

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

(Prerrequisitos: Límites y continuidad con dos y tres variables. Regla de L'Hôpital.
Infinitésimos)

Introducción

Las funciones reales de dos variables reales que consideraremos serán siempre **“funciones elementales”**, o sea funciones definidas en forma explícita, por una sola ecuación, la cual sea una “función básica” o resulte de operar con dos o más “funciones básicas” (ver la Sección 2.2). Y sabemos que las “funciones elementales” de cualquier número de variables son siempre continuas en sus respectivos dominios (establecido en la Sección 5.2).

Con lo cual, si $z = f(x, y)$ es una de dichas funciones, trataremos siempre algún límite con (x, y) tendiendo a un punto del plano (a, b) que **no pertenezca** al dominio de f . Ya que si (a, b) perteneciese al dominio de f , el límite sería inmediato: Sería el valor $f(a, b)$, por la continuidad de la función en ese punto.

IMPORTANTE: En la Sección 5.2 se explicó que el punto (a, b) tiene que cumplir una condición especial para que **tenga sentido** el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$: Tiene que haber siempre en el dominio de f puntos distintos del (a, b) cuyas distancias a este punto sean menores que cualquier número positivo tomado (por pequeño que sea). O dicho de otro modo, que en cualquier entorno del punto (a, b) , por pequeño que sea, tiene que haber infinitos puntos del dominio de la función f .

Pero, que tenga sentido el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ no implica que el mismo tenga que existir. Y sabemos que en caso de existir, su resultado puede ser un número real, puede ser $+\infty$, puede ser $-\infty$ o puede ser $\pm\infty$.

Por otra parte, los teoremas que se aplican para el cálculo de límites de funciones (límites de sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias) son los dados en la Sección 2.4 como Álgebra de Límites para las funciones de una variable (que valen también para las funciones de dos o más variables independientes, como se dijo en la Sección 5.2). Por tanto, los casos de indeterminación son los mismos de siempre: $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ , 1^∞ , 0^0 y $(+\infty)^0$, donde ∞ puede significar $+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$.

En los casos en que no haya indeterminación, los límites se obtienen por aplicación directa de los teoremas mencionados, teniendo en cuenta la continuidad de las “funciones elementales” involucradas y posiblemente ciertas propiedades de las “funciones básicas” (los llamaremos “límites directos”, por contraposición con los “límites indeterminados” que requieren un mayor trabajo).

También, en el cálculo de todos los límites, pueden aplicarse los procedimientos clásicos que convengan, como factorizaciones, simplificaciones, expresiones conjugadas, cambios de variables, sustitución de infinitésimos equivalentes y uso de identidades (como $u^v \equiv e^{v \cdot \ln u}$, válida para $u > 0$).

En este documento nos centraremos en la resolución de límites indeterminados de “funciones elementales” de dos variables. Los límites “no indeterminados” o “directos” de las mismas funciones han sido tratados en la Sección 5.3.

Ejemplo 1: El límite de la “función elemental” $f(x, y) = \frac{\cos(x+y)+e^{xy}}{x-y}$, cuando $(x, y) \rightarrow (1, 1)$, es un “límite directo”, pues la función del numerador tiende a $e + \cos 2$ (por ser “elemental” y estar el punto $(1, 1)$ en su dominio) y la función del denominador tiende a cero (por la misma

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

razón), con lo cual el límite del cociente será infinito (por aplicación directa de un teorema del Álgebra de Límites).

Pero el signo del símbolo ∞ será en este caso $\pm$, porque el numerador será positivo (ya que tiende a un número positivo) y el denominador tiende a cero pudiendo tomar valores positivos y valores negativos. En efecto, el punto variable (x, y) puede estar arbitrariamente próximo a $(1, 1)$ y ser $x - y$ positivo o ser $x - y$ negativo, ya que al estar el punto $(1, 1)$ sobre la recta $x - y = 0$, cualquier entorno de dicho punto incluirá infinitos puntos del semiplano correspondiente a la inecuación $x - y < 0$, así como infinitos puntos del semiplano correspondiente a la inecuación $x - y > 0$ (situados a ambos lados de la recta).

Nota: El punto $(1, 1)$ al cual tiende (x, y) en el límite anterior no pertenece al dominio de la función f (como estábamos suponiendo), pero cualquier entorno de $(1, 1)$ incluye infinitos puntos pertenecientes a dicho dominio (todos sus puntos pertenecerán al mismo, menos los puntos que estén sobre la recta $x - y = 0$, pues en dichos puntos se anula el denominador de f). Por tanto, se cumple la condición para que este límite tenga sentido.

Ejemplo 2: El límite de la “función elemental” $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, es un límite indeterminado del tipo $0/0$. Y como tal, puede que exista o que no exista (saberlo requiere un trabajo). Y en caso de existir, puede que el límite sea un número real (no sabemos cuál) o puede que sea infinito ($+\infty$, $-\infty$ o $\pm\infty$). Veremos más adelante que este límite no existe (ejemplo 2 de la pág. 5).

Nota: En este caso, el punto $(0, 0)$ no pertenece al dominio de la función (como debe ser), pero cualquier entorno del mismo tiene todos sus puntos restantes en dicho dominio (que es $\mathbb{R}^2$ menos el punto $(0, 0)$). Por tanto, se cumple la condición para que este límite tenga sentido.

Ejemplo 3: El límite de la “función elemental” $f(x, y) = (1 + xy)^{1/x}$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 3)$, es indeterminado del tipo 1^∞ . Por tanto, aplicamos la identidad $u^v \equiv e^{v \cdot \ln u}$ y se convierte en el límite de $e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1+xy)}$, luego bastará ahora que conozcamos el límite del exponente del número e . Por tanto, queremos conocer el límite del producto $\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + xy)$, que es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Pero ahora podemos aplicar sustitución de infinitésimos equivalentes, sustituyendo la función $\ln(1 + xy)$ por su equivalente xy (en general, cuando u tienda a 1, el infinitésimo $\ln u$ es equivalente a $u - 1$; en este caso tenemos $u = 1 + xy$). En conclusión, el exponente de e equivale al producto $\frac{1}{x} \cdot xy = y$ (pues tiene que ser $x \neq 0$ para que la función dada exista), luego el límite de este exponente es 3, pues $(x, y) \rightarrow (0, 3)$. Conclusión: El límite dado es e^3 .

Nota: Aquí el punto $(0, 3)$ no pertenece al dominio de la “función elemental” dada, pero cualquier entorno de $(0, 3)$ incluye infinitos puntos del dominio de f (que es $\mathbb{R}^2$ menos los puntos de la recta $x = 0$), por lo cual se cumple la condición para que el límite tenga sentido.

Ahora bien, el estudio de las indeterminaciones depende del número de variables independientes de la función considerada. Así, para funciones de una variable se puede utilizar normalmente la Regla de L'Hôpital en las indeterminaciones $0/0$ e ∞/∞ , lo cual no puede hacerse cuando hay dos o más variables (lo dijimos en la Sección 5.2).

A su vez, cuando hay varias variables, la existencia y el posible valor del límite que estudiemos puede indagarse mediante los llamados “límites direccionales”, “límites sobre curvas” o “límites iterados”, los cuales no tienen sentido cuando la función dependa de una sola variable (en cuyo

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

caso sólo podrían estudiarse los llamados “límites laterales”, o sea, “límite por la derecha” y “límite por la izquierda”).

En lo que sigue usaremos muchas veces “límites direccionales” y en un único caso usaremos “límite sobre una curva”. También trataremos al final los “límites iterados”.

Recordemos que todos los casos de indeterminación pueden llevarse a casos en forma de cociente. Y una indeterminación del tipo ∞/∞ puede convertirse operando en otra del tipo $0/0$. Por tanto, le prestaremos atención exclusiva a las del último tipo.

Además, utilizaremos la “sustitución de infinitésimos equivalentes” en todos los casos en que sea posible, como en el Ejemplo 3 anterior. Y será posible, cuando el infinitésimo sea **un factor del numerador o del denominador**, en la indeterminación de un cociente que queramos resolver). (Ver Sección 3.4).

Entonces, nos centraremos a continuación en límites indeterminados de “funciones elementales” de dos variables, del tipo $0/0$, cuya resolución puede ser bastante complicada como veremos.

Indeterminaciones del tipo $0/0$

En su estudio se recomienda:

1) Sustituir infinitésimos por sus equivalentes (si se puede) y tratar de simplificar el cociente (a veces efectuando factorizaciones, tanto en el numerador como en el denominador).

2) Si el límite es con $(x, y) \rightarrow (a, b)$, donde $(a, b) \neq (0, 0)$, aplicar el cambio de variables
 $\boxed{x - a = u} ; \boxed{y - b = v}$

de modo que el nuevo límite quedará normalmente más sencillo, con $(u, v) \rightarrow (0, 0)$.

Lo que le pase a la función $f(x, y)$ en (a, b) , le pasará a la función $f(u + a, v + b) = g(u, v)$ en $(0, 0)$, pues el cambio de variables representa simplemente una traslación de lo que ocurre en un entorno de (a, b) a un entorno del punto $(0, 0)$.

3) Si no se ha resuelto la indeterminación después de aplicar los pasos anteriores y simplificando el cociente, calcular los llamados “límites direccionales” usando las rectas de ecuaciones $\boxed{y = mx}$ cuando sea $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (o de ecuaciones $\boxed{v = mu}$, si se hubiesen cambiado las variables previamente). Por tanto, calcular:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\lim_{u \rightarrow 0} f(u, mu)} \quad (\text{si se efectuó el cambio de variables anterior})$$

Los cuales siguen siendo del tipo $0/0$, pero dependen ya de una sola variable (x o u , que tiende a cero) y del parámetro real m (que se deja libre; así, para cada valor de m tenemos el límite en la dirección de la recta con esa pendiente). Es importante hacer notar que a esos límites se les podría aplicar la Regla de L'Hôpital si fuese necesario (porque son del tipo $0/0$ con una sola variable).

Faltaría el “límite direccional sobre el eje OY” (en la dirección vertical, que no tiene pendiente). Para calcularlo hay que sustituir en la función $\boxed{x = 0}$ (ecuación del eje OY) y hacer tender la variable y a cero. O sea, calcular:

$$\boxed{\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\lim_{v \rightarrow 0} f(0, v)} \quad (\text{si se efectuó el cambio de variables anterior})$$

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

NOTA IMPORTANTE: Cuando tengamos $(x, y) \rightarrow (a, b)$, siendo $(a, b) \neq (0, 0)$, y no hayamos efectuado el cambio de variables recomendado en 2), no pueden usarse las rectas de ecuaciones $y = mx$, que pasan por el origen pero no pasan por el punto (a, b) , salvo una de ellas. Lo correcto en estos casos es hacer primero el cambio de variables explicado $(x - a = u ; y - b = v)$ y luego usar las rectas de ecuaciones $v = mu$, o bien no hacer el cambio de variables y usar directamente las rectas de ecuaciones $y - b = m \cdot (x - a)$, que pasan todas por el punto (a, b) y en este caso el nuevo límite se calcularía con $x \rightarrow a$ (en vez de $x \rightarrow 0$). El “límite direccional en la dirección vertical” se podría también obtener directamente sustituyendo en la función dada $x = a$ (ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (a, b)) y hacer tender la variable y al valor b .

Ahora, dentro de la recomendación 3), tenemos dos posibilidades:

3.1) Si al menos dos “límites direccionales” resultasen diferentes (correspondientes a dos valores distintos de m), se concluirá que el límite dado de la función de dos variables no existe (esto ocurre cuando el resultado final del “límite direccional” quede dependiendo de m). También puede suceder que “el límite en la dirección vertical” sea diferente a los restantes, concluyéndose también que el límite dado no existe. (Y en estos casos el estudio del límite habrá concluido).

3.2) Si todos los “límites direccionales” diesen el mismo valor (o sea, que el parámetro m no influya en sus resultados y “el límite en la dirección vertical” coincida también con los demás), se concluirá que el límite dado de la función de dos variables (que llamaremos de aquí en adelante “límite doble” para abreviar) puede existir, pero no es seguro todavía. En los casos de resultar existente, su valor coincidiría con el obtenido para todos los “límites direccionales”. (En este caso, continuar el estudio pasando al punto 4) que sigue).

4) Ahora, si el límite indeterminado está en la situación 3.2) anterior y tenemos (x, y) o (u, v) tendiendo a $(0, 0)$, lo mejor es aplicarle a la función $f(x, y)$, o bien $f(u + a, v + b)$, un nuevo cambio de variables: $x = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sin \theta$, o bien $u = r \cdot \cos \theta$; $v = r \cdot \sin \theta$, (llamado “cambio a coordenadas polares”), y ahora el límite se calcula con la variable r tendiendo a cero por la derecha ($r \rightarrow 0^+$) mientras la variable θ queda libre (podremos suponer θ variando entre 0 y 2π , o entre $-\pi$ y π). Por tanto, tenemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

o bien

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} f(u + a, v + b) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cdot \cos \theta + a, r \cdot \sin \theta + b)$$

Nota 1: Para aplicar este cambio de variables a “coordenadas polares” con las variables (x, y) es indispensable que el límite que tengamos sea con $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. En otro caso, debemos aplicar previamente el cambio de variables dicho en el apartado 2, con lo cual se tendrá $(u, v) \rightarrow (0, 0)$, y entonces el cambio a coordenadas polares sería $u = r \cdot \cos \theta$; $v = r \cdot \sin \theta$.

Nota 2: La variable r de las coordenadas polares representa la distancia del punto variable (x, y) al origen de coordenadas, con lo cual si (x, y) tiende a $(0, 0)$ se tendrá $r \rightarrow 0^+$ y recíprocamente (análogamente ocurre para las variables u y v , si hubiésemos hecho el cambio de la recomendación 2). Y la variable θ representa la medida en radianes del ángulo orientado que forma el segmento que va del origen al punto variable (x, y) con la parte positiva del eje OX. Como el punto (x, y) o el punto (u, v) se puede mover libremente por puntos del dominio en un entorno del origen, la variable θ quedará libre, variando entre 0 y 2π , o entre $-\pi$ y π .

Ahora, en el anterior punto 4) caben nuevamente dos posibilidades:

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

4.1) El límite indicado con $r \rightarrow 0^+$ existe y da un único valor, **independientemente de θ** . En ese caso, **“el límite doble” existe y coincide con ese valor obtenido** (que debe coincidir a su vez con los “límites direccionales” calculados anteriormente).

4.2) Existe algún valor de θ (digamos θ_0) de modo que si $r \rightarrow 0^+$ y $\theta \rightarrow \theta_0$ este límite vuelve a dar indeterminado. En este caso **podría ser que no exista “el límite doble”**. Para saberlo habría que estudiar “límites sobre curvas”, con curvas adecuadas que pasen por el origen teniendo la inclinación dada por el ángulo θ_0 ; sólo veremos un ejemplo de este caso. Y en esta situación, basta que haya una curva con esa inclinación sobre la cual resulte un valor para el límite diferente a los valores coincidentes de los “límites direccionales” anteriormente obtenidos, para que la conclusión final sea que el “límite doble” no existe.

Ejemplos de indeterminaciones del tipo 0/0

EJEMPLO 1: Cuando $(x, y) \rightarrow (2, -1)$, se tiene,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{\ln(x+y)}{(x+y-1)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x+y-1}{(x+y-1)^2} = \lim_{x+y \rightarrow 1} \frac{1}{x+y-1} = \pm\infty$$

Donde hemos hecho la sustitución del infinitésimo $\ln(x+y)$ por su equivalente $x+y-1$ pues $x+y$ tiende a uno. Pero además, $x+y-1$ puede ser positivo o negativo cuando (x, y) está cerca de $(2, -1)$ (en efecto, este punto está en la recta $x+y-1=0$ y en cualquier entorno de dicho punto, por pequeño que sea, hay puntos de los dos semiplanos definidos por esa recta cuyas inequaciones son $x+y-1 < 0$ y $x+y-1 > 0$).

Nótese que el límite dado es indeterminado, pero al sustituir el infinitésimo del numerador y simplificar la expresión dada, ha resultado un “límite directo”.

Nota: Aquí el punto $(2, -1)$ no pertenece al dominio, pero tampoco pertenecen los puntos de la recta $x+y-1=0$ que pasa por dicho punto, ni los puntos donde sea $x+y \leq 0$ (semiplano de borde la recta $y=-x$ que contiene al tercer cuadrante del sistema de coordenadas, incluida dicha recta). Sin embargo, dibujando las rectas paralelas $x+y-1$ e $y=-x$, se puede ver que en cualquier entorno de $(2, -1)$, por pequeño que sea, hay infinitos puntos del dominio (luego se cumple la condición para que el límite tenga sentido).

EJEMPLO 2: Cuando $(x, y) \rightarrow (2, 3)$ se tiene, aplicando el cambio $x-2=u$; $y-3=v$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{xy-3x-2y+}{x^2+y^2-4x-6y+13} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u \cdot v}{u^2+v^2}, \text{ donde aquí } (u, v) \rightarrow (0, 0).$$

(el cambio de variables se hace sustituyendo en $f(x, y)$ la variable x por $u+2$, así como la variable y por $v+3$, operando y simplificando). Obsérvese que la expresión $g(u, v)$ obtenida con el cambio es más sencilla que la dada (coincide con la expresión dada en el Ejemplo 2 de la pág. 2). Ahora, siguiendo la recomendación 3), calculamos los “límites direccionales”, tomando en este caso $v = mu$ y se tiene, cuando $u \rightarrow 0$:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \cdot mu}{u^2+(mu)^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{mu^2}{(1+m^2) \cdot u^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Al depender el resultado de la pendiente m , los “límites direccionales” son diferentes entre sí, luego concluimos que “el límite doble” de $g(u, v)$ no existe. (Luego tampoco existe el límite que quedó pendiente en el Ejemplo 2 de la pág. 2). Pero entonces, el límite doble de la función $f(x, y)$ dada tampoco existe.

Nota: El punto $(0, 0)$ no pertenece al dominio de $g(u, v)$, pero cualquier entorno de dicho punto tendrá todos los demás puntos en su dominio (con lo cual se cumple la condición para que el límite tenga sentido). Y en términos de las variables (x, y) , el punto $(2, 3)$ no pertenece al dominio de $f(x, y)$, pero cualquier entorno de dicho punto tendrá todos los demás puntos en su dominio (en efecto, el denominador de $f(x, y)$ es la suma de cuadrados $(x-2)^2 + (y-3)^2$, con lo cual el dominio de la función f es $\mathbb{R}^2 - \{(2, 3)\}$).

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

EJEMPLO 3: Si el límite fuese de la función $f(x, y) = \frac{e^{xy} - \cos(x^2y)}{y^2}$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, siendo el dominio de f todo el plano menos los puntos del eje OX (donde es $y = 0$), volveríamos a tener la indeterminación $0/0$. Entonces, siguiendo la recomendación 3), calcularemos los “límites direccionales”, esta vez sobre las rectas de ecuaciones $y = mx$ (con $m \neq 0$, pues no queremos usar el eje OX).

Entonces calculamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx^2} - \cos(mx^3)}{m^2x^2}$, cuando $x \rightarrow 0$, que es indeterminado del tipo $0/0$, pero al cual le podemos aplicar la Regla de L'Hôpital. Entonces, derivando el numerador y derivando el denominador, se tiene el siguiente límite cuando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx \cdot e^{mx^2} + 3mx^2 \cdot \sin(mx^3)}{2m^2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m \cdot e^{mx^2} + 3mx \cdot \sin(mx^3)}{2m^2} = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0)$$

y como el resultado depende de m , concluimos que el límite doble dado no existe.

EJEMPLO 4: Cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, se tiene $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos “límites direccionales” (sobre las rectas de ecuaciones $y = mx$, con $x \rightarrow 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot mx}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{\sqrt{(1+m^2) \cdot x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m \cdot |x|^2}{\sqrt{1+m^2} \cdot |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m \cdot |x|}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Y esto ocurre para cualquier valor de la pendiente m .

Además, el límite en la dirección del eje OY (dirección vertical, sin pendiente) es:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Entonces, como todos los “límites direccionales” dan el mismo resultado, **puede que “el límite doble” exista** (y en ese caso valdrá cero), **pero todavía no es seguro** (situación prevista en 3.2)

Aplicamos ahora el cambio a “coordenadas polares” ($x = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sin \theta$) previsto en la recomendación 4), con lo cual tenemos nuevo límite con $r \rightarrow 0^+$, dejando la variable θ libre:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{(r \cdot \cos \theta)^2 + (r \cdot \sin \theta)^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} (2r \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta) = 0$$

para todo valor de θ , pues la última expresión se reduce a $r \cdot \sin 2\theta$, donde $r \rightarrow 0^+$ y los valores de $\sin 2\theta$ permanecen acotados entre -1 y 1 . Conclusión: **“El límite doble” dado inicialmente existe y vale cero.** (Situación prevista en 4.1).

Nota: En este caso tampoco $(0, 0)$ pertenece al dominio de la función dada, pero cualquier entorno del mismo tiene el resto de sus puntos en dicho dominio, que es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (con lo cual se cumple la condición para que el límite tenga sentido).

Además, en el cálculo anterior nos hemos basado en el siguiente teorema:

TEOREMA: Si el límite de una función es cero y los valores de otra función permanecen acotados entre dos números fijos, el límite del producto de ambas funciones es cero.

EJEMPLO 5: Cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, se tiene $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculamos “límites direccionales” (sobre las rectas de ecuaciones $y = mx$, con $x \rightarrow 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

válido para cualquier $m \neq 0$. O sea, los “límites direccionales” coinciden sobre todas las rectas oblicuas, dando cero. Falta ver qué ocurre sobre los ejes OX y OY.

En la dirección del eje OX ($m = 0$) se tiene: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

Y el límite en la dirección del eje OY (dirección vertical, sin pendiente) será:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Por tanto, todos los “límites direccionales” coinciden en el valor cero y entonces **“el límite doble” puede que exista y valga cero, pero todavía no es seguro.** (Situación descrita en 3.2)

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

Aplicamos entonces la recomendación 4), y usamos el cambio a coordenadas polares ($x = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sin \theta$), quedando el nuevo límite con $r \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x^2+y^2} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{r^4 \cdot \cos^4 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{r^3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta}{r^2 \cdot \cos^4 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta}{r^2 \cdot \cos^4 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta}$$

En este límite el numerador tiende a cero (independientemente de θ), porque $r \rightarrow 0^+$ y $\cos^2 \theta \cdot \sin \theta$ es una función cuyos valores quedan acotados entre -1 y 1 . Pero tenemos un denominador que tiende también a cero solamente cuando θ tiende a cero o bien cuando θ tiende a π , al mismo tiempo que r tiende a cero por la derecha. Por tanto, en esas condiciones se mantendría la indeterminación $0/0$ y seguimos sin saber qué ocurre con “el límite doble”, el cual podría no existir (situación descrita en el apartado 4.2).

Pues bien, según lo dicho en 4.2) habría que estudiar “**límites sobre curvas**”, de modo que dichas curvas pasen por el origen con la inclinación dada por el ángulo θ_0 (en este caso, con inclinación cero o con inclinación π significa lo mismo: que pasen horizontalmente). Observando que en la expresión de $f(x, y)$ los exponentes de la variable x duplican a los exponentes de la variable y , se nos ocurre ver qué sucede cuando nos acercamos al origen sobre la curva $y = x^2$ (cuya tangente en $(0, 0)$ es el eje OX, luego pasamos horizontalmente por dicho punto). Tenemos así el siguiente “límite sobre la curva” $y = x^2$ (con $x \rightarrow 0$):

$$\lim_{x^4+(x^2)^2} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{2x^4} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

¡Sorprendente! El límite sobre esta curva es $1/2$, mientras que todos los límites direccionales daban cero. En conclusión, “el límite doble” no existe (en caso de existir y ser límite finito, los valores de la función tendrían que acercarse a un mismo número real, independientemente de cómo movamos el punto variable (x, y) , con tal que lo acerquemos en el dominio de f al punto $(0, 0)$ sin llegar al mismo). Y en este caso el dominio de f es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Nota: Otra vez ocurre que cualquier entorno de $(0, 0)$ tiene el resto de sus puntos en dicho dominio (con lo cual se cumple la condición para que este límite tenga sentido). Sin embargo, el límite no existe (tiene sentido considerarlo, pero cuando lo estudiamos vemos que no existe).

EJEMPLO 6: Cálculo del siguiente límite cuando $(x, y) \rightarrow (1, -2)$:

$$\lim_{\sqrt[3]{2(x-1)^2+4(y+2)^2+1}-1} \frac{(e^{x-1}-1) \cdot \arcsen[(x-1) \cdot (y+2)]}{\sqrt[3]{2(x-1)^2+4(y+2)^2+1}-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Sustituimos los siguientes infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} & e^{x-1} - 1 \text{ por } x - 1, \\ & \arcsen[(x-1) \cdot (y+2)] \text{ por } (x-1) \cdot (y+2) \\ & \text{y } \sqrt[3]{2(x-1)^2+4(y+2)^2+1}-1 \text{ por } \frac{1}{3} \cdot [2(x-1)^2+4(y+2)^2] \end{aligned}$$

Nota: Se demuestra que $e^u - 1$ es infinitésimo equivalente a u , si $u \rightarrow 0$. Así mismo, $\arcsen u$ es equivalente a u , si $u \rightarrow 0$. Y, finalmente, $\sqrt[n]{u+1} - 1$ es equivalente a u/n , si $u \rightarrow 0$. (Ver todas estas equivalencias en la Sección 3.4).

Con lo cual tenemos el nuevo límite: $\lim_{\frac{1}{3}[2(x-1)^2+4(y+2)^2]} \frac{(x-1)^2 \cdot (y+2)}{\frac{1}{3}[2(x-1)^2+4(y+2)^2]} = \left(\frac{0}{0}\right)$, con $(x, y) \rightarrow (1, -2)$

Entonces, aplicando el cambio de variables $x-1=u$; $y+2=v$, se obtiene:

$$\lim_{2u^2+4v^2} \frac{3u^2 v}{2u^2+4v^2} = \left(\frac{0}{0}\right) , \text{ con } (u, v) \rightarrow (0, 0)$$

Ahora calculamos los “límites direccionales” haciendo $v = mu$ (con $u \rightarrow 0$):

$$\lim_{2u^2+4(mu)^2} \frac{3u^2 \cdot (mu)}{2u^2+4(mu)^2} = \lim_{2u^2+4m^2u^2} \frac{3mu^3}{2u^2+4m^2u^2} = \lim_{2+4m^2} \frac{3mu}{2+4m^2} = 0 , \text{ para todo } m$$

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

Además, “el límite en la dirección vertical” ($u = 0$) también es cero. En vista que todos los “límites direccionales” coinciden, **puede que “el límite doble” anterior exista, pero no es seguro.** (Situación prevista en 3.2).

Aplicamos entonces a dicho “límite doble” el cambio a coordenadas polares: $u = r \cdot \cos \theta$; $v = r \cdot \sin \theta$, obteniéndose el nuevo límite, con $r \rightarrow 0^+$ y dejando θ libre (recomendación 4):

$$\lim \frac{3r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot r \cdot \sin \theta}{2r^2 \cdot \cos^2 \theta + 4r^2 \cdot \sin^2 \theta} = \lim \frac{3r \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta}{2 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}$$

El numerador tiene límite cero, porque $3r$ tiende a cero y $\cos^2 \theta \cdot \sin \theta$ es una función cuyos valores están acotados entre -1 y 1 . Pero el denominador puede escribirse como $2 + 2 \sin^2 \theta$, con lo cual se mantiene mayor o igual que 2 y no puede tender a cero. Conclusión: **“El límite doble” existe y es cero** (situación 4.1).

Nota: En este caso, nuevamente, el punto $(0, 0)$ no pertenece al dominio de la función $g(u, v)$, pero cualquier entorno de ese punto tiene los restantes puntos en su dominio, ya que el mismo es $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Y vemos que para la función $f(x, y)$ original, el punto $(1, -2)$ no pertenece a su dominio porque anula su denominador, pero cualquier entorno de dicho punto tiene siempre infinitos puntos en su dominio, ya que el mismo es $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) / -1 \leq (x - 1) \cdot (y + 2) \leq 1\}$ (es la región del plano que incluye a las rectas $x = 1$ e $y = -2$ que se cortan en $(1, -2)$ y está limitada por las ramas de las hipérbolas $(x - 1) \cdot (y + 2) = 1$ y $(x - 1) \cdot (y + 2) = -1$, ambas incluidas).

Por tanto, se cumple la condición para que el límite de f y el límite de g tengan sentido). **Y en este caso el límite existe.**

Sobre límites iterados

Se llaman “límites iterados” de $f(x, y)$ en el punto (a, b) los resultados (si existen) de **calcular dos límites sucesivos** a la función $f(x, y)$ que tengamos, haciendo tender primero la variable x al valor a y haciendo tender después la variable y al valor b , o bien, en orden inverso, haciendo tender primero la variable y al valor b y después la variable x al valor a .

Llamemos: $L_{xy} = \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)]$ (aquí primero $x \rightarrow a$ y luego $y \rightarrow b$)

Y llamemos: $L_{yx} = \lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)]$ (aquí primero $y \rightarrow b$ y luego $x \rightarrow a$)

Pues bien, tenemos al respecto el siguiente Teorema:

- a) Si L_{xy} y L_{yx} existen y no coinciden, el “límite doble” no existe.
- b) Si dichos límites existen y coinciden, es posible que exista “el límite doble”, pero no es seguro (en caso de existir, coincidirá con el valor de los “límites iterados”).
- c) Y si no existe uno de los “límites iterados” o bien no existen ambos, no puede asegurarse nada respecto a “el límite doble” (puede existir o no existir).

Observación 1: Los “límites iterados” sirven principalmente para descartar la existencia de “el límite doble”, cuando se da el caso de que sean distintos. Son solamente dos límites, mientras que “límites direccionales” hay infinitos, pero se calculan casi todos del mismo modo, como hemos visto. Ahora bien, la no existencia de un solo “límite direccional” implica la no existencia de “el límite doble” (salvo que dicho “límite direccional” no tenga sentido, porque nos acerquemos al punto (a, b) sobre una recta que esté fuera del dominio de la función). En cambio, la no existencia

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

de un “límite iterado” no indica nada sobre la existencia de “el límite doble”. Por ello no hemos recomendado anteriormente la consideración de los “límites iterados” en el procedimiento descrito a partir de la pág. 3 para los límites indeterminados del tipo 0/0 (aunque podríamos haberlo hecho).

Observación 2: No es en absoluto necesario que estemos en un caso de indeterminación para que podamos considerar los “límites iterados” de la función en el punto dado.

Ejemplos:

1) La “función elemental” $f(x, y) = \frac{xy-3x-2y+6}{x^2+y^2-4x-6y+13}$ tiene límite indeterminado del tipo 0/0 en el punto (2, 3).

Podemos calcular primero su límite cuando $x \rightarrow 2$, obteniendo la función 0, pues el numerador tiende a cero y el denominador tiende a $y^2 - 6y + 9$ (constante, pues en este primer límite y es un parámetro real, o sea, una constante desconocida). Y ahora calculamos el límite de la función 0 cuando $y \rightarrow 3$, que es 0 (el límite de una función constante es dicha constante). Por tanto, tenemos $L_{xy} = 0$.

Calculemos ahora primero el límite de $f(x, y)$ cuando $y \rightarrow 3$, obteniendo otra vez la función 0, pues el numerador tiende a cero y el denominador tiende a $x^2 - 4x + 4$ (constante). Y al calcular ahora el límite cuando $x \rightarrow 2$ resulta otra vez 0. Por tanto, $L_{yx} = 0$.

En este caso ambos “límites iterados” existen y coinciden, pero el Teorema anterior dice que no podemos asegurar nada sobre “el límite doble”. Y en el Ejemplo 2 de la página 5 vimos este mismo caso, llegando a la conclusión de que “el límite doble” no existe.

2) La “función elemental” $f(x, y) = \frac{3x-2y+5}{4x+y+3}$ tiene también límite indeterminado del tipo 0/0 en el punto (-1, 1).

Calculando primero su límite cuando $x \rightarrow -1$ resulta la función $(-2y + 2)/(y - 1)$. Y cuando $y \rightarrow 1$, esta función tiene límite -2 (es indeterminado 0/0 pero al simplificarlo da -2). Por tanto, se tiene $L_{xy} = -2$.

Calculando ahora el límite de $f(x, y)$ cuando $y \rightarrow 1$ resulta la función $(3x + 3)/(4x + 4)$. Función que tiene límite 3/4 cuando $x \rightarrow -1$ (misma situación anterior y al simplificarlo da -1). Luego, tenemos $L_{yx} = 3/4$.

En este caso, al ser los dos “límites iterados” diferentes, el Teorema anterior nos dice que “el límite doble” no existe.

Y podemos comprobarlo haciendo el cambio de variables $x + 1 = u$; $y - 1 = v$ para luego calcular “límites direccionales”, obteniéndose para los mismos el resultado $(3 - 2m)/(4 + m)$. Como vemos, los “límites direccionales” dependen de la pendiente m , luego “el límite doble” efectivamente no existe.

3) Para la “función elemental” $f(x, y) = y \cdot \text{sen}(1/x)$, en el punto (0, 0), **“el límite doble” es cero**, pues la función $\text{sen}(1/x)$ está acotada entre -1 y 1, con lo cual el producto $y \cdot \text{sen}(1/x)$ tiene límite cero.

Calculando sus “límites iterados”, se obtiene: $L_{yx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \left[y \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$

$$L_{xy} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left[y \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \right) \text{ no existe,}$$

pues en el primer límite correspondiente a L_{xy} (cuando $x \rightarrow 0$) la variable real y es una constante y la función $\text{sen}(1/x)$ oscila entre -1 y 1, con lo cual el producto $y \cdot \text{sen}(1/x)$ oscila entre $-y$

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

e y , siendo $y \neq 0$ (por tanto, este límite no existe). Con lo cual, no podrá calcularse el segundo límite (cuando $y \rightarrow 0$).

Estamos entonces en el caso en que **uno de los “límites iterados” no existe y sin embargo “el límite doble” existe** (el Teorema anterior decía que en este caso no puede asegurarse nada sobre “el límite doble”). Obsérvese que el único “límite iterado” existente coincide con “el límite doble”.

4) La “función elemental” $f(x, y) = x \cdot \text{sen}(1/y) + y \cdot \text{cos}(1/x)$ **tiene “límite doble” cero**, cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, porque los dos sumandos tenderán a cero, al ser productos de funciones acotadas entre -1 y 1 por funciones que tienden a cero.

Pues bien, se puede comprobar que no existen ambos “límites iterados” en $(0, 0)$ (por razonamiento parecido al anterior):

En efecto,
$$L_{xy} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \text{sen}(1/y) + y \cdot \text{cos}(1/x)] \right)$$

no existe, pues al tender x a cero, el primer sumando tenderá a cero y el segundo sumando quedará oscilando entre $-y$ y y , siendo $y \neq 0$, con lo cual la suma quedará oscilando y ese límite no existirá. Y el segundo límite, con $y \rightarrow 0$, ya no podrá calcularse.

Pero
$$L_{yx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} [x \cdot \text{sen}(1/y) + y \cdot \text{cos}(1/x)] \right)$$

tampoco existe, pues al tender y a cero, el segundo sumando tenderá a cero y el primer sumando quedará oscilando entre $-x$ y x , siendo $x \neq 0$, con lo cual la suma quedará oscilando y ese límite no existirá. Y el segundo límite, con $x \rightarrow 0$, ya no podrá calcularse.

Tenemos entonces un caso en que no existen ambos “límites iterados” y sin embargo existe “el límite doble” de la función (el Teorema anterior decía que al no existir ningún “límite iterado”, no podía asegurarse lo que pasaría con “el límite doble”).

Límites de funciones de dos variables definidas a trozos por varias funciones elementales

Llegados a este punto, podemos agregar la consideración de los límites de “funciones definidas a trozos” mediante dos o más “funciones elementales”, donde cada una dará las imágenes de los puntos de un cierto subconjunto del plano, de modo que esos diferentes subconjuntos no tendrán puntos comunes pero en muchas ocasiones compartirán puntos de sus respectivas “fronteras” (ver ejemplos a continuación).

En estos casos, **algunos límites de la función “definida a trozos” que posiblemente no existan** serán los referidos a los puntos que estén a la vez en las fronteras de dos o más de dichos subconjuntos (cuando esto ocurra). Pero además, **podría no existir el límite de la “función definida a trozos” en algún “punto frontera” que lo sea solamente de uno de los subconjuntos dados en la definición de dicha función; pero esto podrá ocurrir solamente cuando dicho “punto frontera” no pertenezcan al subconjunto correspondiente**, porque dicho límite se reducirá al límite de la “función elemental” que defina la “función a trozos” en ese subconjunto (y hemos visto anteriormente que en esos puntos siempre tiene sentido el límite doble, pero el mismo puede no existir).

Inicialmente nos limitaremos al caso de una función $f(x, y)$ “definida a trozos” en un conjunto D del plano mediante **dos “funciones elementales” solamente**, de modo que otros casos más complicados se resuelven por analogía (el último ejemplo será de tres “funciones elementales”): Una de las “funciones elementales” que usemos la llamaremos $f_1(x, y)$ y dará las imágenes de los puntos de uno de los subconjuntos (que llamaremos D_1) y la otra “función elemental” la llamaremos $f_2(x, y)$ y dará las imágenes de los puntos del otro subconjunto (que llamaremos D_2), de modo que el dominio de f será $D = D_1 \cup D_2$, cumpliéndose $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Pues bien, **supongamos que los subconjuntos D_1 y D_2 comparten uno o más de sus “puntos frontera” o comparten**

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

totalmente sus “fronteras”, de modo que los “puntos frontera” comunes pertenezcan solamente a uno de los dos subconjuntos o no pertenezcan a uno ni al otro.

Ejemplo 1: Sea $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } 2x + 3y \leq 0 \\ 2xy, & \text{si } 2x + 3y > 0 \end{cases}$. Esta función está definida en todo el plano ($D = \mathbb{R}^2$), porque cualquier punto (x, y) cumplirá una de las inecuaciones dadas; aquí la “función elemental” $f_1(x, y)$ es $x + y$, la cual actúa sobre los puntos del subconjunto D_1 que es el **semi-plano** definido por la inecuación $2x + 3y \leq 0$, cuyo borde es la recta $2x + 3y = 0$, la cual pasa por el origen con pendiente $-2/3$ y forma parte de este semiplano D_1 , el cual contiene las partes negativas de los ejes OX y OY. Y la “función elemental” $f_2(x, y)$ es $2xy$, la cual actúa sobre los puntos del subconjunto D_2 que es el otro **semiplano** de igual borde, definido por la inecuación $2x + 3y > 0$, que no incluye los puntos de ese borde, pero contiene las partes positivas de los ejes OX y OY. Obsérvese que $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2$ y también $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (pues la recta que es borde de ambos semiplanos solamente está en D_1).

Nota: La función f anterior podría no haber incluido el signo $=$ en la primera de las dos inecuaciones dadas, con lo cual el subconjunto D_1 no incluiría los puntos de la recta $2x + 3y = 0$, siendo entonces el dominio de f el conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) : 2x + 3y = 0\}$. En este caso dicha recta seguiría siendo frontera común de D_1 y D_2 , pero sus puntos no pertenecerían a esos subconjuntos. Esto no afecta a la posible existencia o no de los límites de f en esos puntos de la frontera común, pues lo que importan son los puntos de sus entornos y los valores que tome f en los mismos.

¿Cómo se calculará el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, siendo el origen uno de los puntos de la frontera común de los dos subconjuntos D_1 y D_2 ? Obsérvese que en cualquier entorno de $(0, 0)$ hay infinitos puntos de D_1 y también infinitos puntos de D_2 (e igual ocurre con cualquier otro punto de la recta que es frontera común). Por tanto, debemos ver cuál es el límite de $f_1(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, cuál es el límite de $f_2(x, y)$ cuando (x, y) también tiende a $(0, 0)$ y comparar ambos resultados (si existen). En caso de ser ambos límites coincidentes, el límite de $f(x, y)$ existirá y será ese valor común, o será ∞ si ambos límites son infinitos (será $+\infty$ si ambos son $+\infty$, será $-\infty$ si ambos son $-\infty$ y será $\pm\infty$ si alguno de los límites es $\pm\infty$ o bien si uno es $+\infty$ y el otro es $-\infty$). Pero si ambos límites son números diferentes o uno es un número y el otro es infinito, el límite de $f(x, y)$ no existirá. (Es como la comparación de los “límites direccionales” cuando la función es de dos variables o la comparación de los “límites laterales” cuando la función es de una sola variable).

En nuestro ejemplo, el límite de f_1 es $f_1(0, 0) = 0$, pues f_1 es la restricción a D_1 de la “función elemental” $x + y$, cuyo dominio inicial era todo el plano, con lo cual es continua en $(0, 0)$. Y lo mismo sucede con la función f_2 , que es la restricción a la región D_2 de la “función elemental” $2xy$, cuyo dominio inicial era también todo el plano, con lo cual también es continua en $(0, 0)$. Así el límite de f_2 es $f_2(0, 0) = 0$, que coincide con el límite de f_1 en el mismo punto. Conclusión: El límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ existe y vale cero.

De un modo análogo, para calcular el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$, siendo (a, b) otro punto de la recta $2x + 3y = 0$ (“frontera común” entre los dos semiplanos D_1 y D_2), habrá que calcular el límite de f_1 y el límite de f_2 cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$. El primero es $f_1(a, b) = a + b$ y el segundo es $f_2(a, b) = 2ab$, por las mismas razones dadas anteriormente. Entonces, el límite de $f(x, y)$, cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$, existirá solamente cuando sea $a + b = 2ab$ y no existirá cuando sea $a + b \neq 2ab$.

Obsérvese que en este caso podemos resolver fácilmente el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por $a + b = 2ab$ y $2a + 3b = 0$ (esta última ecuación se tendrá que cumplir porque (a, b) pertenece a la recta), obteniéndose dos soluciones del sistema: $a = 0$ con $b = 0$ (que corresponde al origen de coordenadas) y $a = -1/4$ con $b = 1/6$. Por tanto, podemos decir que los únicos puntos de la “frontera común” de los semiplanos D_1 y D_2 donde existe el límite de la función f dada son el $(0, 0)$ y el $(-1/4, 1/6)$. En el primero ya vimos que el límite es cero y en el segundo el límite es $a + b$ o bien $2ab$, o sea, $-1/12$.

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

Nota: En cualquier punto (a, b) del dominio de $f(x, y)$ que no pertenezca a “la frontera común” de los subconjuntos D_1 y D_2 pero que sea “punto frontera” de solamente uno de esos subconjuntos, el límite de f **dependerá solamente** de la “función elemental” que dé los valores en el subconjunto del cual (a, b) sea “punto frontera” (porque en un entorno suficientemente pequeño de (a, b) solamente habrá puntos de ese subconjunto).

O sea, si (a, b) es “punto frontera” de D_1 pero no es “punto frontera” de D_2 , el límite en ese punto de la “función a trozos” f quedará definido por el límite que posea la “función elemental” $f_1(x, y)$ y si (a, b) es “punto frontera” de D_2 pero no es “punto frontera” de D_1 , el límite de f lo definirá la “función elemental” $f_2(x, y)$.

Ejemplo 2: Sea la función $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ x - y, & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ de dominio $\mathbb{R}^2$, donde D_1 es el círculo de centro el origen y radio 1 con la circunferencia incluida (inecuación $x^2 + y^2 \leq 1$) y donde D_2 es la región exterior al círculo mencionado con la circunferencia excluida (cuya inequación es $x^2 + y^2 > 1$). La frontera común en este caso es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Pues bien, para que exista el límite de f en un punto (a, b) de la frontera común, tendrá que ser $a^2 + b^2$ (límite de $f_1(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$) igual a $a - b$ (límite de $f_2(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$). Pero además, tendrá que ser $a^2 + b^2 = 1$, para que el punto esté en la circunferencia. O sea, tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a^2 + b^2 = a - b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$. Pero un sistema equivalente es $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, con lo cual (a, b) será punto de corte de la recta de ecuación $x - y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Y en este caso también hay dos soluciones, que se obtienen de un modo inmediato: Son el punto $(1, 0)$ y el punto $(0, -1)$, luego **solamente en esos puntos de la frontera común existe el límite de la función f dada y dicho límite es 1 en ambos casos.**

Pero en ejemplos diferentes de los anteriores podría haber muchos puntos (e incluso infinitos puntos) de la frontera común donde exista el límite de la función “definida a trozos” (y no solamente dos puntos como en los dos ejemplos anteriores). O puede que no haya puntos donde ese límite exista).

Y cuando la función f venga “definida a trozos” por 3 o más “funciones elementales”, que actúen sobre los puntos de ciertos subconjuntos del plano cuya unión determine el dominio de f y que no tengan puntos comunes (correspondiendo solamente uno de esos subconjuntos a cada “función elemental” dada en la definición de f), pero que compartan algún o algunos puntos de sus respectivas “fronteras”, la situación del límite de f cuando (x, y) tienda a uno de esos puntos se tratará de un modo análogo (es decir, si el punto (a, b) pertenece por ejemplo a las “fronteras” de los tres subconjuntos dados, habrá que analizar los límites de las tres respectivas “funciones elementales” cuando (x, y) tienda a (a, b) y compararlos entre sí; si coinciden los tres, f tendrá límite en ese punto, y si dos de ellos no coinciden, el límite de f no existirá en dicho punto.

Ejemplo 3 (función de dos variables “definida a trozos” por tres “funciones elementales”):

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} 4x - 5y, & \text{si } x > 0, y > 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{si } x > 0, y < 0 \\ \ln(x \cdot y), & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Aquí los subconjuntos donde actúan las tres “funciones elementales” dadas son: El primer cuadrante del sistema de coordenadas sin incluir su frontera (formada por los semiejes positivos OX y OY) que llamaremos D_1 , donde actúa $f_1(x, y) = 4x - 5y$; el cuarto cuadrante del sistema de

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

coordenadas sin incluir su frontera (formada por el semieje positivo OX y el semieje negativo OY) que llamaremos D_2 , donde actúa $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, y el tercer cuadrante del sistema de coordenadas sin incluir su frontera (formada por los semiejes negativos OX y OY) que llamaremos D_3 , donde actúa $f_3(x, y) = \ln(x \cdot y)$.

Obsérvese que el único punto que pertenece a la frontera de los tres subconjuntos D_1 , D_2 y D_3 es el origen de coordenadas. ¿Tiene sentido el límite de la función f dada cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? **Sí**, porque en cualquier entorno de $(0, 0)$ hay infinitos puntos del dominio D de la función dada (hay infinitos puntos de D_1 , hay infinitos puntos de D_2 y hay infinitos puntos de D_3).

Entonces, para saber si existe dicho límite, habrá que analizar los límites de las tres “funciones elementales” que se han utilizado en la “definición a trozos” de $f(x, y)$, cada uno de dichos límites con (x, y) tendiendo a $(0, 0)$. Y tenemos:

$$\begin{aligned}\lim f_1(x, y) &= \lim (4x - 5y) = 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 && \text{(por continuidad de } f_1 \text{ en } (0, 0)) \\ \lim f_2(x, y) &= \lim \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 && \text{(por continuidad de } f_2 \text{ en } (0, 0)) \\ \lim f_3(x, y) &= \lim \ln(x \cdot y) = -\infty && \text{(por propiedad de función logarítmica, pues } x \cdot y \rightarrow 0^+ \text{)}\end{aligned}$$

por tanto, **el límite de $f(x, y)$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, no existe**.

Obsérvese también que el semieje positivo OX es frontera común de los subconjuntos D_1 y D_2 y que el semieje negativo OY es frontera común de los subconjuntos D_2 y D_3 . Luego **pueden no existir** los límites de f en algunos puntos de dichos semiejes:

Tomando un punto cualquiera $(a, 0)$ con $a > 0$ del semieje positivo OX, se ve que los límites en ese punto de las funciones f_1 y f_2 resultan diferentes (uno es $4a$ y el otro es a), luego **el límite de f no existe en todo el semieje positivo OX**.

Y tomando un punto cualquiera $(0, b)$ con $b < 0$ del semieje negativo OY, también se ve que los límites en ese punto de las funciones f_2 y f_3 resultan diferentes (uno es $|b|$ y el otro es $-\infty$), luego **el límite de f no existe en todo el semieje negativo OY**.

Finalmente, **podemos decir que los puntos del plano donde la función dada posee límite son los siguientes**:

- 1) Los “puntos interiores” del primer cuadrante (D_1), siendo $4a - 5b$ el límite en (a, b) , con a y b positivos.
- 2) Los “puntos interiores” del cuarto cuadrante (D_2), siendo $\sqrt{a^2 + b^2}$ el límite en (a, b) , con a positivo y b negativo.
- 3) Los “puntos interiores” del tercer cuadrante (D_3), siendo $\ln(a \cdot b)$ el límite en (a, b) , con a y b negativos.
- 4) Los puntos del semieje positivo OY (“frontera” solamente de D_1), siendo $-5b$ el límite en $(0, b)$, con b positivo (puesto que los “puntos frontera” pertenecen a D_1).
- 5) Los puntos del semieje negativo OX (“frontera” solamente de D_3), siendo $-\infty$ el límite en $(a, 0)$, con a negativo. (Aquí, los puntos (x, y) de D que queden suficientemente cerca de $(a, 0)$ son únicamente de D_3 , luego serán $x < 0$ e $y < 0$, tendiendo entonces el logaritmo neperiano a $-\infty$, porque $x \cdot y \rightarrow 0^+$).