno, se calcula el límite del producto indeterminado $n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. Entonces, si dicho límite resulta mayor que 1 (incluido $+\infty$), la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es “convergente”; si dicho límite resulta menor que 1, la serie dada es “divergente”, y si ese límite es 1, subsiste la duda respecto al “carácter” de dicha serie.

Nota: Joseph Ludwig Raabe fue un profesor y matemático suizo del siglo XIX.

Ejemplo 1: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ cumple “la condición necesaria de convergencia”. Le aplicamos el Criterio de D’Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n}}{\frac{1}{(n-1)^2+2(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+2n} = 1$ (caso de duda)

Por tanto, le aplicamos ahora el Criterio de Raabe:

SERIES NUMÉRICAS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{n^2-1}{n^2+2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n} = 2$$

y como este límite es mayor que 1, la serie dada es “convergente”.

Ejemplo 2: En cambio, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que cumple “la condición necesaria de convergencia” y está en “caso de duda” por el criterio de D’Alembert, vuelve a dar “caso de duda”

por el Criterio de Raabe. En efecto:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

y también
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$$

(Recuérdese que la explicación de que la serie armónica es “divergente” la hicimos en la pág. 4 basándonos en que su suma parcial S_n es un infinito “equivalente” a $\log_e n$).

Ejemplo 3: Sea la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, cuyos primeros términos son $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$. No es fácil conocer el límite de su término general, para saber si cumple “la condición necesaria de convergencia”. Pero le aplicamos el Criterio de D’Alembert:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)}} = \frac{2n-1}{2n} \text{ y este cociente tiene límite } 1 \text{ (caso de duda).}$$

Entonces, aplicamos el Criterio de Raabe: $n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{2n-1}{2n}\right) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Luego su límite es 1/2. Y al ser este límite menor que 1, la serie dada es “divergente”.

Consideramos ahora una relación sencilla entre algunas series de términos positivos y ciertas “integrales impropias de primera especie” en el intervalo $[1, +\infty)$ cuyo “integrando” sea positivo. Y esa relación se produce cuando el término general a_n de la serie pueda interpretarse como el valor, para $x = n$, de “la función integrando” $f(x)$ de la “integral impropia”, o sea cuando resulte $a_n = f(n)$ para todo n .

Pues bien, para esos casos, **existe un criterio específico:**

CRITERIO DE LA INTEGRAL: Sea una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyo término general a_n pueda considerarse la restricción al conjunto \mathbb{N} de los números naturales de una función real de variable real $f(x)$, que se mantenga continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$. Entonces tenemos $a_n = f(n)$ para todo n . Se trata de conocer “el carácter” de la serie por comparación con “el carácter” de “la integral impropia de primera especie”

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx .$$

Pues bien, se demuestra que si la integral anterior es “convergente” también lo será la serie. Y si la integral anterior es “divergente” también lo será la serie.

Nota: En la Sección 4.5 (“Integrales impropias”) se explica que “el carácter” de “la integral impropia de primera especie” mencionada en el anterior Criterio se obtiene hallando el límite de la integral definida $\int_1^t f(x) dx$, cuando $t \rightarrow +\infty$ (la anterior integral definida ordinaria de la función $f(x)$ en el intervalo $[1, t]$, existe por ser f continua en $[1, +\infty)$ con lo cual lo será en $[1, t]$). Pero esa integral definida es a su vez una función $F(t)$ de dominio $[1, +\infty)$, donde es continua, siendo además derivable para todo $t > 1$ y se cumple $F'(t) = f(t)$, o sea que F es “una primitiva” de f en $(1, +\infty)$, gracias a lo establecido en el **Teorema Fundamental del Cálculo**

SERIES NUMÉRICAS

(visto en la Sección 4.2), lo cual ocurre también por darse la continuidad de f en $[1, +\infty)$. Pero $F(t)$ es además, en este caso, una función real “estrictamente creciente” en todo su dominio, por ser f positiva en el mismo intervalo $[1, +\infty)$. Con lo cual, su límite cuando $t \rightarrow +\infty$ será un cierto número positivo (si $F(t)$ está acotada superiormente) o bien será $+\infty$ (si no lo está).

Pues bien, en la Sección 4.5 se estableció que si ese límite de $F(t)$, cuando $t \rightarrow +\infty$, es un número (que será positivo en este caso) la “integral impropia” mencionada en el Criterio es “convergente”. Y si ese límite es infinito ($+\infty$ en este caso), la integral impropia es “divergente”.

Ejemplo 1: Hemos dicho que la serie armónica general es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Y hemos establecido anteriormente que es “divergente” para todo valor del parámetro p que sea menor o igual a 1 (pág. 6), pero no sabemos qué pasará para valores de p mayores que 1.

Al observar que su término general puede considerarse restricción a \mathbb{N} de la función real de variable real $f(x) = \frac{1}{x^p}$, la cual es continua, positiva y estrictamente decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$, pues su derivada $\frac{-p}{x^{p+1}}$ es negativa en $(0, +\infty)$, podremos aplicarle a esta serie el anterior Criterio de la Integral.

Ahora bien, si es $p \neq 1$, se tiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{-p+1}-1}{-p+1} \right)$$

Y ese límite es $\frac{1}{p-1}$ cuando $p > 1$, pues $-p + 1$ será negativo y entonces t^{-p+1} tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. Por tanto, tenemos que la “serie armónica general” es “convergente” cuando sea p mayor que 1.

Pero también vemos que el límite anterior es $+\infty$ cuando $p < 1$, pues entonces $-p + 1$ será positivo y la potencia t^{-p+1} tenderá a $+\infty$. Luego hemos vuelto a probar que la “serie armónica general” es “divergente” cuando sea $p < 1$.

Y para $p = 1$ (caso de la “serie armónica”), la integral impropia es:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln|x|]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

luego tenemos otra demostración de que la “serie armónica” es “divergente”.

Ejemplo 2: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \log_e(n+1)}$ es de términos positivos y tiene un término general que es restricción a \mathbb{N} de la función real de variable real $f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \log_e(x+1)}$, la cual es continua, positiva y estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$, pues se puede comprobar que su derivada es negativa en $(0, +\infty)$.

Consideramos entonces “la integral impropia de primera especie” siguiente

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{(x+1) \cdot \log_e(x+1)} dx$$

donde la integral definida del segundo miembro se resuelve fácilmente usando el cambio de variable $\log_e(x+1) = u$, pudiendo comprobarse que su resultado es $\log_e \left[\log_e \left(\frac{t+1}{2} \right) \right]$. Enton-

SERIES NUMÉRICAS

ces, cuando $t \rightarrow +\infty$, su límite es $+\infty$, luego la **“integral impropia” es “divergente”**. Por tanto, **la serie dada también será “divergente”** según establece el anterior Criterio de la Integral.

Nota: Este es otro ejemplo de una serie que cumple “la condición necesaria de convergencia” (la cual, como sabemos, es $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) y sin embargo es “divergente” (lo cual prueba nuevamente que dicha “condición necesaria”, **no es “suficiente”** para asegurar la “convergencia” de una serie).

Hay también **otro criterio** para series de términos positivos que se llama **Criterio de Comparación por Límite** (basado en el Criterio General de Comparación que dimos en la pág. 6 y muy parecido al que dimos en la Sección 4.5 para “integrales impropias de primera especie” que tengan integrandos positivos), el cual se demuestra matemáticamente y dice lo siguiente:

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE: Dadas dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, podemos calcular el límite del cociente de sus términos generales a_n/b_n cuando n tiende a $+\infty$.

1) Si dicho límite es cero o un número positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es “convergente”, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también será “convergente”.

2) Si dicho límite es $+\infty$ o un número positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es “divergente”, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también será “divergente”.

Ejemplo: Tomemos las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$ para compararlas usando este criterio. Calculamos el límite del cociente $\left(\frac{1}{3^n+5n}\right) / \left(\frac{7}{2^n}\right)$ que es $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{7 \cdot (3^n+5n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{5n}{2^n}\right]} = 0$,

porque $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ tiende a $+\infty$ (ya que la base de la potencia es mayor que 1) y $\frac{5n}{2^n}$ tiende a cero (por ser el denominador de esta fracción una “sucesión divergente” de “mayor orden” que la del numerador; ver pág. 2). Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$ es una “serie geométrica” de razón $1/2$ (menor que 1), luego es “convergente”. En conclusión, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ será también “convergente” por este Criterio de Comparación por Límite (caso 1 de este criterio).

Nota: La serie dada no es “geométrica” por culpa del sumando $5n$ del denominador de a_n , pero es minorante de la “geométrica” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, que también “converge” por tener razón $1/3$ (menor que 1), luego tenemos también la “convergencia” de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5n}$ razonando por aplicación directa del Criterio General de Comparación.

Pues bien, un caso particular importante del anterior Criterio de Comparación por Límite se obtiene tomando $b_n = 1/n^p$, con lo cual el cociente a_n/b_n se verá como el producto $n^p \cdot a_n$ y el criterio que se obtiene se llama **Criterio de Pringsheim** (comparación por límite entre una serie de términos positivos dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la serie armónica general $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$):

SERIES NUMÉRICAS

CRITERIO DE PRINGSHEIM: Consiste en buscar el valor de p que haga **finito y diferente de cero** el límite del producto $n^p \cdot a_n$, en cuyo caso el carácter de la serie dada coincidirá con el que posea la “serie armónica general” para ese valor de p (como sabemos, si $p > 1$ es “convergente” y si $p \leq 1$ es “divergente”). Y si lo anterior no es posible, buscar **un valor de p mayor que 1 que haga cero** el límite de $n^p \cdot a_n$ (en cuyo caso la serie dada será “convergente”), o bien buscar **un valor de p menor o igual que 1 que haga $+\infty$** el límite anterior (en cuyo caso la serie dada será “divergente”).

Nota: Alfred Pringsheim fue un matemático polaco-alemán que vivió en la transición del siglo XIX al XX.

Ejemplo 1: Hallar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Cumple “la condición necesaria de convergencia”, luego puede ser “convergente” pero también puede ser “divergente”. El producto mencionado por el Criterio, $n^p \cdot a_n$, es en este caso $\frac{n^p}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ y se comprueba fácilmente que para el valor de $p = 1/2$ el límite de la expresión anterior es $1/2$ (finito y no cero). Por tanto, la serie dada es “divergente” (como la “armónica general” para $p = 1/2$).

Ejemplo 2: Hallar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 n}{n^2}$. Cumple “la condición necesaria de convergencia”, pues al tender n a $+\infty$, el numerador de a_n oscila entre 0 y 1, permaneciendo por tanto acotado, mientras su denominador tiende a $+\infty$, luego el límite del término general es cero. El producto $n^p \cdot a_n$ es en este caso $\frac{n^p \cdot \text{sen}^2 n}{n^2}$ y no hay un valor de p que haga finito y diferente de cero el límite de dicha expresión (en efecto, si tomamos $p \geq 2$ el límite no existirá por la oscilación permanente de $\text{sen}^2 n$ y para $p < 2$ el límite será siempre cero). Tomando entonces un p entre 1 y 2 (por ejemplo $p = 3/2$), se tendrá que el límite es cero con un p mayor que 1, luego la serie dada es “convergente” (como la “armónica general” para $p = 3/2$).

Ejemplo 3: Hallar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\log_e n}$. Cumple “la condición necesaria de convergencia”. El producto $n^p \cdot a_n$ es en este caso $\frac{n^p}{1+\log_e n}$ y tampoco hay un valor de p que haga finito y diferente de cero el límite de dicha expresión (en efecto, para $p \leq 0$ el límite es cero y para $p > 0$ el límite será $+\infty$, pues tendremos la indeterminación ∞/∞ con el numerador “de mayor orden” que el denominador; ver pág. 2). Tomando entonces un p entre 0 y 1 (por ejemplo $p = 1/2$), se tendrá límite $+\infty$ con un p menor que 1, luego la serie dada es “divergente” (como la “armónica general” para $p = 1/2$).

Ejemplo 4: Hallar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot \sqrt{3n^4-2}}$. Cumple “la condición necesaria de convergencia”, pues el numerador del término general es un infinito (sucesión divergente) de orden 1 y su denominador es un infinito de orden 3. El producto $n^p \cdot a_n$ es $\frac{n^p \cdot (n+1)}{n \cdot \sqrt{3n^4-2}}$, siendo el numerador de orden $p+1$ y el denominador de orden 3. Por tanto, para que el límite correspondiente sea finito y no cero, tendrá que ser $p+1 = 3$, luego deberá ser $p = 2 > 1$. Por tanto, esta serie es “convergente” (como la “armónica general” para $p = 2$).

Ejemplo 5: Hallar “el carácter” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_e n}{n^3}$. Cumple “la condición necesaria de convergencia” pues el denominador es un infinito “de mayor orden” que el numerador (ver pág. 2). El producto $n^p \cdot a_n$ es $\frac{n^p \cdot \log_e n}{n^3}$. Si tomamos $p \geq 3$, el límite será $+\infty$, y si tomamos $p < 3$, el límite será cero. Luego no hay un valor de p que nos haga el límite finito distinto de cero. Pero podemos tomar p entre 1 y 3 (por ejemplo $p = 2$), de modo que el límite será cero con un p mayor que 1. Por tanto, la serie dada es “convergente” (como la “armónica general” para $p = 2$).

SERIES NUMÉRICAS

IMPORTANTE: A veces nos dan una serie de términos positivos sin la expresión de su término general, indicándonos solamente un número suficiente de términos iniciales (igual que ocurre al definir muchas “sucesiones”). Para poder saber “el carácter” de la serie en estos casos, debemos deducir la expresión de su término general basándonos en los valores de los términos dados, suponiendo que los demás siguen la misma ley de formación.

Esto también sucede muchas veces con otros tipos de series (no necesariamente de términos positivos).

Ejemplo 1: Determinar “el carácter” de la serie $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$ Observamos que todos los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 1 y denominadores que son cuadrados de ciertos números naturales que están en progresión aritmética de diferencia 3, siendo el primero 4. Por tanto, deducimos que “el término general” es $a_n = \frac{1}{(3n+1)^2}$ (debemos escribir la expresión que creamos y luego la debemos comprobar para $n = 1, n = 2, n = 3$ y $n = 4$, porque nos han dado los cuatro primeros términos de la serie). Vemos que esta serie es “minorante” de la “serie armónica general” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es “convergente” (pues es $p = 2 > 1$). Luego la serie dada también es “convergente” por el Criterio General de Comparación.

Ejemplo 2: Determinar “el carácter” de la serie $\frac{3}{\sqrt[3]{1}} + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \dots$ Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 3 y denominadores que son raíces cúbicas de números naturales sucesivos, comenzando en 1. Por tanto, “el término general” de esta serie será $a_n = \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$. Vemos que la serie dada es “mayorante” de la “serie armónica general” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, la cual es “divergente” (pues es $p = 1/3 < 1$). (También puede considerarse que es esa serie multiplicada por 3). Luego la serie dada es “divergente” por el Criterio General de Comparación (o por la propiedad 2 de la pág. 4).

Ejemplo 3: Determinar “el carácter” de la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots$ Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a 1 y denominadores que son el producto de n números naturales sucesivos (un factor en a_1 , dos factores en a_2 , tres en a_3 , etc...), empezando siempre por el número $n + 1$ (que es 2 para a_1 , que es 3 para a_2 , que es 4 para a_3 , etc...). Por tanto, “el término general” de esta serie será $a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n}$. Vemos que es una serie que cumple “la condición necesaria de convergencia”. Le aplicamos el Criterio de la Razón, obteniendo

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n-2)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1) \cdot 2n} = \frac{n}{(2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{4n-2}$$

que tiene límite cero (menor que 1). Por tanto, la serie dada es “convergente”.

Ejemplo 4: Determinar “el carácter” de la serie $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots$ Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a $n + 1$ (2 para a_1 , 3 para a_2 , 4 para a_3 , etc...) y denominadores que son productos de dos números naturales que se diferencian en 2 unidades, empezando siempre por el número n (1 para a_1 , 2 para a_2 , 3 para a_3 , etc...). Por tanto, “el término general” de esta serie será $a_n = \frac{n+1}{n \cdot (n+2)}$. Vemos que es una serie que cumple “la condición necesaria de convergencia”. Aplicándole el Criterio de Pringsheim, tenemos el producto $n^p \cdot a_n = \frac{n^p \cdot (n+1)}{n^2 + 2n}$. Y vemos que para $p = 1$ el límite será 1 (finito y no cero). Por consiguiente, esta serie es “divergente” (como la serie armónica).

Ejemplo 5: Determinar “el carácter” de la serie $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \dots$ Observamos que los términos dados son cocientes con numeradores iguales a n y denominadores iguales a $(n + 1)^n$.

SERIES NUMÉRICAS

Por tanto, “el término general” de esta serie es $a_n = \frac{n}{(n+1)^n}$ (cumple “la condición necesaria de convergencia”). Le aplicamos el Criterio de Cauchy: Tenemos $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$, que tiene límite cero, pues $\sqrt[n]{n}$ tiende a 1 (tiene el mismo límite que $\frac{n}{n-1}$). En consecuencia, esta serie es “convergente” (pues el límite de $\sqrt[n]{a_n}$ ha resultado menor que 1).

Propiedades de las series de términos positivos

Además de cumplir las cuatro propiedades generales de las series (ver pág. 4), excluyendo las posibilidades de ser divergente a $-\infty$, ser divergente a $\pm\infty$ o ser oscilante, las series de términos positivos cumplen otras propiedades específicas (además de las mencionadas como Criterio General de Comparación, Criterio del Cociente, Criterio de la Raíz, Criterio de Raabe, Criterio de la Integral, Criterio de Comparación por Límite y Criterio de Pringsheim) que son las siguientes (demostrables matemáticamente):

- 1) Se puede alterar arbitrariamente el orden de los términos de una serie de términos positivos sin que se altere “su carácter” (ni su valor, en caso de ser “convergente”).
- 2) En una serie de términos positivos podemos descomponer cualquiera de sus términos en un número finito de sumandos positivos, repitiendo esta operación tantas veces como queramos, sin que la serie cambie de “carácter” (ni cambie de valor en caso de “convergencia”).
- 3) Dadas dos series “convergentes” de términos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot b_2 + a_n \cdot b_1$, es “convergente” y su valor es el producto de los valores de las dos series dadas.
Y si una de las dos series dadas es “divergente” (o lo son ambas), la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ será “divergente”.
Por tanto, la serie producto de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ comenzará así:

$$a_1 \cdot b_1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) + \\ + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) + (a_1 \cdot b_5 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_2 + a_5 \cdot b_1) + \dots$$

Series alternadas

Son todas las que presenten **términos positivos y negativos de forma alternativa**. Por ejemplo, los términos de índice impar podrían ser positivos y los de índice par negativos. O viceversa.

Se demuestra matemáticamente el siguiente Teorema aplicable a este tipo de series:

TEOREMA DE LEIBNIZ: Toda “serie alternada” $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo que los valores absolutos de sus términos formen una “sucesión estrictamente decreciente” y cumpliendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, es “convergente”.

Además, cualquier suma parcial S_n de una “serie alternada” que cumpla lo anterior representa “una aproximación” del valor total de la misma, con un error menor que el valor absoluto del primer término no incluido en S_n , que es $|a_{n+1}|$. Y dicha suma parcial será “una aproximación por defecto” del valor total de la serie si el término a_n (último incluido en S_n) es negativo y será “una aproximación por exceso” si dicho último término es positivo.

SERIES NUMÉRICAS

Nota: Gottfried Leibniz fue un gran matemático y filósofo alemán del siglo XVII. Se le considera, junto al gran Isaac Newton, físico y matemático inglés del mismo siglo, fundador de lo que moderadamente llamamos Cálculo Infinitesimal o Cálculo Diferencial e Integral, muchos de cuyos elementos ya existían en su época, obtenidos por otros matemáticos importantes de siglos anteriores y también del mismo siglo.

Ejemplo 1: La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ es alternada, donde los valores absolutos de sus términos forman “una sucesión estrictamente decreciente” y además cumple “la condición necesaria de convergencia”. Por tanto, es “convergente”, según el Teorema de Leibniz. Además, la primera “aproximación” del valor total de la serie, con error menor que 0’1, será la suma parcial $S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$, puesto que el primer término no incluido en dicha suma es $-\frac{1}{10}$ de valor absoluto 0’1 (además esa “aproximación S_9 ” es “por exceso”, ya que el último sumando que interviene en esa suma parcial es positivo). Pero entonces, la suma parcial S_{10} es la primera aproximación “por defecto” del valor total de la serie, con error menor que 0’1 (ya que “su error es menor que 1/11” y el último sumando que interviene en S_{10} es negativo). O sea, llamando S al valor total de la serie alternada, podemos escribir: $S_{10} < S < S_9$ (obsérvese que la diferencia $S_9 - S_{10}$ es el valor 1/10; por eso $S_9 - S < 0’1$ y también $S - S_{10} < 0’1$). Calculados los valores de ambas sumas parciales, resultan ser: $S_9 \cong 0’74563492$ y $S_{10} \cong 0’64563492$. Así que, abreviando, el valor S de la serie alternada estará entre 0’645 y 0’746.

Del mismo modo, tomando una suma parcial que incluya suficiente número de términos podremos saber el valor de la serie con tanta precisión como queramos. Por ejemplo, para saber el valor de la serie anterior con error menor que una milésima (lo cual nos da una aproximación que tendrá al menos las dos primeras cifras decimales exactas y la tercera exacta o con diferencia de una unidad en más o en menos respecto de la exacta) calcularíamos el valor de $S_{999} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999}$ (si queremos “una aproximación por exceso”) o el valor de $S_{1000} = S_{999} - \frac{1}{1000}$ (si queremos “una aproximación por defecto”). Calculadas las sumas parciales anteriores resulta $S_{999} = 0’6936474\dots$ así como $S_{1000} = 0’6926474\dots$, luego “un valor aproximado” de la serie dada puede escribirse como 0’69 con todas sus cifras exactas (recuérdese que en el párrafo anterior dijimos que ese valor estaría entre 0’645 y 0’746).

EN GENERAL: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es “alternada” cumpliendo las condiciones del Teorema de Leibniz, para obtener una aproximación de su valor con error menor que un ϵ positivo dado, buscaremos el primer término de la serie que tenga valor absoluto menor o igual a ϵ y tomaremos como “aproximación de la serie” la “suma parcial” que incluya hasta el término anterior al encontrado.

Ejemplo 2: Sea la serie alternada $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ (obsérvese que el primer valor de n que se usa en el sumatorio es 2 y no 1, porque para $n = 1$ el denominador del “término general” se hace cero). Los denominadores crecen constantemente (pues n crece más rápido que \sqrt{n}), luego los valores absolutos de los términos de la serie forman “una sucesión estrictamente decreciente” y además se cumple “la condición necesaria de convergencia”, ya que $n - \sqrt{n}$ tiende a $+\infty$. Por tanto, en virtud del Teorema de Leibniz, la serie es “convergente”. Y si nos piden una aproximación de su valor S con error menor que 0’01, buscamos el primer término de la serie cuyo valor absoluto sea menor o igual a 1/100, lo cual se cumplirá cuando $n - \sqrt{n} \geq 100$. Se puede comprobar que esto ocurre a partir de $n = 111$ inclusive (en efecto, $|a_{111}| = \frac{1}{11 - \sqrt{111}} \cong 0’00995$

SERIES NUMÉRICAS

que es menor que 0'01; en cambio $|a_{110}| = \frac{1}{110 \sqrt{110}} \cong 0'01005$ no es menor que 0'01). Por tanto, podemos decir que:

$$S \cong \sum_{n=2}^{110} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{4-\sqrt{4}} - \frac{1}{5-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{110-\sqrt{110}}$$

siendo esta aproximación **por exceso**, ya que el último término incluido es **positivo**. Y para obtener "aproximación **por defecto**" en menos de 0'01, agregaríamos el término siguiente que es $-\frac{1}{111-\sqrt{111}}$.

Ejemplo 3: La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ es "alternada" pero no cumple las condiciones de la hipótesis del Teorema de Leibniz, pues los valores absolutos de sus términos forman la sucesión 1, 1, 1, 1, ... (constante), luego no es estrictamente decreciente, y además el término general, que en este caso es $a_n = (-1)^{n+1}$, no tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, por esta última razón no puede ser "convergente". Pues bien, si analizamos las "sumas parciales" sucesivas tenemos $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0$, etc... Luego la serie es "oscilante", pues la sucesión S_n no tiene límite.

Series de términos positivos y negativos

Se trata de series que tienen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, intercalados en cualquier orden, lo cual incluye a las "series alternadas" como un caso particular.

Si una serie tuviese solamente un número finito de términos negativos, la descompondremos en la suma de una cierta cantidad de sus términos iniciales (donde queden incluidos todos sus términos negativos) más "la serie de términos positivos" que forman los restantes (la cual determinará "el carácter" "convergente" o "divergente a $+\infty$ " de toda la serie dada). Y si una serie tuviese solamente un número finito de términos positivos, la descompondremos en la suma de una cierta cantidad de sus términos iniciales (donde queden incluidos todos sus términos positivos) más "la serie de términos negativos" que forman los restantes (la cual es el producto de $k = -1$ por "la serie de términos positivos" que forman sus valores absolutos, la cual determinará "el carácter" "convergente" o "divergente a $-\infty$ " de la toda serie dada).

Por tanto, en general, en una auténtica "serie de términos positivos y negativos", $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, podremos considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que forman sus términos positivos y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ que forman los valores absolutos de sus términos negativos (ambas de términos positivos). Pues bien, dada una suma parcial S_n de la serie dada, con n suficientemente grande, existirán números naturales n_1 y n_2 de forma que $S_n = S'_{n_1} - S''_{n_2}$, donde $n = n_1 + n_2$, siendo S'_{n_1} una cierta suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y siendo S''_{n_2} otra cierta suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (estamos suponiendo que en la suma S_n de la serie dada hay n_1 términos positivos y n_2 términos negativos). Además, cuando $n \rightarrow \infty$ ocurrirá que $n_1 \rightarrow \infty$ y también $n_2 \rightarrow \infty$.

Pero entonces tenemos el siguiente Teorema que resume las cuatro situaciones posibles:

TEOREMA DE RIEMANN: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una "serie de términos positivos y negativos", sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ la serie que forman solamente sus términos positivos y sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la serie formada solamente por los valores absolutos de sus términos negativos. Entonces:

- 1) Si las dos series mencionadas $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son "convergentes" de valores B y C , se tendrá $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} S'_{n_1} - \lim_{n_2 \rightarrow \infty} S''_{n_2} = B - C$ y entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será "convergente" de valor $B - C$.
- 2) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es "divergente a $+\infty$ " y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es "convergente", tendremos $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ y la serie dada "de términos positivos y negativos" será "divergente a $+\infty$ ".

SERIES NUMÉRICAS

- 3) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es “convergente” y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es “divergente a $+\infty$ ”, tendremos $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ y la serie dada será “divergente a $-\infty$ ”.
- 4) Si ambas series, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, son “divergentes a $+\infty$ ”, el límite de S_n estará en el caso de la indeterminación $\infty - \infty$ y puede suceder cualquier cosa con “el carácter” de la serie dada.

Nota 1: Bernhard Riemann fue un gran matemático alemán del siglo XIX.

Nota 2: En el caso 1) de “convergencia” de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama “**incondicionalmente convergente**”, pues alterando el orden de sus términos sigue siendo “convergente” y sigue teniendo el mismo valor $B - C$. Ya que ese cambio de orden entre sus términos implicará cambio de orden entre los términos de alguna de las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o cambio de orden en ambas (que son de términos positivos), con lo cual no se alterará “el carácter” de ambas ni sus respectivos valores B y C , como se dijo en la propiedad 1 de la pág. 14.

Nota 3: En el caso 4) de “divergencia” de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **podría ser convergente** solamente si se cumple “la condición necesaria de convergencia” que es $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, lo cual obliga a que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ y a que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Y si se diese esta “convergencia”, se dirá que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es “**condicionalmente convergente**”, pues alterando el orden de sus términos **podría perderse esa “convergencia” o podría cambiar el valor de la serie.**

De hecho, se demuestra que en este último caso de “convergencia condicional”, cambiando convenientemente el orden de los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, puede lograrse otra serie que tenga una suma prefijada (la que queramos), que sea “divergente a $+\infty$ ”, que sea “divergente a $-\infty$ ” o que sea “oscilante”, de muchos modos posibles (ver la Nota Importante en la página siguiente).

Ejemplo 1: La serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{49} + \dots$ no es “alternada”, pero es “de términos positivos y negativos”. La “serie de sus términos positivos” es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (“convergente”, por ser “la armónica general” con $p = 2 > 1$) y la “serie de los valores absolutos de sus términos negativos” es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (“divergente”, por ser “la armónica”), luego la serie dada es “divergente a $-\infty$ ” (caso 3) del Teorema de Riemann).

Ejemplo 2: La serie $1^{-3/2} + 2^{-3/2} - 3^{-3/2} - 4^{-3/2} + 5^{-3/2} + 6^{-3/2} - 7^{-3/2} - \dots$ no es “alternada”, pero es “de términos positivos y negativos”. La “serie de sus términos positivos” es $\frac{1}{1^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{5^{3/2}} + \frac{1}{6^{3/2}} + \dots$ (“convergente”, por ser minorante de “la serie armónica general” con $p = 3/2 > 1$) y la “serie de los valores absolutos de sus términos negativos” es $\frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{4^{3/2}} + \frac{1}{7^{3/2}} + \frac{1}{8^{3/2}} + \dots$ (“convergente”, por ser también minorante de “la serie armónica general” con $p = 3/2$), luego la serie dada es “convergente” (“**incondicionalmente convergente**”, como hemos dicho en la Nota 2 correspondiente al caso 1) del Teorema de Riemann).

Ejemplo 3: La serie $1/4 - 3/6 + 5/8 - 7/10 + 9/12 - 11/14 \dots$ es “alternada”, pero “no cumple la condición necesaria de convergencia”, ya que su término general es $(-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2n+2}$ y el mismo no tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$ (los términos impares tienden a 1 y los términos pares tienden a -1). Por tanto, esta serie no puede ser “convergente”. La “serie de sus términos posi-

SERIES NUMÉRICAS

vos” es $1/4 + 5/8 + 9/12 + \dots$, de “término general” $b_n = \frac{4n-3}{4n}$ (que tiene límite 1, luego esta serie es “divergente a $+\infty$ ”) y la “serie de los valores absolutos de sus términos negativos” es $3/6 + 7/10 + 11/14 + \dots$, de “término general” $c_n = \frac{4n-1}{4n+2}$ (que también tiene límite 1, luego esta serie también es “divergente a $+\infty$ ”). Entonces, la serie dada está en el caso 4) del Teorema de Riemann y en este caso es “oscilante”, ya que sus sumas parciales aumentan y disminuyen sucesivamente en valores cada vez más próximos a 1.

Ejemplo 4: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ es “alternada” y cumple las condiciones del Teorema de Leibniz, luego es “convergente”. La “serie de sus términos positivos” es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$, luego es “divergente a $+\infty$ ” por serlo “la armónica”. Y la “serie de los valores absolutos de sus términos negativos” es $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ de “término general” $c_n = \frac{1}{2n-1}$ y por el Criterio de Pringsheim resulta ser “divergente a $+\infty$ ” (el límite de $n^p \cdot c_n = \frac{n^p}{2n-1}$ es $1/2$, finito y no cero, para $p = 1$). Por tanto, las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son “divergentes” (caso 4) del Teorema de Riemann). Sin embargo, en este caso “la serie dada no es oscilante” como en el ejemplo anterior, pues al tender a cero los “términos generales” b_n y c_n , las sumas parciales de la serie dada aumentan y disminuyen sucesivamente en cantidades cada vez menores, estabilizándose alrededor de un cierto número real, que es el valor de la serie dada. Esta serie es “condicionalmente convergente”.

NOTA IMPORTANTE: Si quisiésemos obtener una serie “convergente” de valor prefijado S positivo, a partir de la serie dada anteriormente (mediante cambio de orden de sus términos), tomaríamos inicialmente suficientes términos positivos consecutivos de la misma, con el orden que tenían, hasta que su suma fuese mayor que S (no más de los necesarios para esto, si es que se necesitan, pues S puede ser un valor pequeño; esto puede lograrse, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es “divergente a $+\infty$ ”, con lo cual sus sumas parciales llegarán a ser mayores que cualquier número positivo dado); luego empezaremos a agregar términos negativos consecutivos, con el orden que tenían, hasta que la nueva suma parcial llegue a ser menor que S (tampoco tomaríamos más de los necesarios; esto es posible porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es “divergente a $+\infty$ ”, con lo cual sus sumas parciales también llegarán a crecer todo lo que queramos y las estaríamos restando); a continuación volveríamos a agregar términos positivos consecutivos que no hubiésemos tomado anteriormente (en el mismo orden y no más de los necesarios) de forma que esa tercera suma parcial vuelva a superar el valor S ; etcétera. De este modo, la sucesión de las nuevas sumas parciales conseguidas se irán aproximando al valor S prefijado, estando cada vez más cerca de dicho valor (porque a medida que avancemos en este proceso, tanto los términos positivos como los valores absolutos de los términos negativos que agreguemos son cada vez más pequeños, por tender todos a cero).

Y de un modo similar se puede proceder si tomásemos S cero o negativo. (Si el valor prefijado S fuese negativo, habrá que comenzar tomando términos negativos hasta obtener una suma parcial menor que S , para luego agregar términos positivos en cantidad suficiente, etc...). (Y si el valor prefijado fuese $S = 0$, el primer término positivo ya nos daría una suma parcial superior a S , al cual agregaríamos términos negativos, etc...).

Así mismo, podremos reordenar los términos de la serie dada para que resulte una serie “divergente a $+\infty$ ”, para que resulte una serie “divergente a $-\infty$ ” o para que resulte una serie “oscilante” (como decíamos en el recuadro de la Nota 3 de la página anterior).

Por ejemplo, si quisiésemos una nueva serie que fuese “divergente a $+\infty$ ”, tomaríamos inicialmente suficientes términos positivos consecutivos hasta que su suma supere por ejemplo al número 10 (no más de los necesarios); luego incluiremos suficientes términos negativos consecutivos

SERIES NUMÉRICAS

hasta que la suma parcial obtenida fuese menor que 10 (no más de los necesarios); a continuación volvemos a agregar suficientes términos positivos consecutivos hasta que la nueva suma parcial supere el número 100 (no más de los necesarios); etcétera. Así la sucesión obtenida de sumas parciales llegará a superar 10, 100, 1000, etc... con lo cual tendrá límite $+\infty$, pues siguiendo así, a partir de alguna suma parcial, **todas** llegarán a superar a cualquier número positivo K por grande que este sea.

Y de modo análogo se procedería para lograr que la serie sea “divergente a $-\infty$ ”, buscando una primera suma parcial menor que -10 , agregando algunos términos positivos para subir de -10 y luego agregando negativos hasta obtener una suma parcial menor que -100 , etcétera.

Y para lograr una nueva serie que sea “oscilante” a partir de la dada, con sumas que oscilen alrededor de cualquier valor K , elegimos un cierto $H > 0$ y, tomando los términos iniciales de la serie dada que nos convenga (todos positivos o todos negativos según el signo de $K + H$), buscaremos una primera suma parcial superior a $K + H$; luego agregaremos suficientes términos negativos nuevos de la serie dada para llegar a una suma parcial menor que $K - H$; a continuación agregaremos nuevos términos positivos para llegar a otra suma parcial superior a $K + H$; luego agregaremos otra vez nuevos términos negativos para llegar a una suma parcial menor que $K - H$; etcétera. Así la sucesión obtenida de sumas parciales no tendrá límite, pues quedará oscilando indefinidamente cada vez más cerca de $K - H$ y $K + H$ (que distan entre sí $2H > 0$).

Otro procedimiento muy utilizado para analizar el carácter de “una serie de términos positivos y negativos” es considerar la nueva serie formada por “los valores absolutos de todos los términos de la serie dada”. Al respecto, se demuestra el siguiente Teorema:

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA ABSOLUTA (O DE DIRICHLET): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una “serie de términos positivos y negativos”. Si su “serie de valores absolutos” $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es “convergente”, la serie dada también será “convergente” (se le llama “**absolutamente convergente**”).

Y si “la serie de valores absolutos” es “divergente a $+\infty$ ”, la serie dada se puede llamar “**absolutamente divergente**” pero **no puede asegurarse “su carácter”** (puede ser “convergente”, “divergente” u “oscilante”).

Nota: Peter Gustav Dirichlet fue un matemático alemán del siglo XIX.

En efecto, al ser “convergente” la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, serán necesariamente “convergentes” las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (formada por “los términos positivos de la serie dada”) y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (formada por “los valores absolutos de los términos negativos de la serie dada”), pues sus respectivas sumas parciales serán menores que ciertas sumas parciales suficientemente avanzadas de “la serie de valores absolutos” $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (las que incluyan todos los términos de las anteriores), pero éstas últimas estarán acotadas superiormente por el valor de esta “serie de valores absolutos”, con lo cual las sucesiones de sumas parciales de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ también estarán acotadas superiormente por ese mismo valor y entonces dichas series serán “convergentes”, de valores respectivos B y C . Pero, según el apartado 1) del Teorema de Riemann (pág. 16), la “convergencia” de las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ implica la “convergencia” de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de “términos positivos y negativos” dada (la llamábamos “**incondicionalmente convergente**” en ese caso) y su valor será $B - C$.

Por tanto, vemos que “absolutamente convergente” implica “incondicionalmente convergente”.

Y recíprocamente, si la serie dada es “**incondicionalmente convergente**”, tendrá que estar en el apartado 1) del Teorema de Riemann y entonces ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serán “convergentes” de valores B y C respectivamente, con lo cual la “serie de los valores absolutos” será también “convergente” (ya que las sumas parciales de esta última serán el resultado de sumar entre

SERIES NUMÉRICAS

sí sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, con lo cual su límite será $B + C$).

Por tanto, vemos también que **“incondicionalmente convergente”** implica **“absolutamente convergente”**.

CONCLUSIÓN IMPORTANTE: Las denominaciones **“convergencia absoluta”** y **“convergencia incondicional”** son equivalentes.

En cambio, si la serie de valores absolutos “diverge”, necesariamente alguna de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ será “divergente”, luego estaremos en los apartados 2), 3) o 4) del Teorema de Riemann y entonces la serie dada será “divergente a $+\infty$ ” (según apartado 2), o la serie dada será “divergente a $-\infty$ ” (según apartado 3) o bien no puede asegurarse “el carácter” de la serie dada (según apartado 4). Y en este último caso cabe la posibilidad de que la serie dada sea “convergente” (si cumple “la condición necesaria” para ello), pero entonces la llamaríamos **“concondicionalmente convergente”**.

De los ejemplos vistos en las páginas 17 y 18, ¿cuáles corresponden a series “absolutamente convergentes” y cuáles a series “absolutamente divergentes”?

La del ejemplo 1) era “divergente a $-\infty$ ” (caso 3 del Teorema de Riemann) y entonces será **“absolutamente divergente”**. En efecto, “su serie de valores absolutos” es “divergente”, pues sus sumas parciales de índices múltiplos de 6 son superiores a ciertas sumas parciales de índices múltiplos de 3 de “la serie armónica”, las cuales llegarán a ser tan avanzadas como queramos (y por tanto sus valores tan grandes como queramos, porque tienden a $+\infty$). En efecto, llamando S a las sumas parciales de “la serie de valores absolutos de la dada” y llamando S' a las sumas parciales de “la serie armónica”, vemos claramente que $S_6 > S'_3$, $S_{12} > S'_6$, $S_{18} > S'_9$, y en general $S_{6n} > S'_{3n}$. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{6n} = +\infty$, con lo cual el límite de toda la sucesión de sumas parciales S_n también será $+\infty$, porque dicha sucesión es “estrictamente creciente” y las demás sumas quedarán intercaladas.

La del ejemplo 2) era “incondicionalmente convergente” (caso 1 del Teorema de Riemann), luego tendrá que ser **“absolutamente convergente”** (y efectivamente lo es, pues “su serie de valores absolutos” es “la armónica general” con $p = 3/2$).

La del ejemplo 3) era “oscilante” (caso 4 del Teorema de Riemann), luego será también **“absolutamente divergente”** (en efecto, “su serie de valores absolutos” tiene término general $|a_n| = \frac{2n-1}{2n+2}$ por lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, y al no ser “convergente” será “divergente a $+\infty$ ”).

Y la del ejemplo 4) era “convergente”, pero estaba también en el caso 4) del Teorema de Riemann, luego se trataba de una **“convergencia condicional”** y tendrá que ser **“absolutamente divergente”** (en efecto, “su serie de valores absolutos” es “la armónica”).

Finalmente, daremos el Teorema que se refiere al **producto de dos series “absolutamente convergentes”**:

TEOREMA: Sean dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ “absolutamente convergentes”, de valores respectivos A y B . Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_1$ es “absolutamente convergente” y su valor es $A \cdot B$.
--

SERIES NUMÉRICAS

Nota: Se había establecido ya este Teorema para “series de términos positivos convergentes” (propiedad 3 de la pág. 14) y ahora se extiende a “series de términos positivos y negativos” que sean “absolutamente convergentes”.

Ejemplo:

El producto de la serie $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \dots$ por la serie $-5 + \frac{5}{3} - \frac{5}{9} + \frac{5}{27} - \frac{5}{81} + \dots$

(ambas “absolutamente convergentes”, pues la “serie de valores absolutos” de la primera es “geométrica” de razón $1/2$ y la “serie de valores absolutos” de la segunda es “geométrica” de razón $1/3$) es una nueva serie que tiene:

primer término $3 \cdot (-5) = -15$

segundo término $3 \cdot \frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-5) = \frac{25}{2}$

tercer término $3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{5}{3} + \frac{3}{4} \cdot (-5) = -\frac{95}{12}$

cuarto término $3 \cdot \frac{5}{27} + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot (-5) = \frac{325}{72}$

etcétera...

Por tanto, la “serie producto” empieza $-15 + \frac{25}{2} - \frac{95}{12} + \frac{325}{72} - \dots$

Además, la primera serie dada tiene valor 2 (pues es “geométrica” de razón $-1/2$ con primer término 3) y la segunda tiene valor $-15/4$ (pues es “geométrica” de razón $-1/3$ con primer término -5), luego esta “serie producto” tendrá valor $-15/2$.
