

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

(Prerrequisito: Límites y continuidad con dos y tres variables)

Introducción

Se trata de explicar las razones matemáticas que fundamentan el cálculo de ciertos límites de “funciones elementales” de dos variables (recuérdese que una “función elemental” estará siempre definida en forma explícita, por una sola ecuación, la cual resulte de efectuar una o varias operaciones con “funciones básicas”). (Ver al respecto la Sección 2.2). Y de un modo análogo puede procederse con funciones de tres variables. Se trata de límites que no son indeterminados, pero tampoco de respuesta inmediata.

Así, en los ejemplos que siguen se tratará siempre de algún límite de cierta “función elemental”, en un determinado punto que no pertenece a su dominio, pero que está en “la frontera” de dicho dominio (con lo cual el límite tendrá sentido, pero no resulta inmediatamente de la continuidad de la función en dicho punto). En los cuatro ejemplos explicados hemos elegido siempre el mismo punto para los límites considerados, simplemente para no cambiar ese dato de unos a otros, pero esto no tiene importancia pues el punto es siempre “frontera” del dominio de las funciones consideradas que sí son diferentes (con otro “punto frontera” se procedería de un modo análogo).

Normalmente, el razonamiento se basará en la continuidad de otras “funciones elementales”, también posiblemente en alguna propiedad de las “funciones básicas” (que deben conocerse perfectamente; ver Secciones 2.2 y 2.5), y además en la aplicación de algunas reglas del “álgebra de límites” (se han dado los teoremas correspondientes para funciones de una variable en la Sección 2.4, los cuales siguen siendo válidos para funciones de dos y tres variables, como dijimos en la sección 5.2).

No se trata de resolver los límites propuestos en los cuatro ejemplos por aplicación automática de algunas reglas aprendidas por los alumnos en cursos preuniversitarios, las cuales pueden ser correctas pero que normalmente adolecen de explicaciones (ver comentarios finales de los cuatro ejemplos). Se trata, justamente, de aprender a explicar en forma sencilla el porqué de esas reglas. Importan más las explicaciones del cálculo que el propio cálculo, el cual no suele ser difícil. (Las explicaciones dadas sirven así como repaso de muchas cuestiones que los alumnos deben conocer y han sido tratadas en Secciones anteriores a la presente).

Ejemplos

EJEMPLO 1: Hallar el límite de la función $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, explicando las razones que lo justifican y precisando el signo del resultado final si es posible, donde

$$f(x, y) = \frac{\ln[(x+2)^2 + (y-1)^4]}{\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” (está en forma explícita, definida por una sola ecuación y resulta de operar con “funciones básicas”) y no está definida en el punto dado $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula la expresión que está en el corchete del numerador y sabemos que $\ln 0$ no existe. Por tanto, el punto no pertenece al dominio de la función dada (como pedíamos inicialmente). Ver que el punto $(-2, 1)$ está en “la frontera” de dicho dominio es equivalente al hecho de que este límite tiene sentido, lo cual es más complicado de explicar y lo hemos hecho en la Nota final de este ejemplo.

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

Vemos también que el límite pedido no es de respuesta inmediata. En efecto, si el punto $(-2, 1)$ hubiese estado en el dominio de la función dada, el límite sería $f(-2, 1)$, porque al ser f “función elemental” sería continua en todo su dominio y entonces lo sería en el punto mencionado, con lo cual el límite coincidiría con el valor de la función en dicho punto.

Analicemos entonces, separadamente, qué ocurre con el numerador y qué ocurre con el denominador de la función dada:

La función $(x + 2)^2 + (y - 1)^4$ es una “función elemental” que vale cero en el punto $(-2, 1)$. Luego su límite será cero, cuando (x, y) tienda a dicho punto (por continuidad en el mismo). Pero, además, dicha función se mantiene positiva porque si (x, y) tiende a $(-2, 1)$ será (x, y) distinto de $(-2, 1)$ y además los exponentes son pares. Por tanto, la función $\ln[(x + 2)^2 + (y - 1)^4]$ tendrá límite $-\infty$, cuando (x, y) tiende al punto $(-2, 1)$ (por propiedad muy importante de la “función básica” $y = \ln x$, que tiende a $-\infty$ cuando x tiende a cero por la derecha). Entonces ya sabemos qué le ocurre al numerador de la función dada.

Por otro lado, el denominador de f es la “función elemental” $\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Por tanto, su límite será $-\pi/6$ cuando (x, y) tiende al punto $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Entonces también sabemos qué le ocurre al denominador de la función dada.

Finalmente, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a $-\infty$ y su denominador tiende a $-\pi/6$, el límite del cociente será $+\infty$ (el cociente será positivo, pues tanto el numerador como el denominador se mantendrán negativos).

Conclusión: El límite de la función dada es $+\infty$. (Obsérvese que este límite es de un cociente que no está en la indeterminación $0/0$ ni en la indeterminación ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\ln[(x+2)^2 + (y-1)^4]}{\arcsen\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{-\infty}{-\frac{\pi}{6}} = +\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además operando con $-\infty$ como si fuese un número, lo cual es incorrecto. (En cursos preuniversitarios se suele permitir esto, pero en la Universidad se pide explicar. ¡Es el objetivo de estos ejercicios!).

Nota (conviene haber visto la Sección 8.10 antes de leer esta nota, que puede omitirse sin mayores consecuencias): **Este límite tiene sentido porque, tan cerca como queramos del punto $(-2, 1)$, hay puntos (x, y) donde la función está definida**: En efecto, el numerador está definido con tal que sea (x, y) diferente de $(-2, 1)$, y el denominador está definido con tal que $-1 \leq \frac{x+y}{2} \leq 1$, o sea, con tal que $-2 \leq x + y \leq 2$, que corresponde a la región del plano comprendida entre las rectas paralelas $x + y = -2$ y $x + y = 2$ (ambas incluidas). Y esa región incluye al punto dado $(-2, 1)$ porque $(-2) + 1 = -1$ (que está entre -2 y 2). Además, el denominador se hace cero solamente en los puntos que cumplen $x + y = 0$ (recta bisectriz de los cuadrantes 2° y 4° , que no incluye al punto $(-2, 1)$) donde la función no está definida.

Entonces, si dibujamos las rectas mencionadas $x + y = -2$, $x + y = 0$ y $x + y = 2$, veremos que **hay “entornos circulares” del punto $(-2, 1)$, tan pequeños como queramos, que quedan en la región comprendida entre las rectas primera y tercera y no tocan a la bisectriz $y + x = 0$, con lo cual en esos entornos la función f está definida, salvo en el punto $(-2, 1)$** . Lo cual demuestra que el límite dado tiene sentido.

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

EJEMPLO 2: Hallar el límite de la función $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, explicando las razones que lo justifican y precisando el signo del resultado final si es posible, donde

$$f(x, y) = \frac{\log(2x+8y+6)}{-1+3^{(x+2)^2+(y-1)^4}}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador (da $-1 + 3^0 = 0$). Por tanto, el punto no pertenece al dominio de la función dada (como pedíamos inicialmente). Ver que el punto $(-2, 1)$ está en “la frontera” de dicho dominio es equivalente al hecho de que este límite tiene sentido, lo cual es más complicado de explicar y lo hemos hecho en la Nota final de este ejemplo.

Vemos también que el límite pedido no es de respuesta inmediata. En efecto, no podemos utilizar la continuidad de la “función elemental” f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería el valor $f(-2, 1)$.

Analicemos entonces, separadamente, qué ocurre con el numerador y con el denominador de la función dada:

El numerador es la “función elemental” $\log(2x + 8y + 6)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\log 10 = 1$ ($\log$ representa logaritmo decimal, no logaritmo neperiano). Por tanto, su límite será 1 cuando (x, y) tienda a $(-2, 1)$, como consecuencia de la continuidad en dicho punto. Entonces ya sabemos qué le ocurre al numerador de la función dada.

Por otro lado, el denominador de f es la “función elemental” $-1 + 3^{(x+2)^2+(y-1)^4}$, cuyo valor en $(-2, 1)$ es cero. Y, por razonamiento análogo al anterior, su límite será cero cuando (x, y) tienda a $(-2, 1)$. Entonces también sabemos qué le ocurre al denominador de la función dada.

Finalmente, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a 1 y su denominador tiende a cero, el límite del cociente será infinito. Falta saber si es $+\infty$, si es $-\infty$ o si es $\pm\infty$. Para ello habrá que analizar el signo de $f(x, y)$ cuando el punto variable (x, y) esté suficientemente cerca de $(-2, 1)$, sin coincidir con este punto:

- a) Está claro que el numerador de f será positivo, porque tiende a 1.
- b) Pero el límite del denominador de f es cero, lo cual no permite asegurar su signo. Sin embargo, vemos que el valor de la potencia $3^{(x+2)^2+(y-1)^4}$ será siempre mayor que 1, ya que el exponente se mantendrá positivo (exponentes pares) y sabemos que la función exponencial de base 3 es “estrictamente creciente” siendo $f(0) = 1$. Por tanto, el denominador será también positivo.

Conclusión: El límite de la función dada es $+\infty$. (Este ejemplo tampoco ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\log(2x+8y+6)}{3^{(x+2)^2+(y-1)^4}-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además estableciendo la igualdad incorrecta final ($\frac{1}{0} = +\infty$).

Nota (conviene haber visto la Sección 8.10 antes de leer esta nota, que puede omitirse sin mayores consecuencias): **Este límite tiene sentido** porque tan cerca como queramos de $(-2, 1)$ hay puntos (x, y) donde la función dada está definida: En efecto, el numerador está definido con tal que (x, y) cumpla $2x + 8y + 6 > 0$, lo cual corresponde al semiplano que incluye al origen cuyo

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

borde es la recta $2x + 8y + 6 = 0$, no incluida en el mismo. Y vemos que el punto $(-2, 1)$ está en dicho semiplano, porque $2 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 6 = 10 > 0$. Además, el denominador está definido siempre que sea (x, y) diferente de $(-2, 1)$. En efecto, el denominador se hace cero solamente si la potencia de base 3 vale 1, para lo cual tendrá que ser cero su exponente.

Entonces, si dibujamos la recta $2x + 8y + 6 = 0$, veremos que hay “entornos circulares” del punto $(-2, 1)$, tan pequeños como queramos, que no tocan a la recta mencionada y por tanto contenidos en el semiplano considerado, con lo cual la función dada estará definida en dichos entornos salvo en el punto $(-2, 1)$. Lo cual demuestra que el límite dado tiene sentido.

EJEMPLO 3: Mismo enunciado de los ejemplos 1 y 2, pero con la función

$$f(x, y) = \frac{\arcsen(x+y)}{1 - \cos(2x+3y+1)}$$

Respuesta: Inicialmente, vemos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador (da $1 - \cos 0 = 0$). Por tanto, el punto no pertenece al dominio de la función dada (como pedíamos inicialmente). Ver que el punto $(-2, 1)$ está en “la frontera” de dicho dominio es equivalente al hecho de que este límite tiene sentido, lo cual es más complicado de explicar y lo hemos hecho en la Nota final de este ejemplo.

Vemos también que el límite dado no es de respuesta inmediata. En efecto, no podemos utilizar la continuidad de la “función elemental” f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería el valor $f(-2, 1)$.

Analicemos entonces, separadamente, el límite del numerador y el límite del denominador de la función dada (como en los casos anteriores):

El numerador es la “función elemental” $\arcsen(x + y)$, cuyo valor en el punto $(-2, 1)$ es $\arcsen(-1) = -\pi/2$. Por tanto, su límite será $-\pi/2$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$, por continuidad en dicho punto. Entonces ya sabemos cuál es límite del numerador de la función dada.

Por análogos motivos, el límite de la función denominador será $1 - \cos(0) = 0$, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$. Luego, también sabemos el límite del denominador de la función dada.

Entonces, por el mismo teorema del álgebra de límites aplicado en el ejemplo anterior, el límite de la función $f(x, y)$ es infinito. Falta saber si es $+\infty$, si es $-\infty$ o si es $\pm\infty$.

Para ello debemos conocer el signo de dicha función $f(x, y)$ cuando el punto variable (x, y) esté suficientemente cerca de $(-2, 1)$, sin coincidir con ese punto:

- a) Está claro que su numerador será negativo, porque tiene límite negativo.
- b) Pero el límite del denominador de f es cero, lo cual no permite asegurar su signo. Sin embargo, la función $\cos(2x + 3y + 1)$ es siempre menor o igual que 1 (propiedad de la “función básica” $\cos x$). Pero en este caso (x, y) tiende al punto $(-2, 1)$ sin tocar la recta de ecuación $2x + 3y + 1 = 0$, ya que sus puntos no están en el dominio de $f(x, y)$. Con lo cual, $2x + 3y + 1$ tenderá a cero, pero sin ser cero. Lo cual nos asegura que la función $\cos(2x + 3y + 1)$ será menor que uno y entonces el denominador de la función f será positivo.

Conclusión: El límite de la función dada es $-\infty$. (Este ejemplo no ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{\arcsen(x+y)}{1-\cos(2x+3y+1)} = \frac{-\pi/2}{0} = -\infty$$

sin justificar los límites del numerador y del denominador, y además estableciendo la igualdad incorrecta final ($\frac{-\pi/2}{0} = -\infty$).

Nota (misma observación de las notas de los dos ejemplos anteriores): **Este límite tiene sentido** porque tan cerca como queramos de $(-2, 1)$ hay puntos (x, y) donde la función está definida. En efecto, el numerador está definido con tal que se cumpla $-1 \leq x + y \leq 1$, que corresponde a la región del plano comprendida entre las rectas paralelas $x + y = -1$ y $x + y = 1$ (ambas incluidas). Vemos que el punto $(-2, 1)$ está situado en la primera recta. Y el denominador está definido siempre. Pero dicho denominador se hace cero cuando sea $2x + 3y + 1 = 0$, que es una recta que corta a las dos rectas anteriores (tienen diferente pendiente); por tanto, en sus puntos no está definida la función. Y vemos que el punto $(-2, 1)$ está sobre dicha recta (es la intersección de la misma con $x + y = -1$).

Entonces, si dibujamos las tres rectas $x + y = -1$, $x + y = 1$ y $2x + 3y + 1 = 0$, veremos que **cualquier “entorno circular” del punto $(-2, 1)$, por pequeño que sea, incluye infinitos puntos (x, y) donde la función dada está definida** por quedar los mismos entre las dos primeras rectas (que son paralelas) y no quedar sobre la tercera recta (aunque también incluirá infinitos puntos (x, y) donde la función no está definida por quedar los mismos fuera de la “banda” definida por las dos primeras rectas o por pertenecer a la tercera recta). Por tanto, el límite dado tiene sentido.

EJEMPLO 4: Mismo enunciado de los ejemplos anteriores, pero con la función

$$f(x, y) = \frac{4^{\frac{1}{(x+2)^2+(y-1)^4}}}{\sqrt[3]{2x-3y+7}}$$

Respuesta: Como en los casos anteriores, observamos que la función dada es “elemental” y no está definida en el punto $(-2, 1)$, porque en ese punto se anula el denominador de la fracción que aparece como exponente de la potencia de base 4 que está en el numerador de f , y también se anula el denominador de f . Por tanto, el punto no pertenece al dominio de la función dada (como pedíamos inicialmente). Ver que el punto $(-2, 1)$ está en “la frontera” de dicho dominio es equivalente al hecho de que este límite tiene sentido, lo cual es más complicado de explicar y lo hemos hecho en la Nota final de este ejemplo.

Vemos también que el límite pedido no es de respuesta inmediata. En efecto, no podemos utilizar la continuidad de la “función elemental” f en el punto dado, en cuyo caso el límite sería el valor $f(-2, 1)$.

Debemos entonces averiguar los límites del numerador y del denominador de f , en forma separada, y concluir aplicando algún teorema del “álgebra de límites”.

La expresión $(x + 2)^2 + (y - 1)^4$ corresponde a una “función elemental” que vale cero en el punto $(-2, 1)$. Luego su límite será cero, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Pero, además, esa función es siempre positiva porque en el cálculo del límite será (x, y) distinto de $(-2, 1)$ y los exponentes son pares, luego el límite del cociente $\frac{1}{(x+2)^2+(y-1)^4}$ es $+\infty$ (por un teorema del “álgebra de límites”). Entonces (aplicando una propiedad muy importante de la “función básica” $y = 4^x$, que tiende a $+\infty$ si su exponente tiende a $+\infty$), la función del

CÁLCULO DE LÍMITES NO INDETERMINADOS DE FUNCIONES ELEMENTALES DE DOS VARIABLES

numerador también tiende a $+\infty$ cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$. Por tanto, sabemos el límite del numerador de la función dada.

Por otro lado, la función $\sqrt[3]{2x - 3y + 7}$ es “elemental” y su valor en el punto $(-2, 1)$ es $\sqrt[3]{0} = 0$. Por lo tanto, el límite del denominador de $f(x, y)$ será 0, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ (por continuidad en dicho punto). Así sabemos ya el límite del denominador de la función dada.

Ahora, por un teorema del “álgebra de límites”, si el numerador de f tiende a $+\infty$ y el denominador tiende a 0, la función $f(x, y)$ tiene límite infinito (pero no sabemos si es $+\infty$, si es $-\infty$ o si es $\pm\infty$). Ahora bien, cuando (x, y) tiende a $(-2, 1)$ puede hacerlo por el semiplano donde es $2x - 3y + 7 > 0$ (y la raíz cúbica del denominador será positiva) o puede hacerlo por el semiplano donde es $2x - 3y + 7 < 0$ (y la raíz cúbica del denominador será negativa) (en la Sección 8.10 se explica que en solamente uno de los semiplanos definidos por una recta de ecuación general $Ax + By + C = 0$ se cumple la inecuación $Ax + By + C > 0$ y en el otro semiplano definido por la misma recta se cumple la inecuación $Ax + By + C < 0$). Es decir, que el denominador tiende a cero tomando valores positivos y también valores negativos, según la colocación de los puntos que se consideren cerca del $(-2, 1)$. Por lo tanto, el límite de $f(x, y)$ será $\pm\infty$.

Conclusión: El límite de la función dada es $\pm\infty$. (Tampoco este ejemplo ha sido un límite del tipo $0/0$ ni del tipo ∞/∞).

Comentario: Hay personas que escriben solamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{4 \frac{1}{(x+2)^2 + (y-1)^4}}{\sqrt[3]{2x-3y+7}} = \frac{4 \frac{1}{0}}{0} = \frac{4^{+\infty}}{0} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

donde faltan muchas explicaciones y donde se usa la igualdad incorrecta $\frac{1}{0} = +\infty$, la igualdad simbólica sin explicación $4^{+\infty} = +\infty$ y la igualdad incorrecta $\frac{+\infty}{0} = +\infty$.

Nota (misma observación hecha en las notas de los tres ejemplos anteriores): **Este límite tiene sentido** porque tan cerca como queramos del punto $(-2, 1)$ hay puntos (x, y) donde la función está definida. En efecto, el numerador está definido con tal que (x, y) sea diferente a $(-2, 1)$. Y el denominador está definido siempre. Pero, los únicos puntos donde se anula el denominador son los de la recta de ecuación $2x - 3y + 7 = 0$ y por tanto sobre la misma no está definida la función. Observamos además que $(-2, 1)$ es punto de dicha recta.

Entonces, si dibujamos la recta anterior veremos que **en cualquier “entorno circular” del punto $(-2, 1)$, por pequeño que sea, hay infinitos puntos (x, y) donde la función está definida** (todos los puntos del entorno menos los que pertenecen a la recta $2x - 3y + 7 = 0$). Lo cual demuestra que el límite dado tiene sentido.