

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

(Prerrequisitos: Funciones reales de una variable real. Resumen de cónicas horizontales y verticales. Planos y rectas en el espacio. Resumen de cuádricas verticales. Inecuaciones con dos y tres variables)

Funciones reales de dos variables reales

Se llama “**función real de dos variables reales**” a cualquier modo de asignar, **a cada punto** (x, y) **de un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^2$** (llamado “**dominio**” de la función), **un solo valor real** $f(x, y)$, el cual depende del punto considerado en cada caso. El valor $f(x, y)$ se llama “**la imagen del punto (x, y) por la función f** ”.

En la práctica diremos “función de dos variables” y se sobrentiende lo de “reales”, mientras no haya riesgo de confusión.

Consideraremos normalmente que el conjunto $\mathbb{R}^2$ queda representado en el plano OXY de un sistema de coordenadas rectangulares del espacio (orientado positivamente), con lo cual “el dominio” de f será un subconjunto de dicho plano y que las imágenes de la función quedan representadas en el eje OZ de este sistema tridimensional. Además, funciones diferentes serán designadas por letras diferentes f, g, h , etc... (también, a veces, representaremos funciones diferentes usando una misma letra con diferentes subíndices, como $f_1, f_2, f_3, \dots$).

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES: Una “función de dos variables” **bien definida** tiene que cumplir dos características: 1) No puede dejar sin imagen a ningún punto (x, y) de su “dominio” y 2) No puede dar más de una imagen para alguno de esos puntos del “dominio”.

Sin embargo, dos o más puntos del dominio podrán tener la misma imagen o tener imágenes diferentes.

Llamaremos a las variables x e y “variables independientes”, pues sus valores son números reales elegidos libremente, con tal que el punto (x, y) pertenezca al “dominio” de la función f considerada en cada caso. Y como los valores obtenidos por la función también son números reales (por lo cual se habla de “función real”), consideramos una nueva variable (que frecuentemente llamaremos z) la cual tomará esos valores. Entonces se escribe $z = f(x, y)$ y a esta variable z se le llama “variable dependiente” de la función, porque sus valores dependen de los valores elegidos libremente para las “variables independientes” x e y .

Cuando no se especifique “el dominio” de una función, supondremos siempre que es **el más grande posible**, de acuerdo a la definición dada para dicha función. Por ejemplo, para la función definida por la ecuación $z = \sqrt{2x - 3y + 4}$ (**definición explícita dada por una sola ecuación**), “el dominio” será el conjunto de puntos (x, y) del plano OXY que cumplan $2x - 3y + 4 \geq 0$, los cuales son los del “semiplano” que contiene al origen de coordenadas, de los dos limitados por la recta $2x - 3y + 4 = 0$, estando también incluidos los puntos de dicha recta (ver Sección 8.10).

Y se llama “**recorrido**” de una función de dos variables $f(x, y)$ al conjunto formado por las distintas imágenes dadas por esa función, obtenidas a partir de todos los puntos (x, y) de su “dominio”. Por tanto, “el recorrido” es un conjunto de números reales que puede ser todo $\mathbb{R}$, puede ser algún intervalo o una unión de intervalos disjuntos, o bien puede incluir solamente un número real o varios números reales).

Como hemos convenido en representar los valores de la función en el eje OZ, el “recorrido” de la misma será geoméricamente una parte de dicho eje o todo el eje.

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

Gráfica de una función de dos variables

“La gráfica” de la función $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ que tengan coordenadas $(x, y, f(x, y))$, con (x, y) variando sobre **todo** “el dominio” de la función.

O sea, que la “gráfica” de la función $f(x, y)$ estará formada por todos los puntos (x, y, z) del espacio que cumplan la ecuación $z = f(x, y)$, con lo cual su proyección sobre el plano OXY coincidirá con el “dominio” de la función y su proyección sobre el eje OZ será el “recorrido” de la misma.

Normalmente, para funciones sencillas, “la gráfica” es una cierta superficie del espacio, la cual puede ser un plano, alguna “cuádrica” o partes de los mismos (o sea, “media superficie esférica”, “medio elipsoide”, “medio hiperboloide vertical”, “un paraboloides vertical”, “media superficie cónica vertical” o “media superficie cilíndrica horizontal”; ver la Sección 8.4 y la explicación dada más abajo). Con lo cual, muchas veces dicha superficie no es dibujable en forma completa (por ser ilimitada), pero podremos dibujar una parte de la misma y dar a entender que sigue prolongándose. Pero cuando la función no es muy sencilla, “su gráfica” puede ser un conjunto más complicado de puntos del espacio.

Sin embargo, cualquier superficie dada en el espacio **no es interpretable** como “gráfica” de una función de dos variables. En efecto, para que una superficie S del espacio pueda ser considerada como “la gráfica” de una función $z = f(x, y)$, es preciso que ocurra lo siguiente: Cualquier recta vertical del espacio debe cortar a S como máximo en un solo punto (puede haber rectas verticales que no corten a S , pero ninguna puede cortar a S en dos o más puntos).

Por ejemplo, la “superficie esférica” S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (de centro el origen y radio r) **no es** “gráfica” de una función $z = f(x, y)$, porque hay rectas verticales que dan **dos puntos de corte a S** .

Pero su mitad superior (que incluye sólo los puntos donde $z \geq 0$) **sí es** “la gráfica” de la función definida en forma explícita por la ecuación $z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Y su mitad inferior (que incluye los puntos donde es $z \leq 0$) **también es** “la gráfica” de la otra función, definida en este caso por la ecuación $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Este ejemplo es la explicación de que la “gráfica” de una función $z = f(x, y)$ pueda ser también “medio elipsoide”, “medio hiperboloide vertical”, etcétera (como dijimos anteriormente en el tercer párrafo de este apartado).

Del mismo modo, un plano perpendicular a OXY **nunca podrá interpretarse** como gráfica de una función $z = f(x, y)$, pues toda recta vertical no lo tocará o lo cortará en sus infinitos puntos. Igual ocurre con una “superficie cilíndrica vertical” (nótese que habíamos nombrado “media superficie cilíndrica horizontal” como posible “gráfica” en el tercer párrafo).

Curvas de nivel

Dado un valor real k perteneciente al “recorrido” de una función $f(x, y)$, se llama “**curva de nivel k de la función**” al conjunto de todos los puntos (x, y) del “dominio” de f para los cuales el valor de la función sea siempre el número k .

Por ello, “la curva de nivel k ” tendrá ecuación $f(x, y) = k$, con (x, y) variando en todo el “dominio” de la función. Dichos puntos pueden formar una curva contenida en dicho “dominio” (de ahí su nombre de “curva de nivel”), o pueden formar una recta, o ser parte de una curva o de una recta, o incluso pueden ser puntos desordenados del “dominio”. Todo depende de cómo sea la función.

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

Lo único seguro es que “la curva de nivel k ” tendrá al menos un punto (por haber tomado k en el “recorrido” de la función) y geoméricamente corresponde al corte de “la gráfica” de la función $z = f(x, y)$ con el plano horizontal $z = k$, proyectado dicho corte verticalmente sobre el plano OXY (si en algún caso no existiese corte, es porque habremos tomado k fuera del “recorrido” de la función).

Así, si la función fuese **la altura sobre el nivel del mar** de los puntos de un determinado territorio, donde las variables x e y son las coordenadas que sitúan dichos puntos en un mapa del territorio (el cual representaría el “dominio” de esa función), las “curvas de nivel” estarán formadas por todos los puntos del territorio que tengan una misma altura sobre el nivel del mar (en la práctica se señalan en el mapa solamente ciertas “curvas de nivel”, omitiéndose las intermedias, porque en caso contrario el mapa no se podría entender).

De igual modo, si la función fuese **la temperatura** en los puntos del territorio, las “curvas de nivel” en el correspondiente mapa serían las “isotermas” del territorio (en un cierto momento).

Y si la función fuese **la presión atmosférica** en los puntos del territorio, las “curvas de nivel” serían las “isobaras” del territorio (correspondientes a un cierto instante).

Ejemplos de “funciones de dos variables”, con “dominios”, “recorridos”, “gráficas” y “curvas de nivel”, interpretados en un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas:

1) Para la función definida como $z = x^2 + y^2$ se tiene: Su “dominio” es todo el plano OXY (o sea, $\mathbb{R}^2$), pues, elegido un valor real cualquiera para x y un valor real cualquiera para y , la expresión $x^2 + y^2$ da siempre un único número real para z , dependiente de los valores elegidos para dichas variables independientes. Su “recorrido” es todo el semieje positivo OZ, o sea el intervalo $[0, +\infty)$ (porque siempre es $x^2 + y^2 \geq 0$, y cuando se elijan valores grandes de las variables independientes, resultan valores arbitrariamente grandes de la función). Su “gráfica” está formada por el conjunto de puntos del espacio que cumplan la ecuación $z = x^2 + y^2$ (es un “paraboloide de revolución vertical”, con vértice en el origen y orientado hacia OZ positivo; ver la Sección 8.9). Y sus “curvas de nivel” son de ecuaciones $x^2 + y^2 = k$, con $k \geq 0$ (si $k = 0$ resulta un único punto que es el origen, y si $k > 0$ la “curva de nivel” es una circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{k}$). Geométricamente, el corte del “paraboloide” $z = x^2 + y^2$ (“gráfica” de la función) con el plano $z = 0$ es efectivamente un solo punto (el origen), y los cortes de dicho “paraboloide” con los planos horizontales que están por encima de OXY ($z = k$, con $k > 0$) son circunferencias del espacio, cuyas proyecciones sobre OXY son las “curvas de nivel” mencionadas. (HACER UN DIBUJO APROXIMADO PARA VER LO QUE DECIMOS).

2) Para la función definida como $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ se tiene: Su “dominio” es la región del plano OXY definida por la inequación $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, pues el radicando tiene que ser positivo o cero para que la raíz dé valores reales; entonces el “dominio” es el círculo de centro el origen y radio 3, incluida su circunferencia (ver Sección 8.10). Su “recorrido” es el intervalo $[0, 3]$ del eje OZ, porque cuando tomamos $x = 0$ e $y = 0$ (centro del “dominio”) la imagen obtenida es la mayor posible ($\sqrt{9} = 3$), y cuando elegimos un punto (x, y) fuera del origen, llamando r a la distancia del punto al origen, la función toma valores que son de la forma $\sqrt{9 - r^2}$, con r creciendo de 0 a 3 a medida que nos alejamos del origen, con lo cual dichos valores decrecen de 3 a 0. Su “gráfica” está formada por los puntos del espacio que cumplan la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, los cuales por tanto cumplen $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ pero con la condición $z \geq 0$ (es la mitad superior de la “superficie esférica” de centro el origen y radio 3). Y sus “curvas de nivel” tienen ecuaciones $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$, con $0 \leq k \leq 3$ (o sea, sus ecuaciones son de la forma $x^2 + y^2 = 9 - k^2$), con k entre 0 y 3, que corresponden a circunferencias en el plano OXY de centro el origen y radios $\sqrt{9 - k^2}$; cuando es $k = 3$ resulta un solo punto porque el radio es cero,

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

y cuando $k < 3$ resultan verdaderas circunferencias). Geométricamente, el corte de la “semisuperficie esférica” de radio 3 y centro el origen (“gráfica” de la función) con el plano $z = 3$ es el punto $(0, 0, 3)$, que proyectado sobre OXY nos da el $(0, 0)$. Y los cortes de dicha “semisuperficie esférica” con planos horizontales intermedios entre $z = 0$ y $z = 3$, nos darán circunferencias en el espacio, cuyas proyecciones sobre OXY son las “curvas de nivel” mencionadas. (HACER UN DIBUJO APROXIMADO PARA VER LO QUE DECIMOS).

3) Para la función definida como $z = 2x - 3y + 1$ se tiene: Su “dominio” es todo el plano OXY (la expresión $2x - 3y + 1$ da siempre un único valor real z , para cualesquiera valores reales de las dos variables independientes). Su “recorrido” es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, o sea todo el eje OZ (porque al variar x e y de todos los modos posibles, los valores de $2x - 3y + 1$ recorrerán todos los reales). Su “gráfica” está formada por todos los puntos del espacio que cumplan la ecuación $z = 2x - 3y + 1$, o bien $2x - 3y - z + 1 = 0$ (es “un plano” que corta el eje OX en el punto $-1/2$, corta al eje OY en el punto $1/3$ y corta al eje OZ en el punto 1). Y sus “curvas de nivel” tendrán ecuaciones $2x - 3y + 1 = k$ (siendo k el valor real que queramos), o sea, son “las rectas” del plano OXY de ecuaciones $2x - 3y + (1 - k) = 0$ (todas paralelas entre sí). Geométricamente, los cortes del plano $2x - 3y - z + 1 = 0$ (“gráfica” de la función) con los distintos planos horizontales $z = k$, nos darán “rectas del espacio” paralelas entre sí, cuyas proyecciones sobre el plano OXY son las “curvas de nivel” mencionadas. (HACER UN DIBUJO APROXIMADO PARA VER LO QUE DECIMOS).

4) Para la función $z = \ln(4x^2 + 9y^2 - 36)$ se tiene: Su “dominio” es la región del plano OXY definida por la inecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$, que es “la región externa” correspondiente a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (esta no incluida). (Ver Sección 8.10). Su “recorrido” es el intervalo $(-\infty, +\infty)$, o sea todo el eje OZ (porque al variar $4x^2 + 9y^2 - 36$ en todos los reales positivos, su logaritmo variará en todos los reales). Su “gráfica” está formada por todos los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que cumplan la ecuación dada, los cuales forman una superficie parecida a una trompeta vertical que se aproxima por fuera, en forma asintótica, al “cilindro elíptico vertical” de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, con la parte más estrecha hacia abajo (valores de z negativos) y con la parte más ancha hacia arriba (valores de z positivos); en efecto, cuando el punto (x, y) se acerca por fuera a la elipse que tiene la anterior ecuación, los valores de la expresión $4x^2 + 9y^2 - 36$ se acercan a cero siendo positivos, con lo cual su logaritmo neperiano tenderá a $-\infty$, y cuando (x, y) se aleja de la elipse mencionada, la expresión $4x^2 + 9y^2 - 36$ crece hasta superar a cualquier número positivo, con lo cual su logaritmo tenderá a $+\infty$. Finalmente, sus “curvas de nivel” tendrán las ecuaciones $\ln(4x^2 + 9y^2 - 36) = k$ (k real cualquiera), que pueden escribirse $4x^2 + 9y^2 = e^k + 36$ (son “elipses” de semiejes $a = \sqrt{\frac{e^k + 36}{4}}$ y $b = \sqrt{\frac{e^k + 36}{9}}$, todas centradas en el origen; ver Sección 8.4). Estas “elipses”, cada vez más grandes a medida que aumenta k , son las proyecciones sobre OXY de “las elipses del espacio” que se obtienen al cortar “la gráfica” (con forma de trompeta vertical, como dijimos) por los planos horizontales $z = k$. (HACER UN DIBUJO APROXIMADO PARA VER LO QUE DECIMOS. ESTE CASO NO ES FÁCIL DE VER POR LA COMPLICACIÓN DE LA GRÁFICA DESCRITA).

5) Para la función cuyo “dominio” incluye solamente los puntos $(1, -2)$, $(2, 3)$ y $(\pi, \sqrt{2})$ y que da los valores $f(1, -2) = 1/2$, $f(2, 3) = -\sqrt[3]{5}$ y $f(\pi, \sqrt{2}) = 0$, se tiene: Su “dominio” es el conjunto de OXY que posee únicamente los tres puntos dados. Su “recorrido” es el conjunto de los tres valores de la función: $\{-\sqrt[3]{5}, 0, 1/2\}$. Su “gráfica” está formada por los tres únicos puntos del espacio que tienen coordenadas $(1, -2, 1/2)$, $(2, 3, -\sqrt[3]{5})$ y $(\pi, \sqrt{2}, 0)$. Y sólo tiene tres “curvas de nivel”, cada una con un único punto (la “curva de nivel $-\sqrt[3]{5}$ ” es el punto $(2, 3)$; la “curva de nivel 0” es el punto $(\pi, \sqrt{2})$ y la “curva de nivel $1/2$ ” es el punto $(1, -2)$).

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

6) Si se tratase de una función con el mismo “dominio” anterior, pero que sus valores fuesen $f(1, -2) = 5$, $f(2, 3) = -1$ y $f(\pi, \sqrt{2}) = -1$, se tendría: El mismo “dominio”. El “recorrido” sería el conjunto $\{-1, 5\}$, con dos únicos valores reales. Su “gráfica” incluiría los tres puntos del espacio $(1, -2, 5)$, $(2, 3, -1)$ y $(\pi, \sqrt{2}, -1)$. Y tendría sólo dos “curvas de nivel” (la “de nivel -1 ” formada por los puntos $(2, 3)$ y $(\pi, \sqrt{2})$, y la “de nivel 5 ” formada por el punto $(1, -2)$).

NOTA: Al igual que las “funciones reales de **una** variable real”, las “funciones reales de **dos** variables reales” pueden definirse de varios modos:

1) **Definición explícita**, donde se da “la variable dependiente” despejada (o pueda despejarse), a través de **una o de varias expresiones** donde aparecen normalmente las dos “variables independientes”. Cuando se den dos o más de estas expresiones, diremos que la “definición explícita” es “**a trozos**”.

2) **Definición implícita**, donde no hay modo de dar la “variable dependiente” despejada, sino que tendremos una ecuación donde aparecen mezcladas, en general, la “variable dependiente” y las dos “variables independientes” (expresión que deberá cumplir ciertas condiciones, las cuales se darán más adelante en la Sección 6.6).

Ejemplos de funciones de dos variables “definidas explícitamente” son todas las dadas en las páginas 3 y 4 anteriores, siendo las dos últimas “funciones definidas a trozos” muy sencillas.

Y un ejemplo de función de dos variables “definida implícitamente” sería la que queda definida por la ecuación $xyz^3 - 3(x + y)z + 8 = 0$ en “un cierto entorno” del punto $(1, -1)$, de forma que el valor dado por esa función en dicho punto sea $z = 2$ (en efecto, se ve que z no es despejable usando la ecuación dada, por ser de tercer grado no factorizable, con z^3 y además z ; pero hay un Teorema que daremos en la Sección 6.6, el cual nos asegura **la existencia de una función f de “variable dependiente” z y de “variables independientes” x e y** , definida en un cierto círculo de centro el punto $(1, -1)$ (el cual es el “entorno” aludido anteriormente), de modo que la imagen por f del citado punto $(1, -1)$ sea $z = 2$. Obsérvese que entonces el punto del espacio $(1, -1, 2)$ deberá estar en “la gráfica” de dicha función f , y, efectivamente, ese punto cumple la ecuación dada (que es la ecuación de su “gráfica”), como podemos comprobar: $1 \cdot (-1) \cdot 2^3 - 3 \cdot (1 - 1) \cdot 2 + 8 = 0$.

Funciones reales de tres variables reales

El concepto de “**función real de tres variables reales**” es similar al de “función real de dos variables reales”. Pero ahora hay “tres variables independientes” que podemos llamar x , y , z , cuyos valores son números reales cualesquiera, de modo que el punto del espacio de coordenadas (x, y, z) pertenezca al “dominio de la función” (el cual será un subconjunto de $\mathbb{R}^3$). (Recordemos que “el dominio” de una función de dos variables estaba siempre contenido en $\mathbb{R}^2$, y que “el dominio” de una función de una variable estaba siempre contenido en $\mathbb{R}$; pues bien, “el dominio” de una función de tres variables estará siempre contenido en $\mathbb{R}^3$).

Así, **para cada** punto (x, y, z) del “dominio” de una función f de tres variables, existirá **solamente un valor real** dado por dicha función (que llamamos “su imagen” dada por f y que representaremos por $f(x, y, z)$). Dicho valor real dependerá del punto (x, y, z) elegido en el “dominio” de f , de modo que dos o más puntos diferentes del “dominio” podrán tener imágenes distintas o imágenes iguales por la función (las cuales estarán en el “recorrido” de f).

Al usar la “variable dependiente”, que podemos llamar w , la función se expresa $w = f(x, y, z)$.

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

Y cuando (x, y, z) varíe en todo “el dominio” de f , la variable w variará en todo el “recorrido” de dicha función. Entonces, el “recorrido” es un conjunto de números reales, como ocurre con las funciones de una variable y de dos variables. Por tanto, el “recorrido” estará siempre contenido en $\mathbb{R}$ (puede ser todo $\mathbb{R}$, puede ser un intervalo o una unión de intervalos disjuntos, o bien puede ser un solo valor real o varios valores reales, como ocurría para las funciones de una y de dos variables).

Además, la “gráfica” de una función f de tres variables será el conjunto de **puntos de $\mathbb{R}^4$** , cuyas coordenadas sean de la forma $(x, y, z, f(x, y, z))$, con (x, y, z) variando en **todo** “el dominio” de la función f . Por tanto, **dicha “gráfica” no podrá representarse geoméricamente**, ya que sus puntos tienen **cuatro coordenadas**! (Pero “el dominio” de la función **sí** podrá representarse geoméricamente en $\mathbb{R}^3$, ya que es un subconjunto de dicho espacio).

Finalmente, ¿qué es lo análogo a las “curvas de nivel” para funciones de tres variables? Son las llamadas **“superficies de nivel”**. De modo que, dado un valor cualquiera k del “recorrido” de la función $w = f(x, y, z)$, se llama “superficie de nivel k de dicha función” al conjunto de todos los puntos (x, y, z) del “dominio” de f para los cuales la función dé siempre el valor k (tiene que haber un punto como mínimo en la “superficie de nivel k ”, si el valor k ha sido tomado en el “recorrido” de f).

Por tanto, la ecuación que cumplen todos los puntos de “la superficie de nivel k ” será

$$\boxed{f(x, y, z) = k} \text{ , con } (x, y, z) \text{ variando en todo “el dominio” de } f$$

Obsérvese que, para funciones de tres variables, una “superficie de nivel” sí puede ser representada geoméricamente, porque sus puntos tienen tres coordenadas (podrá ser una verdadera superficie del espacio o parte de ella, como puedan ser un plano o una cuádrica; pero también podrá ser un solo punto o varios puntos aislados del espacio). Todo dependerá de cómo sea la función.

NOTA: Hay modos de definir “funciones de tres variables” similares a los que hemos descrito para “funciones de dos variables”. O sea, se pueden definir “explícitamente” mediante una sola ecuación, “explícitamente” mediante dos o más ecuaciones (también llamada “definición a trozos”) y se pueden definir “implícitamente”.

Pero la función puede estar “definida implícitamente” y ocurra que podamos despejar la “variable dependiente” de la ecuación dada, con lo cual será en realidad “una función explícita” (que podríamos considerar oculta); ahora bien, si la función está “definida implícitamente” pero no puede despejarse su “variable dependiente”, la función será considerada como **“una función implícita”**.

Ejemplos de “funciones de tres variables”, con “dominios”, “recorridos” y “superficies de nivel”, interpretados en un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas (obsérvese que no hablamos ahora de “gráficas”):

1) Para la función definida como $\boxed{w = x^2 + y^2 + z^2}$ se tiene: Su “dominio” es todo $\mathbb{R}^3$. Su “recorrido” es el intervalo $[0, +\infty)$, porque $x^2 + y^2 + z^2$ será siempre mayor o igual que cero. Y sus “superficies de nivel” tienen ecuaciones $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = k}$, con $k \geq 0$, luego son “superficies esféricas” de centro el origen y radio $\sqrt{k}$. Cuando sea $k = 0$, la “superficie de nivel” se reduce únicamente al origen.

2) Para la función definida como $\boxed{w = \ln(x + y + z - 3)}$ se tiene: Su “dominio” está formado por todos los puntos del espacio que cumplan la inequación $\boxed{x + y + z - 3 > 0}$ (forman “el semi-espacio” que no incluye al origen, de los dos limitados por el plano $x + y + z = 3$, estando los puntos de dicho plano no incluidos). (Ver Sección 8.10). Su “recorrido” es $\mathbb{R}$ (pues cuando varía $x + y + z - 3$ entre 0 y $+\infty$, su logaritmo varía en todo $\mathbb{R}$). Y sus “superficies de nivel” tienen ecuaciones con la forma $\ln(x + y + z - 3) = k$, siendo k cualquiera; o bien, tienen ecuaciones más cómodas con la forma $\boxed{x + y + z - (3 + e^k) = 0}$ (son “planos paralelos” al que define “el

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

dominio”, cada vez más alejados del origen de coordenadas al crecer k y siempre situados en la región del “dominio”).

3) Para la función definida como $w = -\sqrt{x^2 + y^2 - z}$ se tiene: Su “dominio” está formado por todos los puntos del espacio que cumplan la inequación $x^2 + y^2 - z \geq 0$ (son los puntos que están por debajo del “paraboloide de revolución vertical” $z = x^2 + y^2$, incluido este). (Ver Sección 8.10). Su “recorrido” es el intervalo $(-\infty, 0]$, ya que se trata de una raíz negativa y su radicando varía de 0 a $+\infty$. Y sus “superficies de nivel” tienen ecuaciones $-\sqrt{x^2 + y^2 - z} = k$, con $k \leq 0$. O bien, tienen ecuaciones más cómodas $z = x^2 + y^2 - k^2$ (son “paraboloides de revolución verticales”, paralelos entre sí y situados por debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cual resulta para $k = 0$). (Ver Sección 8.9).

Cálculos de dominios de funciones elementales de dos y de tres variables

Se llaman “**funciones elementales**”, como sabemos, las que cumplen los siguientes requisitos:

- 1) Vienen dadas en forma explícita (o se pueden definir de este modo).
- 2) Quedan definidas mediante una sola expresión (por tanto, no son funciones “definidas a trozos”).
- 3) Dicha expresión resulta de operar con un número finito de “funciones básicas”, siendo las operaciones cualesquiera entre sumar, restar, multiplicar, dividir y componer funciones (Ver Sección 2.2).

Lo anterior vale para **una** variable independiente, para **dos** variables independientes o para **tres o más** variables independientes. Así todas las funciones que hemos visto como ejemplos en los dos apartados anteriores son “elementales” (salvo los ejemplos 5 y 6 de “funciones de dos variables” que están “definidas a trozos” mediante un tipo muy simple que se usa poco).

Además, una “función elemental” puede combinar sumas, diferencias, productos, cocientes o compuestas que actúen directamente entre “funciones básicas” o bien que actúen entre otras “funciones elementales” más sencillas.

Respecto a sus “dominios” se tiene:

- 1) $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- 2) $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- 3) $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- 4) $Dom(f/g) = (Dom(f) \cap Dom(g)) - \{\text{puntos donde se anule } g\}$
- 5) $Dom(g \circ f) = \{\text{puntos de } Dom(f) / \text{ sus imágenes por } f \text{ están en } Dom(g)\}$

Pues bien, un tipo muy importante de ejercicio que debe practicarse es **determinar gráficamente** los “dominios” de “funciones elementales de dos variables”, resultantes de operar con otras dos o tres “funciones elementales” más sencillas, cuyos “dominios” respectivos sean calculables de un modo directo, aplicando las propiedades anteriores. Para ello se buscan los “dominios” de esas más sencillas (representándolos geoméricamente) y luego **se aplican las anteriores propiedades** (que conocemos para funciones de una variable y son aplicables también para funciones de dos, tres o más variables).

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

NOTA IMPORTANTE: En la propiedad 5) la función g (última que se aplica) tiene que ser de una sola variable y la función f (primera que se aplica) es la de dos o tres variables. En efecto, la función f (la primera que se aplica) parte de dos o tres valores reales (los de sus dos o tres “variables independientes”) y da un único valor real (el que corresponde a su “variable dependiente”), el cual pasa a ser el valor de partida de la función g (segunda que se aplica), la cual dará, a su vez, un único valor real a su “variable dependiente”. Pues bien, este último valor real obtenido es el resultado de haber aplicado la función compuesta $g \circ f$ a los dos o tres valores elegidos inicialmente.

En cambio, en las cuatro primeras propiedades anteriores (para sumas, diferencias, productos y cocientes) f y g deben tener el mismo número de variables.

Así, para funciones de dos variables, las dos últimas propiedades se pueden expresar así:

$$4) \text{Dom}(f/g) = (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g(x, y) = 0\}$$

$$5) \text{Dom}\{g[f(x, y)]\} = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) / f(x, y) \in \text{Dom}(g)\}$$

Nota: En esta última propiedad, si por ejemplo $\text{Dom}(g)$ fuese $[0, +\infty)$, la condición $f(x, y) \in \text{Dom}(g)$ se convertiría en la inecuación $f(x, y) \geq 0$; si por ejemplo $\text{Dom}(g)$ fuese $(0, +\infty)$, la condición $f(x, y) \in \text{Dom}(g)$ se convertiría en la inecuación $f(x, y) > 0$, y si por ejemplo $\text{Dom}(g)$ fuese el intervalo $[-1, 1]$, la condición $f(x, y) \in \text{Dom}(g)$ se transformaría en la doble inecuación $-1 \leq f(x, y) \leq 1$. Análogamente en otros casos.

Y para funciones de tres variables, las mismas propiedades anteriores se escriben:

$$4) \text{Dom}(f/g) = (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y, z) = 0\}$$

$$5) \text{Dom}\{g[f(x, y, z)]\} = \{(x, y, z) \in \text{Dom}(f) / f(x, y, z) \in \text{Dom}(g)\}$$

tomando en cuenta que la condición $f(x, y, z) \in \text{Dom}(g)$ se convertirá en una o varias inecuaciones que debe cumplir (x, y, z) , de modo similar a lo dicho anteriormente para 2 variables.

Ejemplo: Determinar el dominio de la función $f(x, y) = \frac{\log(9-x^2-y^2)}{x \cdot y \cdot \sqrt{x \cdot y + 1}}$

Podemos considerar $f(x, y) = \frac{g(x, y)}{m(x, y) \cdot n(x, y)}$, siendo $g(x, y) = \log(9 - x^2 - y^2)$, siendo $m(x, y) = x \cdot y$ y también siendo $n(x, y) = \sqrt{x \cdot y + 1}$.

Hallamos primero los dominios de estas tres funciones:

$$\text{Dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9 - x^2 - y^2 > 0\} = D_1 \quad \text{Dom}(m) = \mathbb{R}^2 = D_2$$

$$\text{Dom}(n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y + 1 \geq 0\} = D_3$$

Resolviendo la inecuación $9 - x^2 - y^2 > 0$ se obtiene el “círculo” de centro el origen y radio 3, sin incluir los puntos de la correspondiente circunferencia, como se explica en la Sección 8.10. (dominio D_1).

Resolviendo la inecuación $xy + 1 \geq 0$ se obtiene la región del plano comprendida entre las “dos ramas” de la “hipérbola equilátera” $x \cdot y = -1$, que tiene por “asíntotas” ambos ejes de coor-

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

denadas y está situada en los cuadrantes segundo y cuarto, incluidos los puntos de dicha “hipérbola”, como también se explica en la Sección 8.10. (dominio D_3). La hipérbola pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, -1)$.

Se tiene ahora: $\boxed{Dom(f) = (D_1 \cap D_2 \cap D_3) - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y \cdot \sqrt{xy + 1} = 0\}}$

La intersección de los tres dominios se reduce a $D_1 \cap D_3$, ya que D_2 es todo $\mathbb{R}^2$.

Se dibujan en el plano “la circunferencia” de centro el origen y radio 3 (línea a trazos, porque no está incluida en D_1), así como “la hipérbola” de ecuación $xy = -1$ (línea continua, porque sí está incluida en D_3). Rayamos ahora, con inclinaciones diferentes, “el círculo” correspondiente a “la circunferencia” dibujada y “la región” comprendida entre las dos ramas de “la hipérbola” dibujada, viéndose la intersección de D_1 con D_3 en la zona del plano con doble rayado (queda el círculo, sin circunferencia, faltándole dos zonas simétricas: una, en el segundo cuadrante, limitada por un arco de circunferencia y un arco de la rama de hipérbola de ese cuadrante, y otra, en el cuarto cuadrante, limitada por otro arco de circunferencia y por un arco de la rama de hipérbola de ese cuadrante. (HACER EL DIBUJO Y COMPROBAR LO DICHO).

Falta hallar los puntos del plano para los cuales se anula el denominador de la fracción dada al definir $f(x, y)$:

$$\boxed{x \cdot y \cdot \sqrt{xy + 1} = 0} \Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ o bien } \boxed{y = 0} \text{ o bien } \boxed{xy = -1}$$

Por tanto, habrá que quitarle a la intersección obtenida anteriormente los puntos situados en el eje OY ($x = 0$), los puntos situados en el eje OX ($y = 0$) y los puntos de la hipérbola ($xy = -1$), con lo cual QUEDANDO YA DIBUJADO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN $f(x, y)$ DADA.

El problema de determinar “el dominio” de una “función elemental” de tres variables es notablemente más complicado, pues “los dominios” más sencillos son regiones del espacio y no podemos dibujarlos, con lo cual no es fácil ver las intersecciones de las varias regiones que tengamos en cada caso.

Sin embargo, podemos dar algunas directrices:

1) Los “dominios” son siempre $\mathbb{R}^3$ (todo el espacio), para funciones polinómicas, radicales de índices impares de funciones polinómicas, exponenciales de bases positivas y exponentes polinómicos, senos o cosenos de funciones polinómicas, arcos tangente de funciones polinómicas y valores absolutos de funciones polinómicas.

2) Para hallar el “dominio” de una raíz de índice par de una función polinómica $f(x, y, z)$, habrá que resolver en el espacio la inequación $\boxed{f(x, y, z) \geq 0}$ (si la función f es de primer grado o sencilla de segundo grado, puede obtenerse su solución como explicamos en la Sección 8.10).

3) Caso similar es el “dominio” del logaritmo de una función polinómica $f(x, y, z)$, que conduce a resolver la inequación análoga $\boxed{f(x, y, z) > 0}$.

4) El “dominio” de la tangente de una función polinómica $f(x, y, z)$ es todo $\mathbb{R}^3$ menos las superficies de ecuaciones $\boxed{f(x, y, z) = (2k + 1)\frac{\pi}{2}}$, con k entero, que son sencillas cuando f es de primer grado o algunos casos de segundo grado (ver Secciones 8.7 y 8.8).

5) El “dominio” del arco seno o del arco coseno de una función polinómica $f(x, y, z)$ se obtiene resolviendo la doble inequación $\boxed{-1 \leq f(x, y, z) \leq 1}$ (hay que resolver separadamente ambas

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

inecuaciones y hallar la intersección de sus soluciones). Sólo es fácil si el polinomio $f(x, y, z)$ es de primer grado y en algunos casos cuando es de segundo grado. (Ver Sección 8.10).

Nota: En todos los casos en que se pueda hallar “el dominio” de una función de tres variables, habrá que darlo mediante una descripción geométrica intuitiva, pues no podrá dibujarse (lo cual sí puede hacerse con los “dominios” de las funciones de dos variables, como hemos visto). Lo único que puede dibujarse en algunos casos sencillos son las superficies del espacio que limitan dicho “dominio”, lo cual ayuda a su descripción.

Ejemplo 1: Hallar “el dominio” de la función de tres variables $w = \frac{\ln\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} - 1\right)}{x \cdot y \cdot z}$

La función dada, que podemos llamar $F(x, y, z)$ es un cociente. Su numerador es la función compuesta $h = g \circ f$ de $f(x, y, z) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} - 1$ (polinómica de segundo grado) con la función de una variable $g(t) = \ln t$:

En efecto: $(g \circ f)(x, y, z) = g[f(x, y, z)] = \ln\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} - 1\right) = h(x, y, z)$

Y el denominador de F es la función $m(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ (polinómica de grado tres).

Por tanto, se tiene $F(x, y, z) = \frac{h(x, y, z)}{m(x, y, z)}$. Con lo cual,

$$\boxed{Dom(F) = Dom(h) \cap Dom(m) - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / m(x, y, z) = 0\}}$$

El “dominio” de m es todo $\mathbb{R}^3$ (por ser función polinómica, como dijimos en el caso 1 de la página anterior), luego la intersección dará solamente el dominio de h .

El cual es: $Dom(h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} - 1 > 0\}$ (caso 3, de los anteriores)

Habrà que resolver entonces esta última inecuación. Ver la Sección 8.10 que nos dice lo siguiente: La “ecuación asociada” es la de un “elipsoide” de centro el origen y de semiejes $a = \sqrt{3}$ (en la dirección de OX), $b = \sqrt{5}$ (en la dirección de OY) y $c = 2$ (en la dirección de OZ). (Esto se explica Sección 8.9). Este “elipsoide” descompone al espacio $\mathbb{R}^3$ en la región limitada por el mismo y que incluye al origen de coordenadas, pero no incluye al propio “elipsoide” (se suele llamar “región interior al elipsoide”) y la región formada por el resto de puntos del espacio, también limitada por el “elipsoide” pero sin incluir sus puntos (se suele llamar “región exterior al elipsoide”). Pues bien, se demuestra que la función polinómica del primer miembro de la inecuación toma valores con un mismo signo en cada una de las dos regiones descritas anteriormente. Pues bien, la función toma valores negativos en la primera, como puede comprobarse sustituyendo, por ejemplo, las coordenadas del origen (que pertenece a esa región), y la función toma valores positivos en la segunda, como puede comprobarse sustituyendo, por ejemplo, las coordenadas del punto $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, 2)$ que está en la misma. Entonces, como la inecuación que tenemos nos pide que la función $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} - 1$ sea positiva, su “conjunto solución” será la región que hemos llamado “región exterior al elipsoide”.

Entonces, ya tenemos el resultado de la intersección de “los dominios” del numerador y del denominador (es la “región exterior al elipsoide”). Falta quitarle a esta región los puntos que hacen cero la función del denominador, para tener “el dominio” de la función $F(x, y, z)$ dada inicialmente. Pero al ser el denominador el polinomio $x \cdot y \cdot z$, esos puntos serán los de los tres planos coordenados (puntos con $x = 0$, del plano OYZ; puntos con $y = 0$, del plano OXZ, y puntos con $z = 0$, del plano OXY).

FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

Conclusión: “El dominio” de la función F dada es la “región exterior al elipsoide” de ecuación

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$$

de centro el origen y semiejes $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5}$ y $c = 2$ (en las direcciones de los 3 ejes), quitándole a dicha región los puntos de los 3 planos coordenados (OXY, OXZ y OYZ). O sea, el “dominio” incluye todos los puntos del espacio que sean “exteriores al elipsoide” y que tengan sus 3 coordenadas diferentes de cero (descripción geométrica intuitiva apoyándose en las superficies del espacio que la limitan, o sea el “elipsoide” y los tres planos coordenados).

Ejemplo 2: Hallar “el dominio” de la función de tres variables $w = \frac{\arcsen(x^2+y^2+z^2-3)}{2x-y+3z-10}$

El “dominio” de la función dada se obtendrá por intersección del “dominio” D de la función del numerador con el “dominio” de la función del denominador (que es $\mathbb{R}^3$), menos los puntos que hagan cero el denominador (puntos del plano $2x - y + 3z - 10 = 0$ que se encuentren en dicha intersección).

El “dominio” de la función numerador será $D = \{(x, y, z) : -1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 3 \leq 1\}$. O bien, escrito de otro modo $D = \{(x, y, z) : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Por tanto, será el conjunto de puntos del espacio cuyas distancias al origen queden comprendidas entre $\sqrt{2}$ y 2 (están por fuera de la “superficie esférica” de centro el origen y radio $\sqrt{2}$ y por dentro de la “superficie esférica” con el mismo centro y de radio 2, incluidos los puntos de ambas “superficies esféricas”).

Veamos la distancia d del plano $2x - y + 3z - 10 = 0$ al origen de coordenadas, para ver la posición del mismo respecto a las “superficies esféricas” nombradas. Dicha distancia es

$$d = 10/\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cong 2'67$$

Por tanto, vemos que ese plano queda por fuera de la “superficie esférica” de centro el origen y radio 2, luego ninguno de sus puntos pertenece a la región D hallada anteriormente (con lo cual no tenemos que eliminar sus puntos de dicha región).

Conclusión: El dominio de la función dada es la región D indicada anteriormente, de la cual hicimos una descripción geométrica intuitiva apoyándonos en las dos superficies del espacio que la limitan (las dos “superficies esféricas” de radios $\sqrt{2}$ y 2).
