

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

(Prerrequisitos: Límites y continuidad de funciones de una variable. Funciones de dos y tres variables)

Tipos de límites en un punto para funciones de dos o de tres variables

Suponemos en todo lo que sigue que las funciones consideradas son “funciones reales de dos variables reales” o son “funciones reales de tres variables reales”.

Descritos en términos intuitivos, no matemáticamente rigurosos, veremos los distintos tipos de límite para “funciones de dos variables” (que valen también por analogía para “funciones de tres variables”).

Requisito previo que debe cumplir un punto (a, b) de $\mathbb{R}^2$ para que **tenga sentido** hablar del límite de una función $f(x, y)$ cuando (x, y) tienda hacia (a, b) , en cualquiera de los tipos:

Es que un punto variable (x, y) del “dominio” de la función f pueda aproximarse al punto fijo (a, b) todo lo que queramos, sin llegar a coincidir ambos puntos. O sea, que pueda lograrse que la distancia entre (x, y) y (a, b) llegue a ser menor que cualquier número positivo dado, por pequeño que este sea, variando (x, y) exclusivamente en el “dominio” de la función f y sin que (x, y) coincida con (a, b) .

Nota: Lo anterior no garantiza que el límite exista, sino que el mismo tenga sentido y pueda existir. (Ver Sección 2.4 donde se explica esto mismo para “funciones reales de una variable real”).

Hay los siguientes tipos de límites en un punto (a, b) de $\mathbb{R}^2$:

LÍMITE UN NÚMERO: Se dice que “el límite de $f(x, y)$ es el número real L , cuando (x, y) tiende a (a, b) ”, si y sólo si, tomando (x, y) en el “dominio” de f , cada vez más cerca de (a, b) , sin llegar a coincidir con dicho punto, los valores correspondientes de la función lleguen a estar todos tan cerca como se quiera del número L (pudiendo incluso coincidir con L).

L es entonces el límite de la función f en (a, b) . Y se escribe:
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

LÍMITE $+\infty$: Se dice que “el límite de $f(x, y)$ es $+\infty$, cuando (x, y) tiende a (a, b) ”, si y sólo si, tomando (x, y) en el “dominio” de f , cada vez más cerca de (a, b) , sin llegar a coincidir con dicho punto, los valores correspondientes de la función se vayan haciendo cada vez mayores, llegando todos ellos a estar por encima de cualquier valor positivo prefijado K (por grande que este sea). Se escribe entonces:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$$

LÍMITE $-\infty$: Se dice que “el límite de $f(x, y)$ es $-\infty$, cuando (x, y) tiende a (a, b) ”, si y sólo si, tomando (x, y) en el “dominio” de f , cada vez más cerca de (a, b) , sin llegar a coincidir con dicho punto, los valores correspondientes de la función se vayan haciendo cada vez menores, llegando todos ellos a estar por debajo de cualquier valor negativo prefijado $-K$ (por pequeño que este sea). Se escribe entonces:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = -\infty$$

LÍMITE $\pm\infty$: Hay casos en que los valores absolutos de la función $f(x, y)$ llegan a estar todos por encima de cualquier valor positivo prefijado, cuando (x, y) tiende a (a, b) , pero la función mezcla valores positivos y negativos sin dejar de hacerlo por cerca que estemos del punto (a, b) . En ese caso diremos que “el límite de $f(x, y)$ es $\pm\infty$, cuando (x, y) tiende a (a, b) ” y se escribe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \pm\infty$$

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

Nota 1: Esto es lo que ocurría en el caso conocido de $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = \pm\infty$ (pues tan cerca como queramos de 0, en el dominio de la función $1/x$ (que es $\mathbb{R} - \{0\}$), hay valores de x positivos y valores de x negativos, con lo cual lo mismo le ocurre a $1/x$.

Pero entonces, análogamente, tenemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x \cdot y} = \pm\infty$, pues $1/(x \cdot y)$ tendrá valores positivos y valores negativos según el cuadrante donde elijamos el punto (x, y) , siempre en el dominio de la función $1/(x \cdot y)$ (que ahora es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$), pudiendo estar tan cerca como queramos del punto $(0, 0)$.

Nota 2: Cuando hablemos de LÍMITES INFINITOS, en general, nos estaremos refiriendo a alguno de los casos en que el límite sea $+\infty$, sea $-\infty$ o sea $\pm\infty$. Y cuando el límite sea un número, hablaremos de LÍMITE FINITO.

Se llama “**entorno de un punto (a, b)** ” a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que incluya al punto (a, b) y “lo rodee completamente”, en el sentido de que contenga un “entorno circular” del mismo.

1) En $\mathbb{R}$ habíamos llamado “entorno de un punto a ”, que también puede llamarse “entorno circular de dicho punto”, a cualquier intervalo abierto de la forma $(a - \delta, a + \delta)$ con δ positivo.

2) En $\mathbb{R}^2$ se suele llamar “entorno circular” (o simplemente “entorno”) de un punto (a, b) , a cualquier “círculo” centrado en dicho punto (con su circunferencia incluida o sin incluir).

3) Y en $\mathbb{R}^3$ (de modo análogo) se llama “entorno circular”, “entorno esférico” (o simplemente “entorno”) de un punto (a, b, c) , a cualquier “esfera” de centro dicho punto (con la correspondiente “superficie esférica” incluida o no incluida).

Los demás “entornos” posibles de un determinado punto en uno de los espacios mencionados, son subconjuntos de dicho espacio que **contengan** alguno de estos “entornos circulares” del mismo punto (por eso decíamos “que es un subconjunto que rodee completamente al punto”). Así, por ejemplo, un entorno del punto (a, b) podría ser una región cuadrada o rectangular que tenga centro en ese punto, porque habrá siempre un círculo centrado en el mismo, lo pequeño que sea necesario, completamente contenido en la región considerada.

Y en el espacio $\mathbb{R}^3$, un entorno del punto (a, b, c) puede ser una región con forma de cubo o paralelepípedo centrado en el punto, porque podremos elegir una esfera de centro el punto y radio suficientemente pequeño de modo que quede contenida en la región considerada.

Nota 3: Una función cualquiera, en un punto cualquiera, podrá cumplir, como mucho, **solamente una** de las posibilidades mencionadas para límite en ese punto (incluyendo el límite $\pm\infty$), pues esas posibilidades describen comportamientos de la función contradictorios entre sí.

Y en caso de cumplirse la primera posibilidad, lo hará con un único valor de L (es decir, que un límite finito, si existe, es único).

Pero puede suceder perfectamente que la función f no cumpla en un punto (a, b) con ninguno de los cuatro tipos de límite descritos anteriormente, con lo cual diríamos que “ **$f(x, y)$ no tiene límite en el punto (a, b)** ”, o que “**el límite de $f(x, y)$ en (a, b) no existe**”.

Nota 4: En los conceptos dados para los cuatro tipos de límites en un punto se habla de “más cerca de (a, b) ”, lo cual supone la existencia de “una distancia” en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que en $\mathbb{R}$ la distancia entre dos puntos a y b (llamada distancia euclídea) es $\sqrt{(b - a)^2} = |b - a|$, en $\mathbb{R}^2$ la distancia euclídea entre (a, b) y (c, d) viene dada por $\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ (y en $\mathbb{R}^3$ la distancia euclídea entre (a, b, c) y (d, e, f) es $\sqrt{(d - a)^2 + (e - b)^2 + (f - c)^2}$).

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Todo lo dicho anteriormente para los cuatro tipos de límites de “funciones de dos variables” se traslada de modo análogo a las “funciones de tres variables”, usando puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ y la “distancia euclídea” correspondiente.

Dos ejemplos, con tablas de valores, de límites de funciones de dos variables:

Ejemplo 1: En la tabla siguiente presentamos varios puntos (x, y) , cada vez más próximos al punto de coordenadas $(-2, 1)$, sin coincidir con éste, indicando las distancias decrecientes de esos puntos al $(-2, 1)$, y mostrando los valores que va tomando la función $f(x, y) = 3x - 2y + 5$, de “dominio” $\mathbb{R}^2$, en los puntos elegidos:

Punto elegido	Distancia al $(-2, 1)$	Valor de $f(x, y)$	Comentario
$(-2, 2)$	1	-5	No importa que la abscisa del punto variable sea -2, pues la ordenada no es 1.
$(-2'4, 1'2)$	$\approx 0'45$	-4'6	
$(-1'8, 1'3)$	$\approx 0'36$	-3	
$(-2'1, 0'8)$	$\approx 0'22$	-2'9	
$(-1'95, 1)$	0'05	-2'85	No importa que la ordenada del punto variable sea 1, pues la abscisa no es -2.
$(-2'01, 0'97)$	$\approx 0'03$	-2'97	

OCURRE LO SIGUIENTE: Cuanto más cerca elijamos el punto variable (x, y) del punto fijo $(-2, 1)$, sin que ambos coincidan, más próximos resultan todos los valores de la función $f(x, y)$ al número real -3 .

Por tanto, podemos escribir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (3x - 2y + 5) = -3$$

Obsérvese que los valores de la función pueden tener oscilaciones, incluso alcanzando el valor del límite (-3) para algún punto como el $(-1'8, 1'3)$, todavía relativamente lejano del $(-2, 1)$, y luego tomando valores diferentes de -3 para puntos que están más cercanos al $(-2, 1)$. Pero hay una tendencia clara, de modo que la diferencia de todos los valores de la función respecto a -3 llegará a ser tan pequeña en valor absoluto como queramos, con tal que el punto variable se tome suficientemente cerca del $(-2, 1)$, sin coincidir con éste (¡esta es la idea fundamental!).

Ejemplo 2: En la tabla siguiente presentamos varios puntos (x, y) , cada vez más próximos al punto de coordenadas $(0, 0)$, sin coincidir con éste, mostrando las distancias decrecientes de esos puntos al $(0, 0)$, y mostrando los valores que va tomando la función $f(x, y) = \ln(x^4 + y^4)$, de “dominio” $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, en los puntos elegidos:

Punto elegido	Distancia al $(0, 0)$	Valor de $f(x, y)$	Comentario
$(0, 1)$	1	0	No importa que la abscisa del punto variable sea 0, pues la ordenada no es 0.
$(-0'5, -0'3)$	$\approx 0'58$	$\approx -2'65$	
$(0'1, 0)$	0'1	$\approx -9'21$	No importa que la ordenada del punto variable sea 0, pues la abscisa no es 0.
$(-0'002, 0'001)$	$\approx 0'002$	$\approx -24'80$	
$(10^{-20}, -10^{-20})$	$\approx 1'4 \cdot 10^{-20}$	$\approx -183'51$	

OCURRE LO SIGUIENTE: Cuanto más cerca elijamos el punto variable (x, y) del punto fijo $(0, 0)$, sin que ambos coincidan, mayores en valor absoluto (pero negativos) resultan los valores de la función $f(x, y)$, de forma que todos dichos valores llegarán a estar por debajo de cualquier

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

constante negativa dada, en cuanto la distancia entre (x, y) y $(0, 0)$ sea suficientemente pequeña (¡esta es la idea fundamental!).

Por tanto, podemos escribir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^4 + y^4) = -\infty$$

OBSERVACIONES MUY IMPORTANTES:

1) El punto fijo (a, b) , al cual tiende el punto variable (x, y) , no tiene que pertenecer al “dominio” de la función (pero puede ocurrir que pertenezca). Pues lo que hemos pedido en todos los casos es que (x, y) pueda aproximarse todo lo que queramos al punto (a, b) , estando (x, y) siempre en el “dominio” de la función f pero sin llegar a coincidir con (a, b) . Por tanto, habrá casos en que (a, b) no pertenezca al “dominio” de f , con lo cual la coincidencia de (x, y) con (a, b) será imposible (como en el ejemplo 2 anterior), pero habrá otros casos en que (a, b) sí pertenezca al “dominio” de la función f (como en el ejemplo 1), pero de todas maneras la idea de que “ (x, y) tienda a (a, b) ” implica necesariamente que (x, y) y (a, b) sean diferentes.

2) Esto también ocurriría en los límites de “funciones de una variable” y ocurrirá en los límites de “funciones de tres variables”. Así, el límite de $\ln x$ es $-\infty$, cuando $x \rightarrow 0$. Y sabemos que 0 no pertenece al dominio de la función $\ln x$; pero, siendo el dominio de la función el intervalo $(0, +\infty)$, el punto variable x puede acercarse arbitrariamente al punto fijo 0, sin salirse del dominio (parecido a lo que ocurre en el ejemplo 2 anterior).

3) Por tanto, podremos hablar de límite de una función $z = f(x, y)$ en un cierto punto (a, b) , sin necesidad de que exista el valor $f(a, b)$. O podremos hablar de límite de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ en un punto (a, b, c) , sin necesidad de que exista el valor $f(a, b, c)$.

4) Pero además, cuando exista $f(a, b)$, el límite de f en el punto (a, b) puede existir o no existir, y en caso de existir, podría ser un límite finito L , siendo quizás $L \neq f(a, b)$, o podría ser un límite infinito $(+\infty, -\infty$ o $\pm\infty)$.

5) ¿Por qué tiende entonces a confundirse el límite con el valor de la función? Porque en muchos casos coinciden (cuando la función sea continua). Pero es un grave error creer que siempre es así.

En efecto, se define la “continuidad en un punto” para “funciones de dos variables” y para “funciones de tres variables” de esta manera:

“ $f(x, y)$ es continua en el punto (a, b) ” si y sólo si: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

“ $f(x, y, z)$ es continua en el punto (a, b, c) ” si y sólo si: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$

Nota: En ambos casos, estamos presuponiendo la existencia del límite mencionado.

Ejemplo en que el límite no existe:

Sea la función $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ y el punto del plano $(0, 0)$. ¿Existirá el límite de esta función en el punto dado?

El “dominio” de f es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pues el único punto que hace cero el denominador es $(0, 0)$. Por tanto, el punto dado no está en el “dominio”. Pero un punto variable (x, y) puede acercarse a $(0, 0)$ tanto como queramos moviéndose en el “dominio” de f (que es el requisito previo exigido

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

para poder considerar la posible existencia de límite para la función en ese punto, como dijimos en la pág. 1).

Ahora bien, si acercamos el punto (x, y) al $(0, 0)$ siguiendo la recta $y = x$ (que pasa por el origen), lo cual es una de las infinitas maneras de conseguir ese acercamiento, dicho punto variable resultará de coordenadas (x, x) , y los valores correspondientes de la función en esos puntos serán $f(x, x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, para cualquier $x \neq 0$, por pequeño que sea. Con lo cual, el límite de la función, si existiese, tendría que ser $1/2$ (porque hay puntos tan cerca del origen como queramos donde la función vale siempre $1/2$).

Pero otra manera de acercar el punto variable (x, y) al $(0, 0)$ es siguiendo, por ejemplo, la nueva recta $y = -2x$ (ya que dicha recta también pasa por el origen). Y en este caso el punto variable sería de coordenadas $(x, -2x)$ y los valores correspondientes de la función en esos puntos serán $f(x, -2x) = \frac{x \cdot (-2x)}{x^2 + (-2x)^2} = \frac{-2x^2}{5x^2} = -\frac{2}{5}$, para cualquier $x \neq 0$, por pequeño que sea. Pero entonces el límite de la función, si existiese, tendría que ser también $-2/5$ (porque hay puntos tan cerca del origen como queramos donde la función toma siempre ese valor).

Conclusión: No es posible que esta función tenga límite en $(0, 0)$, porque el límite no puede ser dos valores distintos a la vez (ver Nota 3, en la página 2).

Nótese que la situación que se presenta en el ejemplo anterior es análoga a la de una función de una variable cuando esta tiene “límites laterales” diferentes en un punto, en cuyo caso “el límite ordinario” en dicho punto no puede existir. En este caso, dos de los llamados “límites direccionales de la función en el punto $(0, 0)$ ” han resultado diferentes, llegándose a la misma conclusión.

NOTAS IMPORTANTES:

1) Cuando acercábamos los valores de una sola variable x a un punto a dado en $\mathbb{R}$, podíamos hacerlo de forma que fuese solamente $x < a$ (y entonces el correspondiente límite para una función $f(x)$, si existía, se llamaba “límite lateral por la izquierda en el punto a ”), o podíamos hacerlo de forma que fuese solamente $x > a$ (y el correspondiente límite para $f(x)$, si existía, se llamaba “límite lateral por la derecha en el punto a ”). Y para el “límite ordinario” también podíamos acercarnos al punto a saltando de un lado al otro de dicho punto (si el “dominio” de f lo permitía) pero buscando distancias más cortas cada vez entre x y a .

Nótese además que, en este caso de una sola variable, la dirección en que movíamos los valores de x es la misma (es la dirección del eje OX, donde representamos “el dominio” de f , los valores elegidos para x y el valor a al cual tienden), pero hay dos sentidos posibles en dicha aproximación, sin dar saltos de un lado a otro del valor a : Nos acercábamos por la izquierda o nos acercábamos por la derecha, en correspondencia con los dos “límites laterales” en el punto a .

2) Pues bien, en el caso de dos variables hay infinitas rectas del plano OXY que pasan por un punto (a, b) dado, luego podremos acercar un punto variable (x, y) al punto fijo (a, b) según infinitas direcciones (las de dichas rectas, si el “dominio” de f lo permite) y, elegida una dirección, hay dos sentidos posibles de acercamiento, si no saltamos de un lado a otro de (a, b) sobre la recta elegida. Entonces, cada límite de $f(x, y)$ obtenido moviendo (x, y) solamente sobre una de dichas rectas, en caso de existir, se llama “límite direccional de f en el punto (a, b) ”, debiendo especificarse cuál es la recta tomada en cada caso (dando su pendiente o diciendo que es recta vertical). En conclusión, para una variable había solamente un “límite direccional” con dos posibles “límites laterales” (el “límite direccional” ni se nombraba como tal) y ahora, para dos variables, hay infinitos posibles “límites direccionales”, cada uno con dos posibles “límites laterales” a su vez.

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

3) Y ocurre lo mismo para el caso de “función de tres variables”: Hay infinitas rectas del espacio OXYZ que pasan por un punto (a, b, c) dado, luego también podemos tener infinitos “límites direccionales” para una función $f(x, y, z)$ en un punto (a, b, c) , y además cada uno podrá tener dos “límites laterales”.

Álgebra de límites y casos de indeterminación

Esto es análogo a lo que se ha visto para funciones de una variable (Sección 2.4), con la excepción del uso de la Regla de L'Hôpital (Sección 3.3):

- 1) Existen teoremas que nos dan los límites de sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias de funciones de una variable, indicándonos los casos de indeterminaciones que se presentan (los cuales sintetizamos como $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ , 1^∞ , 0^0 y $(+\infty)^0$). Pues bien, esos teoremas siguen siendo válidos para “funciones de dos variables” y también para “funciones de tres variables” (no hay nuevos casos de indeterminación).
- 2) En el cálculo de límites con una sola variable, utilizábamos en ocasiones factorizaciones, simplificaciones, expresiones conjugadas o cambios de variables. Estas técnicas siguen siendo aplicables, cuando interesen, al cálculo de límites con “dos variables” y con “tres variables”.
- 3) La identidad $u^v \equiv e^{v \cdot \ln u}$ ($u > 0$), que servía para el cálculo de límites de funciones potenciales-exponenciales, también es aplicable a “funciones de dos variables” y a “funciones de tres variables” (u y v lo serían).
- 4) Y la sustitución del “infinitésimo” $\ln u$ por el “infinitésimo equivalente” $u - 1$, cuando u tiende a 1, que utilizábamos para calcular límites del tipo 1^∞ , también es utilizable con “funciones de dos variables” y con “funciones de tres variables” (en esos casos u sería una de esas funciones).
- 5) Sin embargo, la Regla de L'Hôpital, que se utilizaba para resolver solamente “indeterminaciones” de los tipos $0/0$ e ∞/∞ , no es aplicable con “funciones de dos variables” ni con “funciones de tres variables, salvo cuando queramos calcular algún “límite direccional”, por tratarse de un límite de “función de una variable”. (Algunos de estos casos serán estudiados en la Sección 5.4: “Cálculo de límites dobles indeterminados”).

Continuidad

Ya dimos las definiciones de “continuidad en un punto”, para “funciones de dos variables” y para “funciones de tres variables” (ver pág. 4). Nótese que una “condición necesaria” para que una función sea “continua” en un punto es que este punto pertenezca al “dominio” de dicha función (pero esto no basta; pues tiene que existir el límite de la función en ese punto y que coincida con el valor de la función en el mismo).

Se dice que una “función de dos variables” es “continua en un conjunto C” del plano, si es continua en cada uno de los puntos (a, b) de dicho conjunto C. (Esto implica que C esté contenido en el “dominio” de la función).

Análogamente, se dice que una “función de tres variables” es “continua en un conjunto C” del espacio $\mathbb{R}^3$, si es continua en cada uno de los puntos (a, b, c) de dicho conjunto. (Esto implica, igualmente, que C esté contenido en el “dominio” de la función).

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

Un teorema muy útil en la práctica para el estudio de la continuidad es el siguiente (vimos uno análogo para “funciones de una variable”):

TEOREMA: Toda “función elemental” de dos o de tres variables es continua en su correspondiente “dominio”.

Recuérdese que “función elemental” es una función definida explícitamente, mediante una sola expresión (no a trozos) y que resulte de operar con “funciones básicas”, sin importar el número de variables independientes ni las operaciones entre funciones que incluya. (Ver Sección 2.2).

El Teorema anterior ya lo habíamos usado mucho con “funciones elementales de una variable”. Ahora se lo podremos aplicar a “funciones elementales de dos variables” y a “funciones elementales de tres variables”, lo cual nos ayudará en el cálculo de límites con esas funciones. En efecto, si nos piden el límite de una función en un determinado punto de su “dominio” y sabemos que esa función es “continua” en ese punto, concluiremos que el límite existe y será directamente el valor de la función en el mismo.

Algunos ejemplos (otros más complicados en la Sección 5.3):

1) La función $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ es “continua” en el círculo de centro el origen y radio 3 (incluida la circunferencia), pues se trata de una “función elemental” y el conjunto nombrado es su “dominio” (es el conjunto solución de la inecuación $9 - x^2 - y^2 \geq 0$). (Ver Sección 8.10). Por tanto, el límite de esta función cuando (x, y) tiende a $(-1, 2)$ será 2 (sin necesidad de calcularlo). En efecto, el punto $(-1, 2)$ pertenece al “dominio” de la función (cumple la anterior inecuación), con lo cual la función será “continua” en ese punto y entonces dicho límite coincidirá con el valor que toma f en el mismo, que es $f(-1, 2) = \sqrt{9 - (-1)^2 - 2^2} = 2$.

2) La función $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 - 36)$ es “continua” en la región del plano “exterior” a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (dicha elipse excluida), pues se trata de una “función elemental” y el conjunto nombrado es su “dominio” (es el conjunto solución de la inecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$). Por tanto, el límite de esta función cuando (x, y) tiende a $(3, -2)$ existe y será $\ln 36$. En efecto, el punto $(3, -2)$ pertenece al “dominio” de la función, como puede comprobarse viendo que cumple la inecuación dada, con lo cual f será “continua” en ese punto y entonces su límite coincidirá con el valor que tiene en el mismo, que es $\ln 36$.

3) La función $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ es “continua” en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pues es una “función elemental” y ese conjunto es su “dominio” (el denominador se hace cero solamente en el origen). Por tanto, el límite de esta función cuando (x, y) tiende a $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$ existe y será $-\frac{\sqrt{15}}{8}$, que es el valor de la función en $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

4) La función $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + y^2 - z}$ es “continua” en la región del espacio que está por debajo del “paraboloide de revolución vertical” $z = x^2 + y^2$ (incluido dicho “paraboloide”), pues esa región es el conjunto solución de la inecuación $x^2 + y^2 - z \geq 0$, que define su “dominio”. Y vemos que se trata de una “función elemental” de tres variables. Por tanto, el límite de esta función cuando (x, y, z) tiende a $(0, 0, -2)$ existe y será $-\sqrt{2}$, que es el valor de la función en ese punto.

Teoremas importantes sobre continuidad

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

Los tres primeros teoremas que damos a continuación son análogos a teoremas vistos en la Sección 2.4 sobre continuidad de “funciones de una variable”. Los enunciaremos para “funciones de dos variables” pero son válidos también para “funciones de tres variables”.

TEOREMA 1: Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son “continuas” en un punto (a, b) , la suma, las dos diferencias y el producto de ambas funciones son también “continuas” en (a, b) .

TEOREMA 2: Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son “continuas” en el punto (a, b) y se cumple además $g(a, b) \neq 0$, la función cociente $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ es también “continua” en (a, b) .

TEOREMA 3: Si la función $f(x, y)$ es “continua” en el punto (a, b) y la función de una variable $g(t)$ es “continua” en el punto $t = f(a, b)$, la función compuesta $(g \circ f)(x, y) = g[f(x, y)]$ es “continua” en (a, b) .

TEOREMA 4: Si las dos funciones de una variable $f(t)$ y $g(t)$ son “continuas” en $t = a$ y la función $h(x, y)$ es “continua” en el punto $(f(a), g(a))$, la función compuesta $h[f(t), g(t)]$ es “continua” en $t = a$.

Este último Teorema es específico para “compuestas” de dos funciones de una variable con una de dos variables, resultando la compuesta función de una variable. Y su análogo para tres variables es el siguiente:

TEOREMA 5: Si las tres funciones de una variable $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son “continuas” en el punto $t = a$ y la función $m(x, y, z)$ es “continua” en $(f(a), g(a), h(a))$, la función compuesta de una variable $m[f(t), g(t), h(t)]$ es “continua” en $t = a$.

Nota: La “continuidad” de todas las “funciones elementales” de dos variables o de tres variables en sus respectivos “dominios”, establecida en el Teorema de la pág. 7, **es una consecuencia de estos cinco Teoremas**, puesto que las “funciones básicas” son siempre “continuas” en sus respectivos “dominios” (recordar lo dicho en la Sección 2.2) y cualquier “función elemental” se obtiene haciendo operaciones entre “funciones básicas” (operaciones que serán sumas, diferencias, productos, cocientes o compuestas, todas mencionadas en los anteriores Teoremas).

Ejemplos:

1) Sean las funciones $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 4}$ y $g(x, y) = \ln(x - y)$.

El “dominio” de f es la “región exterior” del círculo de centro el origen y radio 2 (**incluidos** los puntos de la circunferencia), pues es el conjunto solución de la inequación $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Y el “dominio” de g es el “semiplano” limitado por la recta $y = x$ que contiene al semieje positivo OX y al semieje negativo OY, **sin incluir** los puntos de dicha recta $y = x$ (que es el conjunto solución de la inequación $x - y > 0$).

Por tanto, “el dominio común” de las funciones $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$ será la intersección de ambos dominios anteriores: Resulta ser el “semiplano” descrito, quitándole la mitad del círculo que queda sobre el mismo, pero dejándole los puntos de la correspondiente “semicircunferencia” (exceptuando los puntos $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, que no quedarán incluidos en la intersección por estar sobre la recta $y = x$, que no estaba incluida en el “dominio” de g). (HACER DIBUJO QUE ACLARE LO QUE DECIMOS).

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

Pues bien, las dos funciones dadas son “continuas” en sus respectivos “dominios”, por ser claramente “funciones elementales”, luego también lo serán $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$ en “el dominio común” descrito en el párrafo anterior (según la establecido en el Teorema 1).

Pero tenemos que también f es “continua” en su “dominio” por aplicación del Teorema 3 anterior, ya que el radicando $x^2 + y^2 - 4$ es función de dos variables “continua” en $\mathbb{R}^2$ (por ser polinómica) luego lo será también en los puntos (a, b) que cumplan $a^2 + b^2 - 4 \geq 0$; pero, por otro lado, la función de una variable $\sqrt[4]{t}$ es continua en $[0, +\infty)$, luego lo será en el punto de ese intervalo $t = a^2 + b^2 - 4$ (que es mayor o igual que cero). Y ambas funciones (polinómica y radical de índice 4) aparecen **compuestas** como indica el Teorema 3, dándonos como resultado la función f , luego esta última será “continua” en todos los puntos (a, b) que cumplan la condición $a^2 + b^2 - 4 \geq 0$, los cuales son el conjunto solución de la inecuación $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ (que es el “dominio” de f).

Y de igual modo, la función g dada es “continua” en su “dominio” por aplicación del Teorema 3. En efecto, la función de dos variables $x - y$ es “continua” en todo $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica, luego lo será también en los puntos (a, b) que cumplan la condición $a - b > 0$. Pero la función de una variable $\ln t$ es “continua” en $(0, +\infty)$, luego lo será en el punto de ese intervalo $t = a - b$ (por ser mayor que cero). Y vemos que ambas funciones (polinómica y logarítmica) aparecen **compuestas** como indica el Teorema 3, dándonos como resultado la función g , luego esta última será “continua” en todos los puntos (a, b) que cumplan la condición $a - b > 0$, los cuales forman el conjunto solución de la inecuación $x - y > 0$ (que es el “dominio” de g).

2) Consideremos las mismas funciones f y g de dos variables del ejemplo anterior.

El “dominio” de la función cociente f/g será **la intersección** de los “dominios” de f y de g (hallada antes), quitándole los puntos (x, y) que hagan cero la función g . Pero la ecuación $g(x, y) = 0$ es en este caso $\ln(x - y) = 0$, equivalente a $x - y = 1$, que corresponde a una recta paralela al “borde” $y = x$ del semiplano y contenida en dicho semiplano (el cual era el “dominio” de g , excluyendo su “borde”). Esa recta $x - y = 1$ corta a los ejes de coordenadas en $(1, 0)$ y en $(0, -1)$. Pues bien, habrá que quitarle a la intersección obtenida en el ejemplo anterior los puntos de esa recta $x - y = 1$, para tener el dominio de f/g .

Y si tomamos uno cualquiera de sus puntos, digamos el (a, b) , las dos funciones f y g serán “continuas” en ese punto y además es seguro que $g(a, b) \neq 0$, con lo cual el Teorema 2 nos asegura que la función f/g será “continua” en el punto considerado. Y eso para cualquier (a, b) del “dominio” de f/g .

Por otro lado, aquí también podríamos haber aplicado lo dicho en el Teorema de la pág. 7 sobre “continuidad de funciones elementales”, porque f/g es también “elemental” al serlo ambas funciones dadas (lo cual es un razonamiento más breve, pero queríamos practicar la aplicación del Teorema 2 de la página anterior).

3) Con las mismas funciones f y g de los dos ejemplos anteriores, veamos dónde es continua la otra función cociente g/f .

Su “dominio” es otra vez **la intersección** de los “dominios” de ambas funciones, quitándole ahora los puntos (x, y) que hagan cero la función f . O sea, los puntos donde $\sqrt[4]{x^2 + y^2 - 4} = 0$. Pero esos puntos son los de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, luego el “dominio final” será como el de las funciones $f + g$, $f - g$, $g - f$ y $f \cdot g$ del ejemplo 1, quitando los puntos de la “semicircunferencia” de centro el origen y radio 2, que formaban parte del “dominio” obtenido en ese ejemplo.

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

Y si tomamos nuevamente un punto cualquiera (a, b) de este “dominio” obtenido para g/f , volverán a ser “continuas” en el mismo las dos funciones f y g , siendo además $f(a, b) \neq 0$, con lo cual el Teorema 2 también nos dice que g/f es “continua” en dicho punto (da igual cómo se llamen las funciones del numerador y del denominador del cociente considerado).

Continuidad de funciones de dos variables definidas a trozos (esto no es fácil, pero lo incluimos porque pueden presentarse algunos casos en la práctica)

Cuando una función $f(x, y)$ esté definida explícitamente por más de una expresión, ya no es “elemental” y sabemos que se dice “definida a trozos”. Pues bien, el estudio de su posible “continuidad” es más complicado.

Nos limitaremos a dos casos principales, que son los más frecuentes:

- 1) Caso en que la función venga definida como “elemental” en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y se da aparte un número real como valor de la misma en un cierto punto **no perteneciente al subconjunto anterior** (pudiendo ser varios los puntos que tengan esa misma característica, para los cuales se estén dando también aparte los respectivos valores de la función).
- 2) Caso en que la función venga definida en dos o más subconjuntos del plano **sin puntos comunes**, de modo que en cada uno de los mismos la función esté definida a través de una “función elemental” (diferentes “funciones elementales” en los distintos subconjuntos que tengamos, para que sea “definida a trozos).

Ejemplo 1: La función podría ser $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, y $f(0, 0) = 5$. Esta “función definida a trozos” es del primer tipo, donde el subconjunto en que f viene definida como “elemental” está formado por todos los puntos del plano OXY menos el origen y el punto cuyo valor se da aparte es el origen de coordenadas.

Ejemplo 2: La función podría ser $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, si (x, y) pertenece al círculo de centro el origen y radio 3, con la circunferencia excluida, y además $f(x, y) = 2x - 3y$, si (x, y) pertenece a la “región exterior” a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, con la elipse incluida. Esta “función definida a trozos” es del segundo tipo, donde solamente se consideran dos subconjuntos sin puntos comunes (en efecto, el círculo indicado es uno de los subconjuntos que damos, quedando contenido en la “región interior” de la elipse de centro el origen de semiejes $a = 4$ y $b = 5$, sin tocarla, y el otro subconjunto es la “región exterior” de dicha elipse). HACER DIBUJO PARA VER ESTO.

Pues bien, para estudiar la “continuidad” de la función del ejemplo 1, se procederá así:

a) La continuidad en el conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ está garantizada, pues la “función definida a trozos” dada coincide en ese conjunto con la “función elemental” $1/(x^2 + y^2)$, la cual es “continua” en todos los puntos de dicho conjunto, por ser su propio “dominio” (igual sucedería si el conjunto fuese parte de su “dominio”).

b) Falta saber si f es “continua” en el punto $(0, 0)$, para lo cual necesitamos calcular el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, y compararlo con el valor dado para f en dicho punto, que es 5 en este caso. Pero para que (x, y) tienda a $(0, 0)$, tendrá que ser $(x, y) \neq (0, 0)$, con lo cual

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

$f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ y entonces el límite de f será $+\infty$ (puesto que el denominador de la anterior expresión tiende a cero, siendo positivo).

Conclusión: La función dada en el ejemplo 1 no es continua en $(0, 0)$, luego su “dominio de continuidad” es el conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

NOTA: De un modo análogo se procede en otros casos de “funciones a trozos” del mismo tipo 1.

Y para estudiar la “continuidad” de la función dada del tipo 2 (y en general, cuando “los bordes” de los conjuntos dados no tengan puntos comunes, como en el ejemplo dado), se procederá así:

a) La “continuidad” en los “puntos interiores” (los que no estén en el borde) de cada uno de los dos subconjuntos dados, está garantizada, porque en entornos suficientemente pequeños de dichos puntos la función “definida a trozos” f coincide con la “función elemental” que se haya dado en la definición para el subconjunto correspondiente. Así, en nuestro ejemplo, f será “continua” en los puntos del círculo de centro el origen y radio 3 (excluida la circunferencia, que es su borde), ya que coincide en esos puntos con la “función elemental” $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ que es continua en el mismo círculo, por ser parte de su “dominio” (el cual es ese círculo, pero con la circunferencia incluida). Y también f será “continua” en la “región exterior” a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ (excluida dicha elipse, por ser su borde), porque coincide en dichos puntos con la “función elemental” dada $2x - 3y$ (la cual es “continua” en todo el plano, que es su “dominio”).

b) Falta saber si f es “continua” en los puntos de “los bordes” de los dos subconjuntos dados. Entonces, por la definición dada en este ejemplo, vemos que los puntos de la circunferencia de centro el origen y radio 3 (“borde” del primer subconjunto dado) **no pertenecen al “dominio” de f** (por no haber sido definida la función en los mismos), luego **la función dada no es “continua” en los puntos de la circunferencia.**

Pero los puntos de la elipse dada (“borde” del segundo subconjunto) **sí pertenecen al “dominio” de f** y debemos saber si esta función es “continua” en ellos. Pero, en cualquier “entorno” suficientemente pequeño de uno cualquiera de esos puntos (a, b) , los únicos puntos del dominio de f que aparecen son del “exterior” de la elipse (hacer dibujo para comprobarlo), con lo cual para esos puntos será $f(x, y) = 2x - 3y$, siendo entonces su límite $2a - 3b$, que es el valor de f en ese mismo punto (a, b) . **En conclusión, f es “continua” en todos los puntos de la elipse dada** (“borde” del segundo subconjunto dado).

Conclusión final: **En este caso f ha resultado “continua” en todo su “dominio”, formado por todos los puntos de los dos subconjuntos dados en su “definición a trozos”** (lo cual incluye los puntos de la elipse y no incluye los de la circunferencia).

NOTA: De un modo análogo se procederá en otros casos similares del mismo tipo 2.

Ahora bien, los problemas son mayores cuando dos o más de los subconjuntos dados en la “definición a trozos” de una función f del tipo 2, **tengan algunos puntos de sus bordes en común**, pues entonces **cualquier “entorno” de uno de esos puntos incluirá siempre puntos pertenecientes a ambos subconjuntos**, con lo cual en un mismo entorno se mezclarán valores dados por “una función elemental” con valores dados por “otra función elemental”. Entonces, si ambas funciones “elementales” tienen un mismo límite finito en uno de esos puntos comunes, llamémoslo (a, b) , la función f **podría** ser “continua” en dicho punto, dependiendo solamente del valor $f(a, b)$ que se haya dado. Y en caso contrario, **la función f no podrá ser “continua” en el punto común considerado.**

Por ejemplo, sea $f(x, y) = 3x - 2y$, si (x, y) está en el subconjunto definido por el círculo de centro el origen y radio 1 (incluida su circunferencia) y sea $f(x, y) = x^3 + 5y^3 + 2$, si (x, y)

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

está en el subconjunto que queda a la derecha de la “parábola horizontal” $x = y^2 + 1$, excluida dicha parábola (que es el conjunto solución de la inecuación $y^2 - x + 1 < 0$).

Pues bien, si dibujamos la circunferencia (“borde” del primer subconjunto dado) y la parábola (“borde” del segundo subconjunto dado), veremos que **tienen en común el único punto $(1, 0)$** . “La continuidad” de f en los “puntos interiores” de ambos subconjuntos está clara, por lo explicado en el ejemplo anterior. También es cierta “la continuidad” en los puntos de la circunferencia diferentes del $(1, 0)$, porque en entornos suficientemente pequeños de esos puntos solamente se encuentran puntos del círculo (donde $f(x, y) = 3x - 2y$, la cual es “continua” en todo el plano).

Falta saber si f es “continua” en el punto $(1, 0)$: Ocurre que en todo “entorno” de dicho punto habrá puntos del círculo (primer subconjunto dado) y puntos de la región a la derecha de la parábola (segundo subconjunto dado). Por tanto, habrá puntos (x, y) donde f tome el valor $3x - 2y$, mezclados con otros puntos (x, y) donde f tome el valor $x^3 + 5y^3 + 2$. Pero

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (3x - 2y) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^3 + 5y^3 + 2) = 1^3 + 5 \cdot 0^3 + 2 = 3$$

luego el límite de f cuando (x, y) tienda a $(1, 0)$ será 3.

Y, por la propia “definición a trozos” de la función f , se tiene que el valor de f en ese punto es $f(1, 0) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3$. En conclusión, f es “continua” en $(1, 0)$, con lo cual **esta función es también “continua” en todo su “dominio”,** que está formado por los puntos de los dos subconjuntos dados (recuérdese que el primero de ambos incluye todos los puntos de la circunferencia; el $(1, 0)$ y los demás).

Pero si fuese por ejemplo $f(x, y) = 2x - 3y$ en todo el círculo dado, incluida la circunferencia (en vez de ser $f(x, y) = 3x - 2y$, como dijimos antes), el primer límite calculado anteriormente sería 2 y el segundo límite seguiría siendo 3, luego **en este caso no existiría límite de f en $(1, 0)$, luego la función no sería “continua” en ese punto.** Y la conclusión final sería ahora que **esta función es “continua” en todo su “dominio” menos el punto $(1, 0)$.**

Otros teoremas sobre continuidad (tampoco es fácil, pero lo incluimos por su importancia)

En la Sección 2.4 (donde vimos “continuidad” de “funciones reales de una variable real”) incluimos el Teorema de Bolzano, el Teorema de los Valores Intermedios y el Teorema de Bolzano-Weierstrass, relativos a “continuidad” sobre intervalos “cerrados y acotados”. Pues bien, damos a continuación para “funciones de dos variables” los correspondientes Teorema de los Valores Intermedios y Teorema de Bolzano-Wierstrass (que tienen sus análogos para “funciones de tres variables”):

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS: Si $f(x, y)$ es “continua” en un conjunto A del plano que sea “**conexo**” (o sea, que para cualesquiera dos puntos diferentes de A , **exista una cierta “poligonal” o una cierta “curva” de extremos ambos puntos, la cual esté completamente contenida en A**), ocurre que dicha función, entre dos valores diferentes cualesquiera alcanzados en A , **tomará también todos los valores reales intermedios.**

Por tanto, la imagen por f del conjunto A será siempre “un intervalo”.

Nota 1: Este Teorema, para “funciones de una variable”, se aplicaba siempre tomando A como un “intervalo”, pues los intervalos son los únicos conjuntos de $\mathbb{R}$ que son “conexos”.

Nota 2: Ejemplos de conjuntos A “conexos” en $\mathbb{R}^2$, donde se podría aplicar el Teorema anterior: Todo el plano; un “semiplano” cualquiera; “la región interior” (diremos brevemente “el interior”) o “la región exterior” (diremos “el exterior”) de “un triángulo”; el interior o el exterior de “un cuadrilátero”; el interior o el exterior de “un polígono cualquiera”; el interior o el exterior de “una circunferencia”; el interior o el exterior de “una elipse”; una cualquiera de las tres regiones limi-

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

tadas por las dos ramas de “una hipérbola”; una cualquiera de las dos regiones limitadas por “una parábola”; la región comprendida entre “dos rectas paralelas”; la región comprendida entre “dos circunferencias concéntricas” (llamada “corona circular”); y muchos más. (Ver Sección 8.4).

Y ejemplos de conjuntos A que no cumplen la condición de “conexo”: La unión de dos de las regiones limitadas por “una hipérbola”, sin incluir la misma (también la unión de las tres regiones, o sea todo el plano menos los puntos de la propia “hipérbola”); la unión de las dos regiones que limita “una parábola” sin incluirla (o sea, todo el plano menos los puntos de “la parábola”); la unión de las dos regiones del plano separadas por “una corona circular”. Y muchos más.

Nota 3: El Teorema de Bolzano para “funciones de una variable” se refiere exclusivamente a la existencia, para una función $f(x)$ “continua” en un intervalo $[a, b]$, de algún punto c de dicho intervalo donde $f(c) = 0$, siendo los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son diferentes. (Ver Sección 2.4). Pero este Teorema no tiene análogo para “funciones de varias variables”, por lo cual no se ha considerado.

Sin embargo, podría considerarse que su análogo es un caso particular del Teorema de Valores Intermedios para “funciones de dos variables” (o para “funciones de tres variables”), agregando a la hipótesis la condición de que, entre los valores de la función f “continua” en el conjunto “conexo” A, haya algún valor positivo y también algún valor negativo (pues entonces habrá algún punto P en A donde se cumpla $f(P) = 0$, ya que 0 es uno de los valores intermedios entre los valores positivo y negativo considerados).

Ejemplos donde se aplica el Teorema de los Valores Intermedios:

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Pues bien, la imagen que da f para todo su dominio (conjunto A “conexo”) es el intervalo $[0, +\infty)$. También la imagen que da f del círculo de centro el origen y radio 3 (conjunto A “conexo”) es el intervalo $[0, 9]$, pues la función da el cuadrado de la distancia de cada punto al origen. Y la imagen que da f de “la región interior” a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$, estando el origen y la propia elipse excluidos (conjunto A “conexo”), es el intervalo $(0, 5)$, pues los puntos de la elipse más alejados del origen son $(0, \sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5})$. Y finalmente, la imagen que da f de “la región exterior” a la elipse, con dicha curva excluida, (conjunto A “conexo”) es el intervalo $(2, +\infty)$, porque los puntos de la elipse más cercanos al origen son $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Y el otro Teorema sobre “continuidad” que se cumple para “funciones de dos variables” (que tiene también su análogo para “funciones de tres variables”) es:

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS: Si $f(x, y)$ es “continua” en un conjunto A del plano que sea “**cerrado**” y “**acotado**” (ver Notas 1 y 2 más abajo), existirá algún punto de A donde f alcanzará el mayor valor (M) de todos los que tiene en A y existirá algún punto de A donde f alcanzará el menor valor (m) de todos los que tiene en A.

Desde luego, puede haber más de un punto en A donde la función alcance el valor M y puede haber más de un punto en A donde alcance el valor m , siendo los primeros puntos diferentes a los segundos, salvo que la función sea constante sobre A (con lo cual sería $M = m$ y este valor se alcanzará en cualquier punto de A).

Nota 1: “A es **cerrado**” cuando incluya todos los puntos de su “borde” o “contorno” (matemáticamente llamado “frontera de A”).

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$: Un círculo con su circunferencia incluida es “un conjunto cerrado” y también lo es el exterior del círculo con la circunferencia incluida. También es “cerrado” un semiplano con

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

su borde incluido. Y no es “un conjunto cerrado” el comprendido entre las dos ramas de una hipérbola cuando no incluya una de dichas ramas o no incluya ambas ramas. También son “conjuntos cerrados” una recta, una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola (solamente las curvas). Y muchos más.

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$: Un cubo, con sus 6 caras incluidas, es “cerrado”. Pero el cubo sin los puntos de uno de sus 12 lados, o sin uno de sus 8 vértices, no es “cerrado”. Una esfera, sin la correspondiente superficie esférica, no es “cerrado”. Un semiespacio limitado por un plano cualquiera, con el plano incluido, es “cerrado”. Uno de los octantes de un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, sin incluir los puntos de alguno de los tres planos que lo limitan o sin incluir al origen de coordenadas, no es “un conjunto cerrado”; pero con todos esos puntos incluidos, sí es “cerrado”. Y muchos más.

Nota 2: A es “acotado” si esté contenido en algún círculo o en algún rectángulo (cuando A sea subconjunto del plano) o cuando esté contenido en alguna esfera o en algún paralelepípedo (si A es subconjunto del espacio).

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$: La “región interior” a un polígono cualquiera, incluyendo o no incluyendo los puntos de dicho polígono, es “un conjunto acotado”. Pero, “el exterior” de una elipse o una de las regiones limitadas por una parábola o por una hipérbola, no son “conjuntos acotados”. Y una elipse (curva) es “un conjunto acotado”, pero una hipérbola o una parábola no lo son.

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$: Todo el espacio no es “acotado”. Cualquier poliedro (cuerpo) es “acotado”. “La región interior” de un elipsoide es “acotada” (tanto si incluye al elipsoide como si no lo incluye), pero “la región exterior” no es “acotada”. Un cono y un cilindro (cuerpos) son “conjuntos acotados”. Los paraboloides de cualquier tipo son “superficies no acotadas”. E igualmente, los hiperboloides de cualquier tipo son “superficies no acotadas”, y las regiones del espacio que limitan esas superficies son “conjuntos no acotados”.

NOTA MUY IMPORTANTE: Si f es continua en un conjunto A que es “cerrado”, “acotado” y también “conexo”, las imágenes de los puntos de A formarán un intervalo (en virtud del T. de los Valores Intermedios, por ser A “conexo”), el cual será de la forma $[m, M]$, donde m es el menor valor de la función en A y M es el mayor valor de la función en A (en virtud del T. de Bolzano-Weierstrass, al ser A “cerrado” y “acotado”).

De modo que si A no es “un conjunto conexo”, $f(A)$ puede no ser un intervalo (pero también puede serlo, según sea la función f). Y si A no es un “conjunto cerrado” o no es un “conjunto acotado”, $f(A)$ puede no tener un valor máximo o puede no tener un valor mínimo (pero puede tener solamente uno de esos valores o bien puede tener ambos valores, según sea la función f).

Ejemplos:

1) Para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ del ejemplo 1 de la página anterior, teníamos que la imagen de su dominio (que es todo el plano) es el intervalo $[0, +\infty)$. Es un intervalo porque todo el plano es “un conjunto conexo”, pero no ha resultado un intervalo del tipo $[m, M]$ porque todo el plano no es “un conjunto acotado”.

2) En cambio, la misma función da la imagen $[0, 9]$ para el círculo de centro el origen y radio 3, con la circunferencia incluida (conjunto A). Es nuevamente un intervalo porque

LÍMITES Y CONTINUIDAD CON FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES

el conjunto A es “conexo”, pero ahora lo da de la forma $[m, M]$ porque A es “cerrado” y es “acotado” (0 es el menor valor de f en A y 9 es el mayor valor de f en A).

3) La misma función da la imagen $(0, 5)$ para “el interior” de la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$ con el origen y la propia elipse excluidos (conjunto A); volvemos a tener un intervalo como imagen porque A es “conexo”, pero el intervalo no incluye los extremos 0 y 5 porque A no es “cerrado”, aunque sí es “acotado”. Si el conjunto A incluyese al origen pero no a los puntos de la elipse, la función alcanzaría su menor valor (que sería 0) y la imagen sería el intervalo $[0, 5)$. Y si A incluyese la elipse pero no al origen, la función alcanzaría su mayor valor (que sería 5), el cual es obtenido solamente en los puntos $(0, \sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5})$, por ser los de la elipse más alejados del origen, como podemos comprobar dibujándola, resultando en este caso como imagen el intervalo $(0, 5]$. Y si A incluyese al origen y a la elipse, la imagen sería el intervalo $[0, 5]$, pues el conjunto A sería “cerrado” y “acotado”.

Sin embargo, A podría incluir al origen y solamente al punto $(0, \sqrt{5})$ de la elipse, con lo cual su imagen sería el intervalo $[0, 5]$, no siendo A “un conjunto cerrado” (ya que le faltarían muchos puntos de su borde). Esto demuestra que en algún caso puede darse la tesis del Teorema de Bolzano-Weierstrass sin que se cumpla alguna de las condiciones de su hipótesis (lo cual nos indica que dicha hipótesis es una “condición suficiente” para el cumplimiento de su tesis, pero no es una “condición necesaria” para ese cumplimiento).

4) Lo mismo pasa con el Teorema de los Valores Intermedios (la imagen de un conjunto A puede ser un intervalo, sin que A sea necesariamente “un conjunto conexo” o bien sin que f sea “continua” sobre A ; todo depende del caso que analicemos).

Por ejemplo, sea A el conjunto formado por los puntos de **dos “coronas circulares” centradas en el origen, con radios 1 y 3 (la menor) y radios 5 y 8 (la mayor)**, con lo cual A no es “un conjunto conexo”. Y sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos de la corona menor, siendo además $f(x, y) = 4$ sobre los puntos de la corona mayor (se trata de una función “definida a trozos”). De este modo definida, la función f es “continua” sobre A , pero A no es “conexo”. Y sin embargo la imagen de A es el intervalo $[1, 9]$. En efecto, la función toma el valor 1 en los puntos de la circunferencia de radio 1 y toma el valor 9 sobre la circunferencia de radio 3, tomando los valores intermedios en los demás puntos de la “corona” menor (y en la otra “corona” toma solamente el valor 4, intermedio entre 1 y 9).

Pueden ponerse otros ejemplos donde A es “conexo” pero la función **no es** “continua” sobre A , siendo sin embargo $f(A)$ un intervalo. Y hay otros ejemplos donde A **no es** “conexo” y la función **no es** “continua” sobre A , siendo también $f(A)$ un intervalo.

En conclusión: Las condiciones de la hipótesis del Teorema de los Valores Intermedios son también “suficientes” para que se cumpla la tesis, pero no son “necesarias” para ello.
